



Józef Biolik

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Ekonometrii
josef.biolik@ue.katowice.pl

**OCENA PRZYDATNOŚCI
MODELU EKONOMETRYCZNEGO
DO BADANIA ZMIAN DYNAMIKI
GOSPODARKI WOJEWÓDZTWA ŚLĄSKIEGO**

Streszczenie: Celem artykułu jest prognostyczna weryfikacja modelu gospodarki województwa śląskiego oraz ocena dynamicznych własności gospodarki na podstawie pierwiastków charakterystycznych równania końcowego.

Na podstawie danych z lat 1999-2011 oszacowano parametry modelu charakteryzującego gospodarkę województwa śląskiego. Na bazie obliczonych prognoz na jeden okres naprzód oceniono wartość prognostyczną modelu. Do oceny dynamicznych własności modelu wykorzystano pierwiastki charakterystyczne równania końcowego.

Słowa kluczowe: model ekonometryczny, prognoza, błąd prognozy, równanie końcowe, pierwiastek charakterystyczny.

1. Ocena jakości modelu dla celów prognostycznych

Model charakteryzuje się wysoką adekwatnością prognostyczną, jeśli na podstawie zadanych wartości zmiennych objaśniających pozwala on dostatecznie dokładnie przewidywać przyszłe wartości zmiennych objaśnianych przez poszczególne równania modelu. Do oceny poziomu adekwatności prognostycznej wykorzystane zostaną mierniki dokładności prognoz *ex post*.

W analizie zgodności prognostycznej błąd prognozy będzie zdefiniowany jako:

$$B_t = y_{TP} - y_t,$$

gdzie:

y_{TP} – prognoza,

y_t – zrealizowana wartość zmiennej,
zaś średni względny błąd prognozy:

$$\hat{V} = \frac{y_{TP} - y_t}{y_t}.$$

Na podstawie danych zamieszczonych w *Biuletynach statystycznych województwa śląskiego* pochodzących z lat 1999-2011 oszacowano parametry modelu charakteryzującego gospodarkę województwa śląskiego:

- Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$NI_t = 0,660065 NI_{t-1} + 0,242242 WFN_t + 1895,54 \quad R_w^2 = 0,8252$$

(0,175498) (0,0910914) (1390,56)
- Równanie wyniku finansowego netto:

$$WFN_t = 0,887427 PCD_t - 0,885938 KUP_t - 1026,40 \quad R_w^2 = 0,9988$$

(0,016424) (0,01829)
- Równanie przychodów z działalności przedsiębiorstw:

$$PCD_t = 0,192295 PCD_{t-1} + 1,11464 PSP_t + 13671,3 \quad R_w^2 = 0,9935$$

(0,09684) (0,1131) (6041,48)
- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$KUP_t = 1,2625 PSP_t + 125,683 PZ_t - 71405,5 \quad R_w^2 = 0,9923$$

(0,03813) (20,5737) (18566,6)
- Równanie produkcji sprzedanej przemysłu:

$$PSP_t = 1,05364 PSP_{t-1} + 4257,05 \quad R_w^2 = 0,9338$$

(0,08867) (11102,6)
- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$PWB_t = 0,740356 PWB_{t-1} + 0,0042887 PSP_t + 317,847 \quad R_w^2 = 0,9917$$

(0,12306) (0,001766) (129,157)

gdzie:

PZ_t – przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw ogółem w tys. osób,

PWB_t – przeciętne wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw ogółem w zł,

PSP_t – produkcja sprzedana przemysłu ogółem w mln zł,

PCD_t – przychody z całokształtu działalności przedsiębiorstw ogółem w mln zł,

KUP_t – koszty uzyskania przychodów w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł,

WFN_t – wynik finansowy netto ogółem w sektorze przedsiębiorstw w mln zł,

NI_t – nakłady inwestycyjne w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł.

Otrzymane wyniki świadczą o dobrym dopasowaniu, współczynnik determinacji przekracza poziom 0,99 z wyjątkiem równania nakładów inwestycyjnych. Oznacza to, że 99% zmienności zmiennej endogenicznej jest wyjaśniane przez dane równanie modelu, a tylko 1% zmienności zależy od innych czynników, które nie zostały uwzględnione w modelu.

Oszacowany model jest modelem rekurencyjnym oraz dynamicznym. Zgodnie z procedurą prognozowania tej klasy modelu wyznaczono prognozy na okres $T = t + 1$ (rok 2012), które zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Prognozy, realizacje oraz błędy prognoz obliczone na podstawie modelu gospodarki województwa śląskiego

Zmienna	Prognoza	Realizacja	Błąd prognozy	Względny błąd prognozy
PSP	215783,8	192924,9	22858,9	0,1185
PWB	4128,6	4073,2	55,4	0,0136
KUP	294793,7	276536,9	18256,8	0,066
PCD	309788,6	287662,9	22125,7	0,0769
WFN	12719,4	9535,1	3184,3	0,3339

Z danych zamieszczonych w tabeli 1 wynika, że we wszystkich przypadkach z wyjątkiem nakładów inwestycyjnych prognozy były zawyżone. Relatywnie najgorsza sytuacja wystąpiła w przypadku wyniku finansowego netto, gdzie zaistniało przeszacowanie o 33,39%. Nioszacowanie na poziomie 1,8% wystąpiło w przypadku nakładów inwestycyjnych.

Należy także zauważyć, że oszacowany model charakteryzował się wysoką zgodnością przekraczającą poziom 0,90 ($R_w^2 > 0,9$).

Na duży błąd prognozy dotyczący wyniku finansowego miała niewątpliwie wpływ ogólna sytuacja gospodarcza (recesja).

Wyniki estymacji modelu na podstawie danych pochodzących z lat 1999-2012 (reestymacja modelu):

– Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$NI_t = 0,704198 NI_{t-1} + 0,237905 WFN_t + 1606,71 \quad R_w^2 = 0,8476$$

(0,15643) (0,0881024) (1275,21)

– Równanie wyniku finansowego netto:

$$WFN_t = 0,881658 PCD_t - 0,878963 KUP_t - 1191,55 \quad R_w^2 = 0,9987$$

(0,0152134) (0,0167049) (282,530)

– Równanie przychodów z działalności przedsiębiorstw:

$$PCD_t = 0,219796 PCD_{t-1} + 1,09023 PSP_t + 12018,5 \quad R_w^2 = 0,9946$$

(0,0769617) (0,098319) (4881,04)

- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$KUP_t = 1,29788 \text{ PSP}_t + 134,377 \text{ PZ}_t - 81759,9$$

$$(0,03919) \quad (23,0797) \quad (20500,8) \quad R_w^2 = 0,9913$$
- Równanie produkcji sprzedanej przemysłu:

$$PSP_t = 0,973590 \text{ PSP}_{t-1} + 12602,8$$

$$(0,072756) \quad (9434,23) \quad R_w^2 = 0,9288$$
- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$PWB_t = 0,771614 \text{ PWB}_{t-1} + 0,003943 \text{ PSP}_t + 317,847$$

$$(0,12306) \quad (0,001766) \quad (104,402) \quad R_w^2 = 0,9935$$

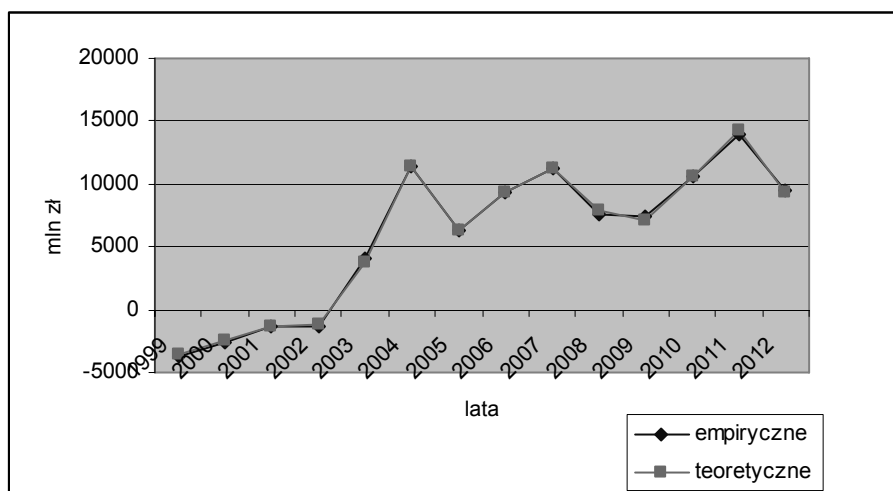
W tabeli 2 zamieszczono prognozy obliczone na rok 2013 przy założeniu, że przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw będzie takie, jak w roku 2012.

Tabela 2. Prognozy, realizacje oraz błędy prognoz obliczone na podstawie reestymowanego modelu gospodarki województwa śląskiego

Zmienna	Prognoza	Realizacja w roku 2012	Prognozowany przyrost	Względny prognozowany przyrost
PSP	200432,55	192924,9	7507,65	0,0389
PWB	4251,11	4073,2	177,91	0,0437
KUP	277749,29	276536,9	1212,39	0,0044
PCD	293763,23	287662,9	6100,33	0,0212
WFN	13675,80	9535,1	4140,7	0,4342

Na uwagę zasługuje równanie wyniku finansowego. Równanie to wykazuje największą zgodność mierzoną współczynnikiem determinacji $R_w^2 = 0,998$ w obu przypadkach, natomiast prognoza obliczona na podstawie tego równania charakteryzuje się największym błędem prognozy *ex post* rzędu 33%, a względny prognozowany przyrost przekracza 43%. Czy jest to symptom reakcji sektora przedsiębiorstw na kryzys gospodarczy?

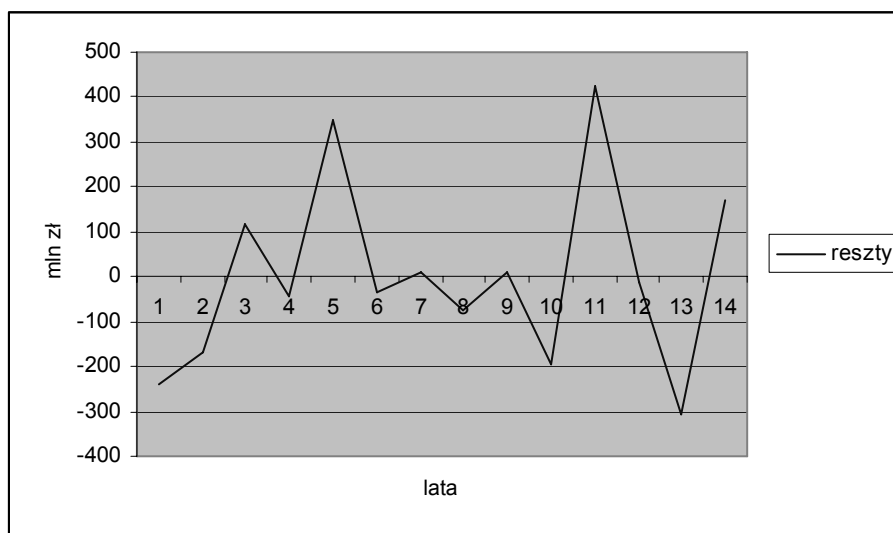
Wykres wartości zaobserwowanych oraz teoretycznych dla zmiennej WFN_t przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Zaobserwowane oraz teoretyczne wartości zmiennej WFN

Wykres potwierdza wysoką zgodność modelu. Przeanalizujemy reszty równania modelu:

Wykres reszt równania zmiennej WFN_t przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Wykres reszt równania wyniku finansowego netto

Z wykresu reszt wynika, że w ostatnim okresie 2009-2012 nastąpiły gwałtowne zmiany reszt (zarówno dodatnie, jak i ujemne).

2. Równanie końcowe modelu narzędziem analizy dynamicznych własności modelu

Dla modelu, w którym występuje G zmiennych endogenicznych ($G > 1$), można rozpatrywać zbiór G równań końcowych dotyczących poszczególnych zmiennych endogenicznych modelu.

Jeżeli w G -równaniowym modelu ekonometrycznym zmienne endogeniczne mają opóźnienia najwyżej jednookresowe, to równanie końcowe modelu ze względu na wybraną zmienną endogeniczną ma postać:

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_G y_{t-G} = L(X_1, X_2, \dots, X_k), \quad (1)$$

gdzie: $L(X_1, X_2, \dots, X_k)$ jest liniową funkcją zmiennych egzogenicznych modelu.

Równanie (1) jest równaniem różnicowym niejednorodnym, stopnia co najwyżej G , o stałych parametrach.

Przedstawienie zależności y_t od t w jawnej postaci pewnej funkcji $y = F(t)$ otrzymuje się jako sumę ogólnego rozwiązania równania jednorodnego i szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego. Równanie jednorodne ma postać¹:

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_G y_{t-G} = 0 \quad (2)$$

i jego rozwiązanie ogólne zależy od G warunków początkowych oraz od pierwiastków równania charakterystycznego:

$$\lambda^G + \alpha_1 \lambda^{G-1} + \dots + \alpha_G = 0. \quad (3)$$

Ponieważ rozwiązanie ogólne równania jednorodnego wyraża mechanizm ruchów własnych układu, dlatego analiza równania jednorodnego (2) i wynikającego z niego równania charakterystycznego informuje o charakterze wahań własnych, a przede wszystkim o trendzie i ewentualnych wahaniamiach periodycznych.

W przypadku rzeczywistych i pojedynczych pierwiastków równania charakterystycznego rozwiązanie ogólne równania jednorodnego można zapisać w postaci:

$$y_t = \sum_{j=1}^G A_j \lambda_j^t, \quad (4)$$

gdzie:

λ_j jest j -tym pierwiastkiem charakterystycznym,

A_j jest j -tym warunkiem początkowym.

¹ Równanie jednorodne uzyskuje się przez przekształcenie mające na celu wyeliminowanie wszystkich zmiennych endogenicznych nieopóźnionych, jak i opóźnionych z danego równania. W równaniu tym występuje tylko analizowana zmienna endogeniczna i jej kolejne opóźnienia.

W takiej sytuacji ruch własny układu nie zawiera wahań okresowych, a w przypadku, gdy $|\lambda_j| < 1$, krzywa ruchu jest krzywą malejącą asymptotycznie do osi $y = 0$ (gdy $t \rightarrow \infty$).

Jeżeli natomiast rozwiązaniem równania (3) jest r pierwiastków rzeczywistych i $2s$ pierwiastków zespolonych ($\lambda_j = a_j \pm i b_j$), to rozwiązanie można zapisać [Pawłowski, 1981, s. 42]:

$$y_t = \sum_{j=1}^r A_j \lambda_j^t + \sum_{j=r+1}^{r+s} A_j \rho_j^t \cos\left(\frac{2\pi t}{\Theta_j} + \delta_j\right), \quad (5)$$

gdzie:

$\Theta = \text{arc tg } \frac{b_j}{a_j}$ – określa długość okresu wahań periodycznych,

$\rho_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ – określa zmiany amplitudy wahań w porównaniu z amplitudą początkową,

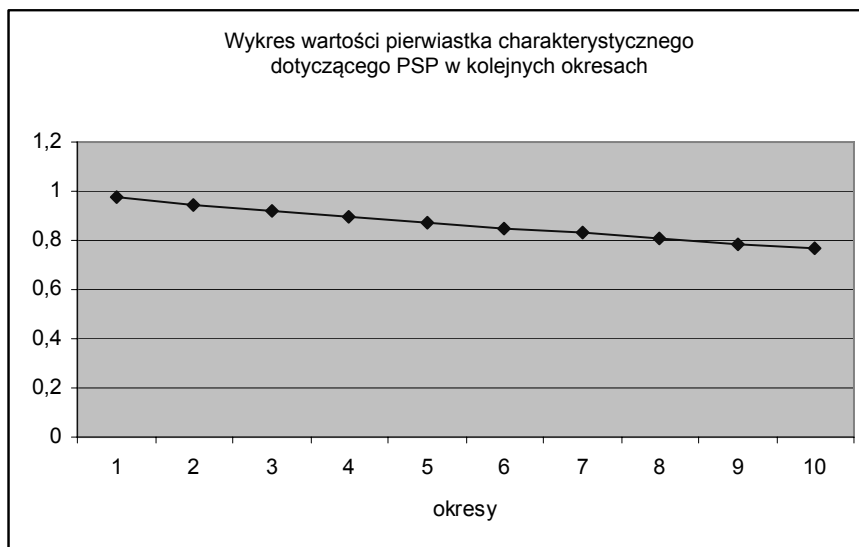
δ_j – jest wyznaczone z warunków początkowych określających, dla jakiej wartości t j -ty składnik periodyczny ma wartość maksymalną.

Na podstawie wyników estymacji postaci strukturalnej modelu ekonometrycznego wyznaczono równania jednorodne, odpowiadające tym równaniom równania charakterystyczne oraz obliczono pierwiastki charakterystyczne.

– Równanie jednorodne dla zmiennej PSP_t ma postać:

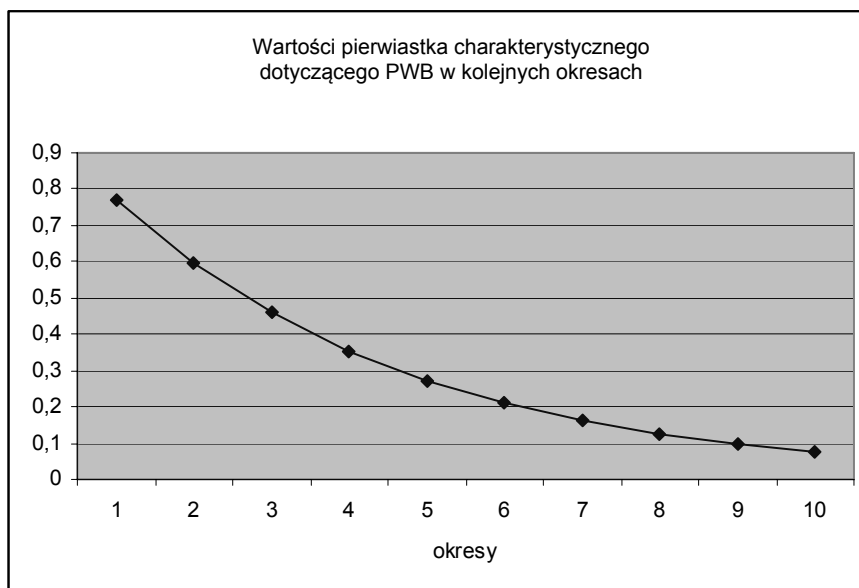
$$PSP_t - 0,97359 PSP_{t-1} = 0, \text{ równanie charakterystyczne: } \lambda - 0,97359 = 0.$$

Pierwiastek charakterystyczny jest więc równy: $\lambda = 0,973590$.



Rys. 3. Wykres wartości λ^1 dla PSP_t w kolejnych okresach

- Równanie jednorodne dla zmiennej PWB_t ma postać:
 $PWB_t - (0,771614 + 0,973590) PWB_{t-1} - 0,973590 (-0,771614) PWB_{t-2} = 0$;
 Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 1,745204 \lambda + 0,751235674 = 0$;
 Pierwiastki charakterystyczne są równe: $\lambda_1 = 0,771614$ oraz $\lambda_2 = 0,97359$.



Rys. 4. Wykres wartości λ^1 dla PWB_t w kolejnych okresach

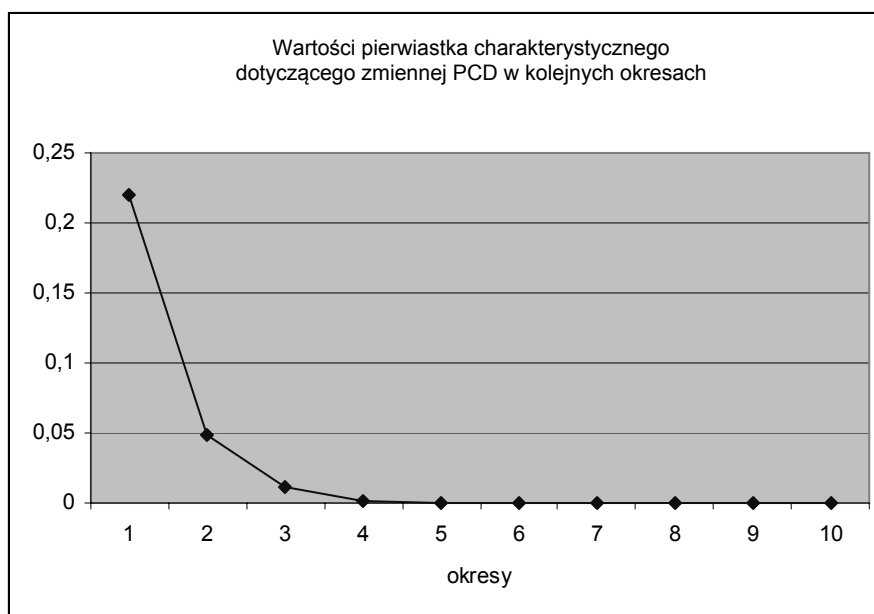
Obliczone pierwiastki charakterystyczne równania jednorodnego dotyczącego PWB_t świadczą, że na dynamikę kształtowania się wynagrodzeń ma wpływ wewnętrzna dynamika wynagrodzeń oraz wewnętrzna dynamika produkcji sprzedanej przemysłu.

– Równanie jednorodne dla zmiennej PCD_t ma postać:

$$PCD_t - (0,219796 + 0,973590) PCD_{t-1} - 0,973590 (-0,219796) PCD_{t-2} = 0;$$

$$\text{Równanie charakterystyczne: } \lambda^2 - 1,193386 \lambda + 0,213991187 = 0;$$

Pierwiastki charakterystyczne są równe: $\lambda_1 = 0,219796$ oraz $\lambda_2 = 0,97359$.



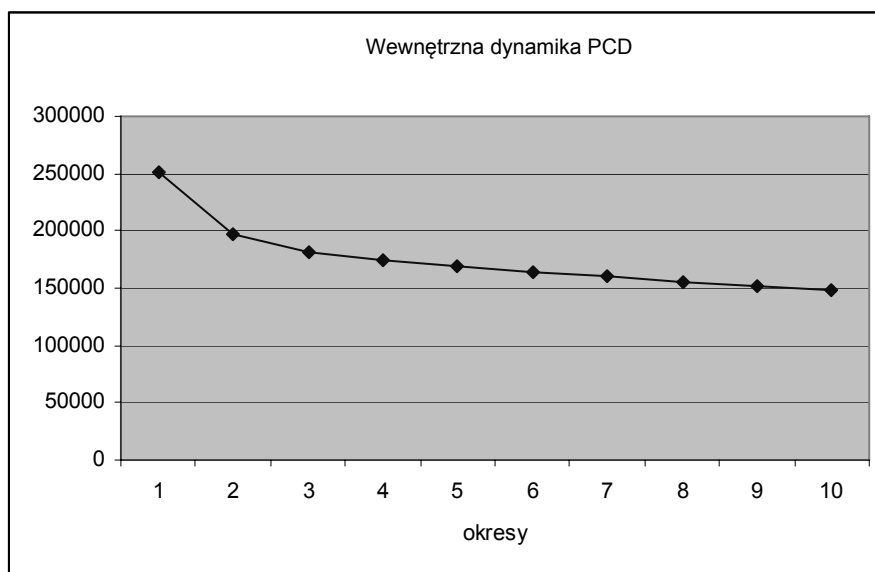
Rys. 5. Wykres wartości λ^t dla PCD_t w kolejnych okresach

Obliczone pierwiastki charakterystyczne równania jednorodnego dotyczącego PCD_t świadczą, że dynamika kształtowania się przychodów działalności przedsiębiorstw zależy od wewnętrznej dynamiki przychodów z całokształtu działalności oraz od wewnętrznej dynamiki produkcji sprzedanej przemysłu.

W równaniu zmiennej $PCD_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$ jako warunki początkowe przyjęto:

A_1 – wartość przychodów całokształtu działalności w roku 2012, tj. 287 662,9 mln zł
oraz

A_2 – wartość produkcji sprzedanej przemysłu w roku 2012, tj. 192 924,9 mln zł.



Rys. 6. Wewnętrzna dynamika zmiennej $PCD_t = A_1 \lambda_1^t + A_2 \lambda_2^t$

– Równanie jednorodne dla zmiennej KUP_t ma postać:

$$KUP_t - 0,97359 KUP_{t-1} = 0;$$

$$\text{Równanie charakterystyczne: } \lambda - 0,97359 = 0;$$

Pierwiastek charakterystyczny jest więc równy: $\lambda = 0,97359$.

W równaniu kosztów uzyskania przychodów nie występuje opóźniona zmienna endogeniczna, więc wewnętrzna dynamika kształtowania się tej zmiennej zależy od wewnętrznej dynamiki produkcji sprzedanej przemysłu, stąd obliczony pierwiastek charakterystyczny dla zmiennej KUP_t jest taki sam, jak pierwiastek charakterystyczny dla zmiennej PSP_t .

W równaniu wyniku finansowego netto nie występuje opóźniona zmienna endogeniczna, więc wewnętrzna dynamika kształtowania się tej zmiennej zależy od wewnętrznej dynamiki PCD_t oraz KUP_t .

Zbudowany i oszacowany model gospodarki w pełni nadaje się do prognozowania oraz badania zmian dynamiki gospodarki województwa śląskiego.

Podsumowanie

Oszacowany model charakteryzujący powiązania między zmiennymi charakteryzującymi gospodarkę województwa śląskiego cechuje wysoka zgodność.

Prognozy na jeden okres naprzód wyznaczone na podstawie modelu charakteryzują się małymi błędami (w zasadzie nieprzekraczającymi 5%), z wyjątkiem prognozy dotyczącej wyniku finansowego netto. Błąd prognozy dotyczący wyniku finansowego netto wynosi 33%, prognoza przekracza realizację zmiennej. Pojawia się pytanie, czy gwałtowny spadek wyniku finansowego netto przedsiębiorstw jest efektem sytuacji kryzysowej? Z przeprowadzonych analiz opartych na danych kwartalnych wynika, że jest to reakcja zachowawcza sektora przedsiębiorstw przed niepewnością dotyczącą recesji gospodarczej².

Z analizy równania końcowego wynika, że wszystkie pierwiastki charakterystyczne równań jednorodnych $|\lambda_j| < 1$. W takiej sytuacji krzywa ruchu jest krzywą malejącą asymptotycznie do osi $y = 0$ (gdy $t \rightarrow \infty$). Dynamika wewnętrzna jest spadkowa, więc by nastąpił wzrost, niezbędne są zasilania zewnętrzne, które w modelu reprezentują zmienne egzogeniczne.

Literatura

Biolik J. (2008), *Dynamiczne własności modelu gospodarki województwa śląskiego na podstawie równania końcowego* [w:] A. Bajdak, W. Czakon (red.), *Zarządzanie – współczesne problemy badawcze*, AE w Katowicach, Katowice.

Biolik J. (2013), *Problemy modelowania zjawisk gospodarczych* [w:] *Zjawiska społeczne w badaniach statystycznych. Księga jubileuszowa dedykowana Profesor Barbarze Podolec*, UE w Krakowie, Kraków.

Biuletyny statystyczne województwa śląskiego, <http://www.stat.gov.pl>.

Pawłowski Z. (1981), *Elementy ekonometrii*, PWN, Warszawa.

² Zob. Biolik [2008]. Na podstawie analizy danych kwartalnych dotyczących wyniku finansowego można zauważyć, że w czwartych kwartałach wykazywany wynik finansowy jest zdecydowanie niższy niż w pozostałych kwartałach, a koszty uzyskania przychodów w tym kwartale – zdecydowanie wyższe.

**EVALUATION OF USE OF THE ECONOMETRIC MODEL
FOR THE RESEARCH ON CHANGES IN THE DYNAMICS
OF THE SILESIA VOIVODSHIP'S ECONOMY**

Summary: The purpose of the article is a prognostic verification of Silesian voivodship's economy model and the evaluation of dynamic properties of economy on the basis of characteristic roots of final equation.

The parameters of a model characterizing the economy of the Silesian voivodship were estimated on the basis of the data from the period of 1999-2011. The prognostic value of the model was estimated on the basis of prognoses calculated for one period. The evaluation of dynamic properties of the model was based on the characteristic roots of final equation.

Keywords: econometric model, forecast, the forecast error, the final equation, characteristic root.