

Łukasz Kuźmiński

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny
Katedra Metod Ilościowych w Ekonomii
lukasz.kuzminski@ue.wroc.pl

ZASTOSOWANIE ROZKŁADU POISSONA DO OCENY RYZYKA ZAGROŻENIA HYDROLOGICZNEGO

Streszczenie: Głównym celem tego artykułu jest zastosowanie rozkładu Poissona do oceny ryzyka zagrożenia powodziowego na rzece Odrze w Oławie. Dolny Śląsk należy do regionów najbardziej zagrożonych podtopieniami i powodziami w Polsce.

W badaniu wyselekcjonowane zostaną maksymalne stany wód dla wybranych horyzontów czasowych. W ten sposób otrzymane zostaną realizacje określonych zmiennych losowych, które aproksymowane będą odpowiednimi rozkładami Poissona. Z dopasowanych teoretycznych rozkładów Poissona policzone zostaną prawdopodobieństwa przekroczenia progów ostrzegawczego i alarmowego, które traktowane będą jako miary ryzyka zagrożenia powodziowego.

Słowa kluczowe: Próg ostrzegawczy u_{SO} i alarmowy u_{SA} , stan wody, maksima, ryzyko zagrożenia hydrologicznego.

Wprowadzenie

W ostatnich latach w Polsce występuje bardzo dużo zdarzeń katastroficznych związanych z nagłymi zmianami meteorologicznymi i hydrologicznymi. Wiele regionów kraju boryka się z regularnymi podtopieniami i powodziami mającymi związek z nagłymi nawałnicami i obfitymi opadami deszczu. Te wszystkie wydarzenia są skutkiem osiągnięcia ekstremalnych wartości przez określone charakterystyki meteorologiczne i hydrologiczne.

Negatywny wpływ ekstremalnych wartości charakterystyk meteorologicznych i hydrologicznych na wiele dziedzin życia społeczno-gospodarczego powoduje wzmożone zainteresowanie nimi naukowców oraz praktyków wielu branż.

Na podstawie danych dotyczących historycznych dziennych stanów wód pochodzących ze stacji naziemnej w Oławie spróbujemy oszacować ryzyko przekroczenia określonych poziomów wody na Odrze. Do tego celu wykorzystamy maksima dziennych stanów wód z kilku wybranych okresów. Rozkład liczby przekroczeń przez maksima ustalonych poziomów stanu wody w określonych horyzontach czasowych będziemy aproksymować rozkładem Poissona.

1. Obserwowane przekroczenia i maksima

Przyjmujemy na początku tej sekcji, że X_1, \dots, X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Przez $F(x)$ oznaczymy wspólną dystrybuantę powyżej przedstawionego ciągu zmiennych losowych, a przez $f(x)$ funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Rzeczywista wartość dystrybuanty zmiennej losowej X dana jest przez wzór $F(x) = P\{X \leq x\}$. Wartość oczekiwaną i wariancję oznaczymy standardowo odpowiednio przez $E(x)$ i $V(x)$ [por. Fisz, 1967; Magiera, 2002].

1.1. Liczba przekroczeń progu u

Jedną z metod wyselekcjonowania górnych ekstremów, czyli maksimów ze zbioru obserwacji x_1, \dots, x_n , jest wybranie tych obserwacji, które przekraczają pewien arbitralny wysoki poziom u określany jako próg. Oznaczymy przez y_i wszystkie te x_i z pobranej próby, które spełniają nierówność $x_i > u$. Wartości $y_i - u$ będą miarami przekroczeń ponad poziom u .

Liczbę przekroczeń poziomu u w określonym horyzoncie czasu oznaczymy przez k lub czasami przez K w celu podkreślenia losowego charakteru tej liczby. W większości przypadków wartości badanych zmiennych, które są poniżej poziomu u , nie są odnotowywane lub nie będą przez nas w ogóle obserwowane.

Bierzemy teraz zmienne losowe X_1, \dots, X_n . Możemy zapisać, że $K = \sum_{i=1}^n I(X_i > u)$, gdzie $I(X_i > u)$ jest indykatozem z $I(X_i > u) = 1$, jeśli $X_i > u$ i zero w pozostałych przypadkach. Jeżeli, tak jak przyjęliśmy na początku tej sekcji, X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnej dystrybuancie F , to wtedy

$$P\{K = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: B_{n,p}\{k\}, \quad k=1, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie $B_{n,p}$ jest powszechnie znanym rozkładem dwumianowym z parametrami n i $p = 1 - F(u)$. Średnią liczbę przekroczeń progu u wyznaczmy ze wzoru:

$$\Psi_{n,F(u)} = np = n(1 - F(u)), \quad (2)$$

który definiuje malejącą średnią wartość funkcji [Thomas, 2007].

1.2. Aproksymacja rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona

W tym podrozdziale przedstawimy, niezbędny do dalszych rozważań w tej pracy, zarys dobrze znanego faktu, iż rozkład dwumianowy $B_{n,p}$ może być z dużą skutecznością przybliżony rozkładem Poissona. Oznacza to, że liczbę przekroczeń K progu u możemy traktować jak zmienną losową o rozkładzie Poissona.

Dla niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_n przyjmujemy, że wartości 1 i 0 są osiągane odpowiednio z prawdopodobieństwami p i $1 - p$. W połączeniu z liczbą przekroczeń te zmienne losowe są specjalnej postaci $I(X_i > u)$.

Otrzymujemy

$$P\{X_1 + \dots + X_n = k\} = B_{n,p}\{k\}. \quad (3)$$

Dla rozkładu dwumianowego mamy oczekiwaną liczbę sukcesów $E(X) = np$ oraz wariancję liczby sukcesów $V(X) = np(1-p)$.

Rozkład Poissona może być dopasowany do danych o rozkładzie dwumianowym przy pewnych określonych warunkach. I tak, jeśli $np(n) \rightarrow \lambda$, gdy $n \rightarrow \infty$, wtedy

$$B_{n,p(n)}\{k\} \rightarrow P_\lambda\{k\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

gdzie $P_\lambda\{k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiuje rozkład Poissona z parametrem λ .

Jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie Poissona, to wtedy $E(X) = V(X) = \lambda$.

Również dobrze znana jest nierówność

$$\left| B_{n,p}(A) - P_{\lambda=np}(A) \right| \leq p, \quad (5)$$

która jest spełniona dla każdego zbioru A nieujemnych liczb całkowitych. Zauważmy, że prawa strona nierówności nie jest zależna od n . Stąd wynika fakt, że rozkład Poissona możemy dopasować do rozkładu dwumianowego, gdy tylko p jest odpowiednio małe. Bardziej szczegółowe informacje na temat aproksymacji z wykorzystaniem rozkładu Poissona można znaleźć w pracy [Barbour, 1992].

1.3. Maksima

Przyjmujemy, że dane y_i są maksimami, tzn.

$$y_i = \max \{x_{i,1}, \dots, x_{i,m}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

gdzie $x_{i,j}$ mogą nie być obserwowalne.

W przypadku, gdy $x_{i,j}$ w (6) mogą być przez nas obserwowane, wtedy wybranie maksimum z pewnego bloku obserwacji jest inną formą wyselekcjonowania górnych ekstremalnych wartości ze zbioru danych (poza wybieraniem przekroczeń określonego progu u). Ta metoda jest nazywana dorocznymi maksimami lub blokową. Dla przykładu – przy wyborze maksymalnych wartości – takich jak maksymalne temperatury, stany wód na rzekach, prędkości wiatru itp. – w ciągu pewnego okresu (rok, miesiąc lub kwartał).

Dla niezależnych zmiennych losowych o wspólnej dystrybuancie F możemy prosto wyznaczyć dystrybuantę dla zmiennej losowej M_n określonej wzorem:

$$M_m = \max(X_1, \dots, X_m). \quad (7)$$

Dystrybuanta zmiennej losowej M_m wyraża się następującym wzorem:

$$P\{M_m \leq x\} = P\left\{\max_{i \leq m} X_i \leq x\right\} = P\{X_1 \leq x, \dots, X_m \leq x\} = F^m(x). \quad (8)$$

W ten sposób otrzymujemy, że dane y_i w (6) są opisane dystrybuantą F^m , jeżeli dane $x_{i,j}$ są określone przez dystrybuantę F [Nagaraja, 2003].

Jeśli warunek niezależności dla zmiennych losowych X_1, \dots, X_n nie zostaje dotrzymany, wtedy dystrybuanta postaci F^m może jednak się okazać dokładną aproksymacją rzeczywistej dystrybuanty maksimum. Dla niezależnych, a jednak niejednorodnych zmiennych losowych X_j z dystrybuantą F_j , prawą stroną (8) z F^m zastępujemy przez $\prod_{j \leq m} F_j$. Dystrybuantę F^m możemy dopasować do $\prod_{j \leq m} F_j$, jeśli odchylenia dystrybuant $F_j, j = 1, \dots, m$ mogą być pominięte. Więcej informacji na temat rozkładów wartości ekstremalnych w przypadku zależnych zmiennych losowych można znaleźć w pracach [Kuźmiński, 2013] i [Nagaraja, 2003].

2. Dopasowanie i wnioskowanie w rozkładzie Poissona

W tej sekcji zajmiemy się dopasowaniem, estymacją i testowaniem w modelu Poissona. Model Poissona jest ściśle związany z analizą wartości ekstremalnych, ponieważ rozpatrywana we wcześniejszej sekcji liczba przekroczeń określonego progu u w pewnym przedziale czasowym może być traktowana jako zmienna losowa o rozkładzie Poissona.

2.1. Dopasowanie rozkładu Poissona do danych dyskretnych

Celem tej pracy, jak wspomnieliśmy na początku, jest modelowanie ryzyka zagrożenia powodziowego z wykorzystaniem rozkładu Poissona. Do tego niezbędne będzie dopasowanie odpowiedniego teoretycznego rozkładu Poissona do rozkładu empirycznego badanych charakterystyk. Na początku procedury doboru najlepiej dopasowanego rozkładu teoretycznego przedstawimy graficznie empiryczny rozkład danych dyskretnych. Najlepszym i powszechnie stosowanym narzędziem, które służy do graficznej prezentacji empirycznych rozkładów dla danych dyskretnych, jest histogram empiryczny. W przypadku danych będących liczbami całkowitymi histogram opisany jest wzorem:

$$p_n(j) = n(j) / n, \quad (9)$$

gdzie $n(j)$ jest liczbą obserwacji spośród danych x_1, \dots, x_n równych całkowitej liczbie j . Otrzymujemy również, że

$$p_n(j) \approx P\{j\}, \quad (10)$$

gdzie P jest teoretycznym dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa, z którego obserwacje x_1, \dots, x_n zostały wygenerowane.

Niech x_1, \dots, x_n zostały wygenerowane z rozkładu Poissona P_λ . Pamiętamy z (9), że $p_n(j) = n(j) / n \approx P_\lambda\{j\}$. Wzrokowa ocena histogramu teoretycznego i empirycznego jest jedną z najprostszych i zarazem najszybszych metod oceny stopnia dopasowywania obu rozkładów. Z uwagi na jej prostotę jest obarczona błędem. Nie zawsze uda się graficznie dobrać wartości parametrów najlepiej dopasowanego rozkładu. Wstępną ocenę wzrokową dopasowania rozkładów zawsze należy zweryfikować odpowiednimi testami zgodności rozkładu, np. powszechnie znanym testem zgodności chi-kwadrat.

2.2. Test jakości dopasowania dla rozkładu Poissona

Hipoteza zerowa, że dane pochodzą z rozkładu Poissona P_λ z nieznanym parametrem λ , jest testowana przeciwko hipotezie o innym rozkładzie danych całkowitych nieujemnych. Test ilorazu wiarygodności i χ^2 – test w modelu wielomianowym mogą być przeprowadzone przez odpowiednie grupowanie danych.

Przy hipotezie zerowej niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie Poissona P_λ , gdzie λ jest nieznanne. Niech

$B_j = \{j\}$ dla $j = 0, \dots, m-1$ i $B_m = \{m, m+1, m+2, \dots\}$. W ten sposób obserwujemy $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_m)$, gdzie n_j jest częstością obserwacji x_i w celi B_j . Hipoteza zerowa jest postaci

$$H_0 = \{(p_0(\lambda), \dots, p_m(\lambda)) : \lambda > 0\},$$

gdzie $p_j(\lambda) = P_\lambda \{j\} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$, $j = 0, \dots, m-1$ i $p_m(\lambda) = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} p_j(\lambda)$.

Graniczna dystrybuanta dla ilorazu wiarygodności i statystyki χ^2 jest dystrybuantą χ^2 z $k = m-1$ stopniami swobody.

Na początku obliczeń musimy obliczyć odpowiednie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem estymatorów największej wiarygodności:

$$\mathbf{p}(\hat{\lambda}) = (p_0(\hat{\lambda}), \dots, p_m(\hat{\lambda}))$$

dla H_0 . W tym celu musimy znaleźć rozwiązanie dla równania największej wiarygodności

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log M_{n, \mathbf{p}(\lambda)} \{\mathbf{n}\} = 0,$$

które jest równoważne do równania

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{m-1} j n_j + \frac{n_m}{p_m(\lambda)} \sum_{j=m}^{\infty} j P_\lambda \{j\} \right).$$

Jeśli $n_m = 0$, wtedy $\hat{\lambda}(\mathbf{n})$ jest średnią próby, która jest estymatorem największej wiarygodności w modelu Poissona.

Statystyki dla testu ilorazu wiarygodności i testu χ^2 są dane odpowiednio wzorami:

$$T_{LR}(\mathbf{n}) = 2n \sum_{j=0}^m \frac{n_j}{n} \log \frac{n_j}{np_j(\hat{\lambda}(\mathbf{n}))}, \quad (11)$$

$$\hat{\chi}^2(\mathbf{n}) = \sum_{j=0}^m \frac{(n_j - np_j(\hat{\lambda}(\mathbf{n})))^2}{np_j(\hat{\lambda}(\mathbf{n}))}. \quad (12)$$

Wzory na p -value dla prezentowanych testów określone są następująco:

$$p_{LR}(\mathbf{n}) = 1 - \chi_{m-1}^2(T_{LR}(\mathbf{n})), \quad (13)$$

$$p_{\chi^2}(\mathbf{n}) = 1 - \chi_{m-1}^2(\chi_{m-1}^2(\mathbf{n})). \quad (14)$$

3. Szacowanie ryzyka zagrożenia hydrologicznego na rzece Odrze

W tej sekcji, wykorzystując rzeczywiste dane pochodzące z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej w Warszawie, oszacujemy ryzyko wystąpienia zagrożenia powodziowego w Oławie na rzece Odrze z wykorzystaniem rozkładu Poissona.

3.1. Dane empiryczne – dzienne stany wód na Odrze

W niniejszym opracowaniu do badania wykorzystaliśmy dzienne stany wód na rzece Odrze uzyskane w stacji naziemnej w mieście Oława. Stan wody jest pojęciem pochodzącym z hydrologii i opisuje go dokładnie poniższa definicja.

Stan wody jest to wzniesienie zwierciadła wody w cieku ponad umowny poziom odniesienia (co nie jest równoznaczne z głębokością cieku). Należy rozróżnić pojęcia stan wody i poziom wody. Są to te same wielkości fizyczne, jednak podawane względem różnych odniesień. Poziomy terenu liczymy od przyjętego poziomu morza, dlatego wysokość, na której znajdują się obiekty na ziemi, wyrażamy w metrach nad poziomem morza. W Polsce sieć wodowskazowa odniesiona jest obecnie do poziomu morza w Kronsztadzie w Rosji. Dla uproszczenia zapisu wzniesienie zwierciadła wody liczymy od ustalonego „zera” wodowskazu. Taki pomiar nazywamy stanem wody, w odróżnieniu od poziomów liczonych względem przyjętego zera niwelacji [Ozga-Zielińska, 1997].

Dane pochodziły z codziennych pomiarów z okresu od 1 stycznia 1961 roku do 31 grudnia 2011 roku, co daje łącznie $n = 18\,627$ obserwacji. Do badania wzięte zostały 14-dniowe maksymalne stany wód, co spowodowało, że liczba obserwacji zmalała do 1330. Zapisując to zgodnie z nomenklaturą wzorów (6) i (7), otrzymujemy obserwacje:

$$y_i = \max\{x_{i,1}, \dots, x_{i,14}\}, \quad i = 1, \dots, 1330, \text{ które są realizacją zmiennej losowej}$$

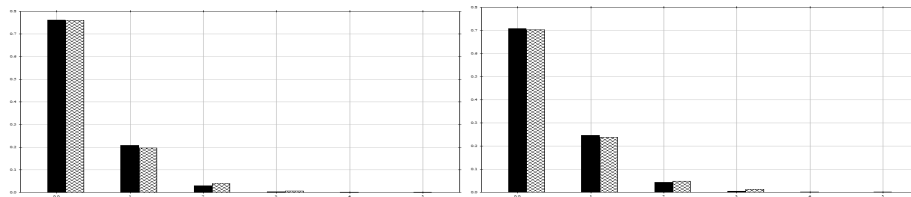
$$M_{14} = \max(X_1, \dots, X_{14}).$$

3.2. Dopasowanie rozkładu Poissona do empirycznej liczby przekroczeń progów u przez maksima

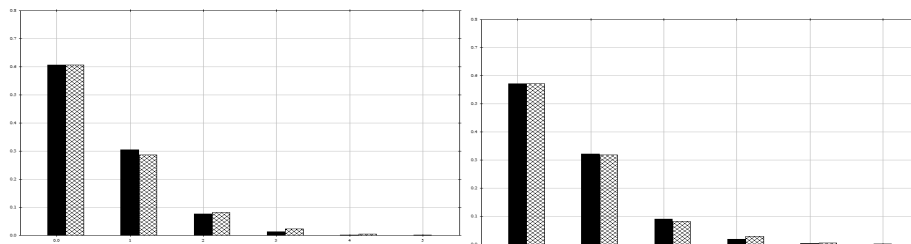
W tej pracy modelowaniu rozkładem Poissona poddajemy zmienne losowe, które są liczbą przekroczeń progów u_{SO} i u_{SA} przez maksima z okresu 14-dniowego w ustalonych horyzontach czasowych. Progi u_{SO} i u_{SA} są poziomami odpowiednio ostrzegawczym i alarmowym i dla badanej rzeki Odry w Oławie wynoszą 500 cm i 560 cm.

Liczbę przekroczeń obu stanów modelować będziemy w 4 różnych horyzontach czasowych: 4-okresowym (4×14 dni = 28 dni), 6-okresowym, 12-okresowym i 24-okresowym. Każdy horyzont czasowy badać będziemy dla obu progów przekroczeń. Łącznie daje nam to 8 osobnych zmiennych losowych, których rozkład modelować będziemy rozkładem Poissona. Przyjmujemy następujące ogólne oznaczenie dla badanych zmiennych losowych: $X_{u_{SO},l}$ i $X_{u_{SA},l}$. Pierwsze oznaczenie jest dla zmiennej losowej będącej liczbą przekroczeń progów u_{SO} przez maksima 14-dniowe dziennych stanów wód w l -okresowym horyzoncie czasowym ($l \times 14$ dni). Drugie oznaczenie określa w analogiczny sposób zmienne losowe dla progów u_{SA} .

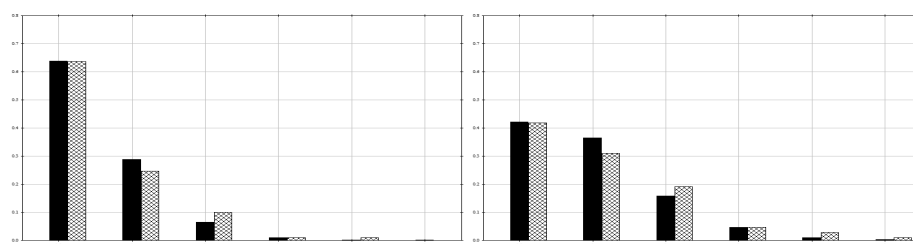
Poniżej przedstawione zostaną wykresy histogramów empirycznych i dopasowanych do nich teoretycznych rozkładów Poissona dla wszystkich 8 badanych zmiennych losowych.



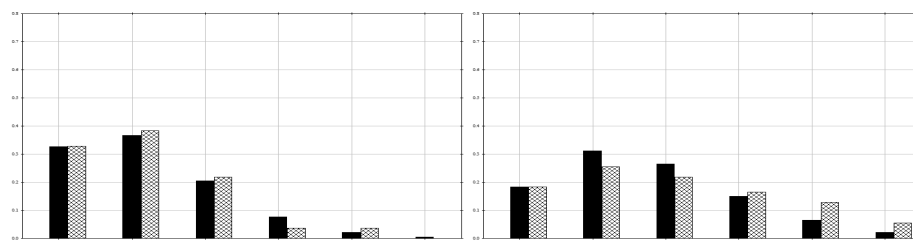
Rys. 1. Empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{u_{SO},4}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,28$ – wykres po prawej oraz empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{u_{SA},4}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,35$ – wykres po lewej stronie



Rys. 2. Empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{u_{SO},6}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,5$ – wykres po prawej oraz empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{u_{SA},6}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,56$ – wykres po lewej stronie



Rys. 3. Empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{uso,12}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,65$ – wykres po prawej oraz empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{usa,12}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 0,87$ – wykres po lewej stronie



Rys. 4. Empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{uso,24}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 1,12$ – wykres po prawej oraz empiryczny histogram (kratkowany) dla zmiennej $X_{usa,24}$ i histogram rozkładu Poissona (czarny) z $\lambda = 1,7$ – wykres po lewej stronie

Przedstawione histogramy rozkładów empirycznych i teoretycznych na rysunkach 1-4 sugerują, że zaprezentowane przez nas teoretyczne rozkłady Poissona z odpowiednimi parametrami są dobrze dopasowane do rozkładów empirycznych modelowanych zmiennych losowych. W celu potwierdzenia oceny wzrokowej przeprowadziliśmy dla każdej zmiennej losowej test zgodności χ^2 , opisany w poprzednim rozdziale. Wyniki testu w postaci wartości p -value przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości p -value dla testu zgodności chi-kwadrat dla zmiennych $X_{uso,l}$ i $X_{usa,l}$

| | u_{SO} | u_{SA} |
|----------|----------|----------|
| $l = 4$ | 0,35 | 0,32 |
| $l = 6$ | 0,54 | 0,65 |
| $l = 12$ | 0,14 | 0,38 |
| $l = 24$ | 0,69 | 0,56 |

Wyniki testu zgodności chi-kwadrat przeprowadzone dla wszystkich 8 zmiennych potwierdzają sugestię o dobrym dopasowaniu rozkładów empirycznych do teoretycznych wynikające z oceny wzrokowej prezentowanych wcześniej histogramów.

W związku z tym dopasowane rozkłady Poissona mogą zostać zastosowane do szacowania ryzyka zagrożenia powodziowego na rzece Odrze w mieście Oława.

3.3. Modele ryzyka zagrożenia powodziowego – obliczenia

W poprzednim podrozdziale opracowania wybraliśmy najlepiej dopasowane do empirycznych rozkładów zmiennych $X_{u_{SO},l}$ i $X_{u_{SA},l}$ rozkłady Poissona. W tym podrozdziale funkcje prawdopodobieństwa i dystrybuanty wyselekcjonowanych rozkładów posłużą nam za formuły do szacowania ryzyka zagrożenia powodziowego na badanej rzece. Funkcje prawdopodobieństwa wyselekcjonowanych modeli zawarliśmy w tabeli 2.

Tabela 2. Funkcje prawdopodobieństwa rozkładów Poissona dla badanych zmiennych

| | $X_{u_{SA},l}$ | $X_{u_{SO},l}$ |
|----------|---|---|
| $l = 4$ | $P_{0,28}\{k\} = \frac{(0,28)^k}{k!} e^{-0,28}$ | $P_{0,35}\{k\} = \frac{(0,35)^k}{k!} e^{-0,35}$ |
| $l = 6$ | $P_{0,5}\{k\} = \frac{(0,5)^k}{k!} e^{-0,5}$ | $P_{0,56}\{k\} = \frac{(0,56)^k}{k!} e^{-0,56}$ |
| $l = 12$ | $P_{0,65}\{k\} = \frac{(0,65)^k}{k!} e^{-0,65}$ | $P_{0,87}\{k\} = \frac{(0,87)^k}{k!} e^{-0,87}$ |
| $l = 24$ | $P_{1,12}\{k\} = \frac{(1,12)^k}{k!} e^{-1,12}$ | $P_{1,7}\{k\} = \frac{(1,7)^k}{k!} e^{-1,7}$ |

Oceniając ryzyko wystąpienia zagrożenia powodziowego na rzece Odrze za miarę dla każdej z rozpatrywanych zmiennych $X_{u_{SO},l}$ i $X_{u_{SA},l}$, przyjmiemy prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jednego przekroczenia odpowiednio progów u_{SO} i u_{SA} oraz prawdopodobieństwo niewystąpienia ani jednego przekroczenia w rozpatrywanych horyzontach czasowych. Wynik obliczeń przedstawione są w tabeli 3.

Tabela 3. Miary ryzyka zagrożenia powodziowego na rzece Odrze z rozkładu Poissona

| | $P(X_{u_{SA},l} = 0)$ | $P(X_{u_{SA},l} \geq 1)$ | $P(X_{u_{SO},l} = 0)$ | $P(X_{u_{SO},l} \geq 1)$ |
|----------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
| $l = 4$ | 0,7558 | 0,2442 | 0,7047 | 0,2953 |
| $l = 6$ | 0,6065 | 0,3935 | 0,5712 | 0,4288 |
| $l = 12$ | 0,5220 | 0,4779 | 0,4189 | 0,5810 |
| $l = 24$ | 0,3263 | 0,6737 | 0,1827 | 0,8173 |

Ocena wzrokowa histogramów rozkładów empirycznych i teoretycznych, która sugerowała bardzo dobre ich dopasowanie, została potwierdzona zastosowaniem testu zgodności chi-kwadrat. W związku z tym funkcje prawdopodobieństwa i dystrybuanty odpowiednich rozkładów Poissona zostały zastosowane do obliczenia prawdopodobieństw wystąpienia przekroczeń progów ostrzegawczych i alarmowych. Prawdopodobieństwa te traktowane są jako miary ryzyka zagrożenia powodziowego na badanej rzece.

Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 3. Ryzyko wystąpienia przynajmniej jednego przekroczenia stanu alarmowego w analizowanych horyzontach czasowych jest wyraźnie mniejsze, aniżeli wystąpienie przynajmniej jednego przekroczenia stanu ostrzegawczego. Prawdopodobieństwo niewystąpienia przekroczenia stanu ostrzegawczego i stanu alarmowego maleje wraz z wydłużaniem się horyzontu czasowego l . Taka sama sytuacja występuje przy ryzyku pojawienia się przynajmniej jednego przekroczenia zarówno stanu ostrzegawczego, jak i alarmowego.

Podsumowanie

W artykule przedstawiliśmy, jak, wykorzystując powszechnie znany rozkład Poissona oraz archiwalne dane dotyczące dziennych stanów wód na rzece Odrze, można modelować ryzyko zagrożenia powodziowego. Z danych wyselekcjonowaliśmy maksima dziennych stanów wód w okresach 14-dniowych. Następnie policzyliśmy liczby przekroczeń progu ostrzegawczego i alarmowego w czterech arbitralnie ustalonych horyzontach czasowych (56, 84, 168 i 336 dni). W ten sposób uzyskaliśmy realizację 8 zmiennych losowych oznaczonych w pracy przez $X_{u_{SO},l}$ i $X_{u_{SA},l}$.

Na wykresy empirycznych histogramów tych zmiennych nanieśliśmy najlepiej dopasowane teoretyczne rozkłady Poissona. Jakość uzyskanych wyników aproksymacji graficznej potwierdziliśmy testem zgodności chi-kwadrat. Wybrane teoretyczne rozkłady Poissona wykorzystaliśmy do obliczenia prawdopodobieństw wystąpienia co najmniej jednego przekroczenia oraz niewystąpienia przekroczenia progu ostrzegawczego i alarmowego w ustalonych horyzontach czasowych. Uzyskane prawdopodobieństwa w tabeli 3 pełnią rolę miar ryzyka wystąpienia zagrożenia powodziowego.

Analizując otrzymane wyniki, widzimy, że prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jednego przekroczenia progu u_{SO} i u_{SA} wyraźnie wzrasta wraz ze zwiększaniem horyzontu czasowego l i jednocześnie maleje prawdopodobień-

stwo niewystąpienia przekroczenia obu progów, co jest logiczne. Dla ustalonych horyzontów czasowych l prawdopodobieństwa wystąpienia co najmniej jednego przekroczenia progu u_{SO} są wyższe niż te same prawdopodobieństwa dla progu u_{SA} . Wynika to z faktu, że $u_{SO} < u_{SA}$.

Prezentowana w pracy metoda modelowania ryzyka wystąpienia zagrożenia powodziowego na podstawie historycznych danych może być bardzo użytecznym narzędziem instytucji odpowiedzialnych za zabezpieczenia przeciwpowodziowe i instytucji zajmujących się ubezpieczeniami od powodzi do porównania różnych obszarów np. na Dolnym Śląsku pod kątem ryzyka zagrożenia powodziowego.

Literatura

- Barbour A.H. (1992), *Poisson Approximation*, Oxford University Press, Oxford.
- Czekala M. (2001), *Statystyki pozycyjne w modelowaniu ekonometrycznym. Wybrane problemy*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Fisz M. (1967), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.
- Galambos J. (1978), *The asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York.
- Kotz S.N. (2005), *Extreme Value Distributions. Theory and Applications*, Imperial College Press, London.
- Kuźmiński Ł. (2013), *Graniczne dystrybuanty wartości ekstremalnych dla zależnych ciągów zmiennych losowych*, „Ekonometria”, nr 2 (40).
- Kuźmiński Ł. (2012), *Prognozowanie ostrzegawcze*, UE, Wrocław.
- Kuźmiński Ł. (2012), *Statystyki pozycyjne w prognozach ostrzegawczych. Zastosowanie metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*, CeDeWu, Warszawa.
- Magiera R. (2002), *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.
- Nagaraja H.D. (2003), *Order Statistics*, John Wiley & Sons, Inc.
- Ozga-Zielińska M. (1997), *Hydrologia stosowana*, WN PWN, Warszawa.
- Siedlecka U. (1996), *Prognozy ostrzegawcze w gospodarce*, PWE, Warszawa.
- Soczyńska U. (1997), *Hydrologia dynamiczna*, WN PWN, Warszawa.
- Thomas M.R. (2007), *Statistical Analysis of Extreme Value with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, Birkhauser, Berlin.

USING THE POISSON DISTRIBUTION TO ESTIMATE THE RISK OF HYDROLOGICAL DANGER

Summary: The main purpose of this article is the using the Poisson distribution to estimate the risk of flood danger on the Odra river in Oława. Lower Silesia belongs to one of the most dangerous regions in Poland of waterboarding and floods. In research the maximas of water level will be selected for chosen times horisont. In this way, given determined random variables, will be approximated by relevant Poisson distribution. In fitted theoretical Poisson distribution it will be counted the probability od transgression warning and alarm level which will be treated as a risk measure of flood danger.

Keywords: warning level u_{SO} , alarm level u_{SA} , water level, maximas, risk of hydrological danger.