

**Józef Biolik**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# **ANALIZA PORÓWNAWCZA WYBRANYCH PROCEDUR MODELOWANIA EKONOMETRYCZNEGO DLA MODELU GOSPODARKI WOJEWÓDZTWA ŚLĄSKIEGO**

## **Wprowadzenie**

Jednym z narzędzi analizy i oceny procesów gospodarczych jest model ekonometryczny badanego procesu bądź podmiotu gospodarczego. Proces modelowania oraz struktura modelu zależą od celu jakiemu ma on służyć. Konstruując model ekonometryczny, ekonometryk może wybrać jedną z trzech możliwości:

- model klasyczny, przyczynowo-opisowy,
- model wektorowo-autoregresyjny,
- dynamiczny model zgodny.

W artykule podjęto próbę wykorzystania i oceny wyżej wymienionych typów modeli do modelowania wybranych zmiennych charakteryzujących gospodarkę województwa śląskiego.

Do oceny jakości modeli z reguły stosuje się:

- ocenę adekwatności replikatywnej,
- kryterium informacyjne Akaike'a oraz Schwarz,
- ocenę adekwatności prognostycznej,
- ocenę adekwatności strukturalnej.

Model cechuje się wysoką adekwatnością replikatywną, jeśli w ramach próby pozwala z dużą dokładnością odtworzyć zaobserwowane wartości zmiennych endogenicznych. Klasycznym przykładem miary adekwatności replikatywnej jest współczynnik determinacji  $R^2$ . Należy jednakże zauważyć, że wysoki stopień adekwatności replikatywnej nie gwarantuje ani dobrych prognoz, ani adekwatności strukturalnej.

Model ma wysoką adekwatność prognostyczną, jeśli na podstawie zadanych wartości zmiennych objaśniających pozwala dostatecznie dokładnie przewidywać przyszłe wartości zmiennych objaśnianych przez poszczególne równania modelu. Do oceny poziomu adekwatności prognostycznej można wykorzystać mierniki dokładności prognoz *ex ante* oraz *ex post*.

Model adekwatny strukturalnie powinien nie tylko dawać wystarczająco dokładne prognozy, ale przede wszystkim dobrze odtwarzać rzeczywisty mechanizm tworzenia tych wartości. W trakcie analiz pojawiła się idea, by w klasie modeli o „dopuszczalnej” adekwatności strukturalnej i w związku z tym dobrych własnościach prognostycznych, poszukiwać modeli o stabilnych parametrach (niezmieniających się w obszarze obserwacji bez względu na dobór obserwacji w ramach dostępnej próby).

Wstępnym wymaganiem adekwatności strukturalnej mogą być prognozy, obciążone małym błędem.

Wrażliwość modelu ekonometrycznego ujawnia się m.in. w jego reakcji na zmiany wartości zmiennych objaśniających poza obszarem próby statystycznej, na podstawie której został oszacowany. Pożądaną w tym sensie cechą modelu jest, aby prognozy obliczone na jego podstawie były trafne. Oznacza to wymóg, aby model cechował się wysokim stopniem adekwatności prognostycznej.

Dynamiczny rozwój ekonometrii w latach 50. i 60. ubiegłego wieku koncentrował się na formułowaniu strukturalnych modeli wielorównaniowych, opierających się na wiedzy ekonomicznej. Wstępna struktura powiązań poszczególnych zmiennych na etapie specyfikacji kolejnych równań wynikała z istniejącej teorii ekonomicznej. Pojawienie się coraz szybszych maszyn cyfrowych przyczyniało się do wzrostu liczby oraz wielkości szacowanych modeli. Wraz ze wzrostem możliwości wykorzystania metod ekonometrycznych, związanych z likwidacją barier obliczeniowych, zaczęły pojawiać się pewne ułomności stosowanych podejść, związane ze zbyt rozbudowaną strukturą modelu, oraz niezadowalające możliwości predykcyjne dużych modeli strukturalnych dotyczących wielkości makroekonomicznych. Krytyka wielorównaniowego modelowania strukturalnego odnosiła się do założeń warunków początkowych (związanych z problemem identyfikacji równań ekonometrycznych), a także podziału zmiennych na endogeniczne i egzogeniczne. W przypadku wielkości ekonomicznych trudno jest wyodrębnić zmienną egzogeniczną, na którą nie oddziałuje żadna inna zmienna. W tych warunkach w 1980 r. Christopher Sims zaproponował podstawy nowej metodologii modelowania wielorównaniowego: model wektorowo-autoregresyjny (VAR). Nowe zasady modelowania ekonometrycznego postulowane przez Simsa zakładają brak podziału a priori na zmienne endoge-

niczne i egzogeniczne, brak teorii ekonomicznej, na której jest oparty model oraz brak warunków początkowych. Modele VAR stanowią pomost pomiędzy tradycyjną ekonometrią a modelami szeregów czasowych, bowiem są modelami wielorównaniowymi, których rozwinięcia mogą być zgodne z teorią ekonomiczną. W modelach VAR badanie stacjonarności zmiennych staje się podstawowym etapem budowy modelu, szczególnie wtedy, gdy staje się narzędziem badania kointegracji zmiennych. Na świecie modele VAR zdobywają sobie coraz bardziej ugruntowaną pozycję wśród metod ekonometrycznych, o czym świadczą różnorodne obszary ich zastosowań.

Autorem koncepcji dynamicznego modelowania zgodnego jest Zygmunt Zieliński.

„Modelem zgodnym nazywa się taki model, w którym proces endogeniczny  $Y_t$  jest wyjaśniany przez procesy egzogeniczne wraz z ich całą strukturą dynamiczną, przy czym proces resztowy pozostaje białym szumem” [Osińska, red., 2007, s. 325]. Przez wewnętrzną strukturę dynamiczną rozumie się zarówno składowe stacjonarne, jak i niestacjonarne występujące z różnym nasileniem w każdym z analizowanych procesów, natomiast przez zgodność modelu rozumie się zgodność harmonicznej struktury procesu objaśnianego z łączną harmoniczną strukturą procesów objaśniających oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających.

Specyfikacja dynamicznego liniowego modelu zgodnego dla procesów niestacjonarnych obejmuje badanie wewnętrznej struktury analizowanych procesów poprzez wyodrębnienie trendu (ustalenie stopnia wielomianu trendu), ewentualnych wahań sezonowych oraz ustalenie rzędu autoregresji (ustalenie rzędów opóźnień poszczególnych procesów).

Ustalenie rzędu autoregresji dotyczy szeregów pozbawionych trendu i ewentualnych wahań sezonowych (jeżeli takie występują). Badanie rzędu autoregresji można wykonać na podstawie funkcji autokorelacji oraz funkcji autokorelacji cząstkowej.

## **1. Model powiązań między zmiennymi charakteryzującymi gospodarkę województwa śląskiego**

W celu przeprowadzenia analizy powiązań między zmiennymi charakteryzującymi gospodarkę województwa śląskiego oraz wpływu przeciętnego zatrudnienia na gospodarkę z wykorzystaniem analizy mnożnikowej, zbudowano klasyczny model ekonometryczny. Do estymacji i analizy wykorzystano dane roczne dotyczące zmiennych charakteryzujących wybrane aspekty gospodarki województwa

śląskiego, pochodzące z lat: 1999-2011, których wartości są zamieszczane w Biuletynach Statystycznych Województwa Śląskiego. Nadano im oznaczenia:

PZ<sub>t</sub> – przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw ogółem w tys. osób,

PWB<sub>t</sub> – przeciętne wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw ogółem w zł,

PSP<sub>t</sub> – produkcja sprzedana przemysłu ogółem w mln zł,

PCD<sub>t</sub> – przychody z całokształtu działalności przedsiębiorstw ogółem w mln zł,

KUP<sub>t</sub> – koszty uzyskania przychodów w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł,

WFn<sub>t</sub> – wynik finansowy netto ogółem w sektorze przedsiębiorstw w mln zł,

NI<sub>t</sub> – nakłady inwestycyjne w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł.

W etapie specyfikacji wprowadzono do modelu opóźnione zmienne endogeniczne, które poza inwestycjami, przychodami z całokształtu działalności oraz przeciętnymi wynagrodzeniami okazały się statystycznie nieistotne. Zostały więc z modelu usunięte.

Powiązania między zmiennymi wskazują, że przedstawiony model jest modelem rekurencyjnym. Wyniki estymacji poszczególnych równań modelu (pod ocenami parametrów są umieszczone średnie błędy szacunku) są następujące:

- Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$NI_t = 0,660065 NI_{t-1} + 0,242242 WFn_t + 1895,54 \quad R_w^2 = 0,8252$$

(0,175498)      (0,0910914)      (1390,56)

- Równanie wyniku finansowego netto:

$$WFn_t = 0,887427 PCD_t - 0,885938 KUP_t - 1026,40 \quad R_w^2 = 0,9988$$

(0,016424)      (0,01829)

- Równanie przychodów z działalności przedsiębiorstw:

$$PCD_t = 0,192295 PCD_{t-1} + 1,11464 PSP_t + 13671,3 \quad R_w^2 = 0,9935$$

(0,09684)      (0,1131)      (6041,48)

- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$KUP_t = 1,2625 PSP_t + 125,683 PZ_t - 71405,5 \quad R_w^2 = 0,9923$$

(0,03813)      (20,5737)      (18566,6)

- Równanie produkcji sprzedanej przemysłu:

$$PSP_t = 1,05364 PSP_{t-1} + 4257,05 \quad R_w^2 = 0,9338$$

(0,08867)      (11102,6)

- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$PWB_t = 0,740356 PWB_{t-1} + 0,0042887 PSP_t + 317,847 \quad R_w^2 = 0,9917$$

(0,12306)      (0,001766)      (129,157)

Otrzymane wyniki świadczą o dobrym dopasowaniu poszczególnych równań, przekraczającym poziom 0,99, z wyjątkiem równania nakładów inwestycyjnych.

Do zbadania dynamicznych własności gospodarki województwa śląskiego zastosowano analizę mnożnikową.

## 2. Analiza dynamicznych własności modelu z wykorzystaniem analizy mnożnikowej

Do wyznaczenia mnożników bezpośrednich, dynamicznych i całkowitych konieczna jest znajomość ocen parametrów postaci zredukowanej modelu. Model o postaci zredukowanej jest modelem prostym, a zmiennymi objaśniającymi są zmienne egzogeniczne oraz opóźnione zmienne endogeniczne.

Tak więc model o postaci zredukowanej można zapisać:

$$Y_t = \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_0 X_t + \eta_t, \quad (1)$$

gdzie:

$\Pi_1$  – jest macierzą parametrów przy zmiennych endogenicznych opóźnionych o jeden okres o wymiarach  $(G \times G)$ ,

$\Pi_0$  – jest macierzą parametrów przy zmiennych egzogenicznych o wymiarach  $(G \times K)$ .

Macierz  $\Pi_0$  zawiera elementy, które są miarami bezpośrednich efektów wpływu zmiennych egzogenicznych na zmienną endogeniczną (mnożniki bezpośrednie). Elementy macierzy  $\Pi_0$  obrazują natychmiastową reakcję zmiennych endogenicznych na zmiany zmiennych egzogenicznych.

Efekty dynamiczne można wyliczyć sekwencyjnie [Biolik, 2010]. Efekt pojawiający się po upływie jednego okresu otrzymujemy:  $\Pi_1 \Pi_0$ , natomiast efekt dynamiczny pojawiający się po upływie  $\tau$  okresów jest równy:  $\Pi_1^\tau \Pi_0$ . O całkowitym efekcie wszystkich zmian bieżących i opóźnionych zmiennych egzogenicznych na poziom zmiennych endogenicznych informuje macierz mnożników całkowitych o postaci:

$$H = (I + \Pi_1 + \Pi_1^2 + \dots + \Pi_1^\tau) \Pi_0. \quad (2)$$

### 2.1. Postać zredukowana modelu – wyniki estymacji

Struktura oraz zmienne objaśniające występujące w formie zredukowanej modelu są zdeterminowane postacią strukturalną modelu ekonometrycznego. Brak nieistotnych opóźnionych zmiennych objaśniających w postaci strukturalnej modelu skutkuje strukturą formy zredukowanej.

Wyniki estymacji postaci zredukowanej:

$$NI_t = 0,6736 NI_{t-1} - 0,29898 PCD_{t-1} + 0,42054 PSP_{t-1} + 29,3369 PZ_t - 14467,9$$

$$WFN_t = 0,6785 PCD_{t-1} - 0,0022 PSP_{t-1} - 64,8822 PZ_t + 42117,0$$

$$PCD_t = 0,1698 PCD_{t-1} + 1,1949 PSP_{t-1} + 20038,5$$

$$KUP_t = 1,31189 PSP_{t-1} + 62,5263 PZ_t - 17252,7$$

$$PSP_t = 1,05364 PSP_{t-1} + 4257,05$$

$$PWB_t = 0,0041 PSP_{t-1} + 0,7729 PWB_{t-1} + 295,414$$

Macierze ocen parametrów przy opóźnionych zmiennych endogenicznych  $\Pi_1$  oraz zmiennych egzogenicznych  $\Pi_0$  mają postać:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0,6736 & 0 & -0,2990 & 0 & 0,42054 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6785 & 0 & -0,0022 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1698 & 0 & 1,19490 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,31189 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0041 & 0,7729 \end{bmatrix} \quad \Pi_0 = \begin{bmatrix} 29,3367 & -14467,90 \\ -64,8822 & 42117,0 \\ 0 & 20038,50 \\ 62,5263 & -17252,7 \\ 0 & 4257,05 \\ 0 & 295,41 \end{bmatrix}$$

Macierz  $\Pi_0$  jest macierzą mnożników bezpośrednich. Kolumny złożone z zer w macierzy  $\Pi_1$  są konsekwencją niewystępowania opóźnionych zmiennych endogenicznych w postaci strukturalnej modelu i w konsekwencji w postaci zredukowanej.

Na tej podstawie można obliczyć mnożniki dynamiczne po 1, 2 oraz  $\tau$  okresów.

$$\Pi_1 \Pi_0 = \begin{bmatrix} 19,7612 & -13947,00 \\ 0 & 13586,76 \\ 0 & 8489,28 \\ 0 & 5584,78 \\ 0 & 4485,23 \\ 0 & 245,78 \end{bmatrix} \quad \Pi_1^2 \Pi_0 = \begin{bmatrix} 13,3111 & -10047,00 \\ 0 & 5750,11 \\ 0 & 6800,88 \\ 0 & 5584,13 \\ 0 & 4725,64 \\ 0 & 208,35 \end{bmatrix}$$

Macierz mnożników dynamicznych po 10 okresach czasu jest równa:

$$\Pi_1^{10} \Pi_0 = \begin{bmatrix} 0,5642 & -137,89 \\ 0 & 6232,69 \\ 0 & 9701,61 \\ 0 & 8934,87 \\ 0 & 7175,73 \\ 0 & 122,55 \end{bmatrix}$$

Z macierzy mnożników bezpośrednich wynika, że wzrost przeciętnego zatrudnienia wpływa dodatnio na przyrost inwestycji, ujemnie wpływa na wynik finansowy, a także generuje wzrost kosztów uzyskania przychodów.

Struktura macierzy mnożników dynamicznych wskazywałaby, że wzrost przeciętnego zatrudnienia po upływie roku oraz kolejnych lat ma dodatni wpływ tylko na poziom inwestycji, natomiast nie ma wpływu na pozostałe zmienne objaśniane.

Malejące wartości mnożników dynamicznych wskazują na stabilność badanego układu gospodarczego.

Zbudowany i oszacowany model powiązań charakteryzuje się wysoką zgodnością. W równaniu wyniku finansowego oraz kosztów uzyskania przychodów opóźnione zmienne endogeniczne okazały się statystycznie nieistotne, więc zostały usunięte z modelu, tym samym zmienne te nie pojawiły się w postaci zredukowanej modelu potrzebnej do analizy mnożnikowej. Pojawia się więc pytanie czy w analizowanym przypadku usunięcie nieistotnych opóźnionych zmiennych endogenicznych w modelu powiązań nie spowodowało ograniczenia analizy mnożnikowej tylko do jednej zmiennej endogenicznej ( $NI_t$ ), gdyż wszystkie mnożniki dynamiczne dla pozostałych zmiennych przyjęły wartości zerowe.

Pozytywna odpowiedź na to pytanie prowadziłaby do stwierdzenia, że wysoka zgodność nie zawsze daje gwarancje poprawności zbudowanego modelu, a tym samym świadczyłoby to o ułomności zbudowanego modelu.

### 3. Dynamiczny model zgodny

Jak podano na wstępie, specyfikacja dynamicznego liniowego modelu zgodnego dla procesów niestacjonarnych obejmuje [Osińska, red., 2007]:

- badanie wewnętrznej struktury analizowanych procesów poprzez wyodrębnienie trendu (ustalenie stopnia wielomianu trendu) – [szerzej: Kufel, 2007], ewentualnych wahań sezonowych oraz ustalenie rzędu autoregresji (ustalenie rzędów opóźnień poszczególnych procesów). Ustalenie rzędu autoregresji dotyczy szeregów pozbawionych trendu i ewentualnych wahań sezonowych (jeżeli takie występują). Badanie rzędu autoregresji można wykonać na podstawie funkcji autokorelacji oraz funkcji autokorelacji cząstkowej [Haremza, Deadman, 1997],
- sformułowanie ogólnego modelu zawierającego maksymalny stopień wielomianu trendu, sezonowość oraz maksymalny rząd autoregresji dla każdego procesu,
- oszacowanie postaci pierwotnej modelu zgodnego, uwzględniającej wszystkie wyspecyfikowane składniki,
- weryfikacja modelu na podstawie badania istotności zmiennych oraz analizy reszt,
- interpretacja ocen parametrów strukturalnych oraz parametrów stochastycznej struktury modelu.

Tabela 1

Struktura wewnętrznych składników procesów w sektorze przedsiębiorstw ogółem

Zmienne	Stopień wielomianu zmiennej czasowej <sup>1</sup>	Rząd integracji <sup>2</sup>	Rząd autoregresji
PSP – produkcja sprzedana przemysłu ogółem	1	0	0
PCD – przychody z całokształtu działalności ogółem	1	0	0
KUP – koszty uzyskania przychodów ogółem	1	0	0
WFN – wynik finansowy netto ogółem	1	0	0
NI – nakłady inwestycyjne ogółem	1	0	0
PZ – przeciętne zatrudnienie ogółem	1	1	1
PWB – przeciętne wynagrodzenia brutto ogółem	1	0	1

Źródło: Obliczenia własne z wykorzystaniem programu Gretl.

Modelowanymi zmiennymi są:

PZ<sub>t</sub> – przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw ogółem w tys. osób,PWB<sub>t</sub> – przeciętne wynagrodzenia brutto w sektorze przedsiębiorstw ogółem w zł,PSP<sub>t</sub> – produkcja sprzedana przemysłu ogółem w mln zł,PCD<sub>t</sub> – przychody z całokształtu działalności przedsiębiorstw ogółem w mln zł,KUP<sub>t</sub> – koszty uzyskania przychodów w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł,WFN<sub>t</sub> – wynik finansowy netto ogółem w sektorze przedsiębiorstw w mln zł,NI<sub>t</sub> – nakłady inwestycyjne w sektorze przedsiębiorstw ogółem w mln zł.

Analiza zmiennych wykazała, że każda ze zmiennych zawiera istotny trend liniowy.

### 3.1. Wyniki estymacji dynamicznego modelu zgodnego

- Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$NI_t = 656,597 t - 0,005006 WFN_t + 4476,11$$

$$(283,776) \quad (0,183243) \quad (1297,12)$$

$$R^2 = 0,6922 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,63065 \quad D - W = 1,0237$$

- Równanie wyniku finansowego netto:

$$WFN_t = 132,126 t + 0,865375 PCD_t - 0,871501 KUP_t - 402,209$$

$$(57,1982) \quad (0,0167123) \quad (0,016505) \quad (387,268)$$

$$R^2 = 0,99925 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,99900 \quad D - W = 2,78856$$

- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$KUP_t = 722,777 t + 1,20504 PSP_t + 98,8941 PZ_t + 76,6051 PZ_{t-1} - 33,2712 PZ_{t-2} - 81145,9$$

$$(4758,83) \quad (0,37015) \quad (72,1469) \quad (94,1789) \quad (71,4198) \quad (45763,4)$$

$$R^2 = 0,992688 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,9854 \quad D - W = 1,766244$$

<sup>1</sup> Do wyboru stopnia wielomianu trendu użyto testu do porównania wariacji resztowych wykorzystując statystykę F.

<sup>2</sup> Zastosowano test Dickeya-Fullera oraz test KPSS.



- Równanie przychodów z całokształtu działalności:

$$\begin{aligned} \text{PCD}_t &= -4095,31 t + 1,65186 \text{PSP}_t + 9924,17 \\ &\quad (2717,08) \quad (0,25126) \quad (13651,3) \\ R^2 &= 0,986608 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,98393 \quad D - W = 1,010085 \end{aligned}$$

- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$\begin{aligned} \text{PWB}_t &= -16,9524 t + 0,0048757 \text{PSP}_t + 0,80466 \text{PWB}_{t-1} + 192,356 \\ &\quad (55,7775) \quad (0,002683) \quad (0,24822) \quad (434,782) \\ R^2 &= 0,99177 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,98868 \quad \text{Statystyka Durбина } h = 0,3269 \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu nieistotnych zmiennych model ma postać:

- Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$\begin{aligned} \text{NI}_t &= 649,808 t + 4495,42 \\ &\quad (130,658) \quad (1037,02) \\ R^2 &= 0,69219 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,6642 \quad D - W = 1,0205 \end{aligned}$$

- Równanie wyniku finansowego netto:

$$\begin{aligned} \text{WFN}_t &= 132,126 t + 0,865375 \text{PCD}_t - 0,871501 \text{KUP}_t - 402,209 \\ &\quad (57,1982) \quad (0,0167123) \quad (0,016505) \quad (387,268) \\ R^2 &= 0,99925 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,99900 \quad D - W = 2,78856 \end{aligned}$$

- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$\begin{aligned} \text{KUP}_t &= 1,2625 \text{PSP}_t + 125,683 \text{PZ}_t - 71405,5 \\ &\quad (0,0381334) \quad (20,5737) \quad (18566,6) \\ R^2 &= 0,9923 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,9907 \quad D - W = 2,2535 \end{aligned}$$

- Równanie przychodów z całokształtu działalności:

$$\begin{aligned} \text{PCD}_t &= 1,2799 \text{PSP}_t + 28209,1 \\ &\quad (0,0498) \quad (6612,15) \\ R^2 &= 0,9835 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,98207 \quad D - W = 0,6745 \end{aligned}$$

- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$\begin{aligned} \text{PWB}_t &= 0,00428873 \text{PSP}_t + 0,740356 \text{PWB}_{t-1} + 317,847 \\ &\quad (0,00176613) \quad (0,123063) \quad (129,157) \\ R^2 &= 0,9917 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,9898 \quad \text{Statystyka Durбина } h = 0,389169 \end{aligned}$$

Zbudowany model powiązań między zmiennymi charakteryzującymi gospodarkę województwa śląskiego według procedury dynamicznego modelu zgodnego charakteryzuje się także wysoką zgodnością. Najniższą zgodnością charakteryzuje się równanie nakładów inwestycyjnych ( $R^2$  nie przekracza wartości 0,70). Parametry liniowego trendu okazały się istotne tylko w dwóch równaniach: nakładów inwestycyjnych ( $\text{NI}_t$ ) oraz wyniku finansowego ( $\text{WFN}_t$ ).

#### 4. Model wektorowo-autoregresyjny (VAR)

Modele wektorowo-autoregresyjne są modelami wielorównaniowymi, w których każda zmienna jest wyjaśniana przez swoje opóźnienia oraz opóźnienia pozostałych zmiennych objaśnianych. Tak więc model VAR można zapisać jako:

$$y_t = A_0 D_t + \sum_{i=1}^p A_i y_{t-i} + \xi_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

gdzie:

$D_t$  – wektor deterministycznych składników równań, takich jak wyraz wolny, zmienna czasowa  $t$  (trend, wahania periodyczne),

$A_i$  – macierze parametrów przy opóźnionych zmiennych,

$y_t$  – wektor obserwacji na bieżących wartościach zmiennej objaśnianej,

$\xi_t$  – składnik losowy modelu.

Model postaci (3) można oszacować za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów, stosowanej do każdego równania osobno.

Procedura budowy modelu VAR obejmuje:

- wybór zmiennych do modelu,
- zbadanie stacjonarności zmiennych,
- wybór rzędu opóźnień,
- estymację parametrów modelu,
- weryfikację modelu (badanie autokorelacji oraz normalności rozkładu reszt modelu).

Wykorzystując wyniki analiz zmiennych przeprowadzone przy budowie dynamicznego modelu zgodnego, oszacowany model VAR ma postać (po usunięciu nieistotnych zmiennych objaśniających, z wykorzystaniem testu istotności t-Studenta):

- Równanie nakładów inwestycyjnych:

$$NI_t = 0,242242 WFN_t + 0,660065 NI_{t-1} + 1895,54$$

(0,0910914)      (0,175498)      (1390,56)

$$R^2 = 0,8252 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,786379 \quad \text{Statystyka Durбина } h = 0,5541$$

- Równanie wyniku finansowego:

$$WFN_t = 0,887427 PCD_t - 0,8859 KUP_t - 1026,40$$

(0,01642)      (0,01829)      (332,159)

$$R^2 = 0,9988 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,9986 \quad \text{Statystyka D - W} = 2,1536$$

- Równanie przychodów całokształtu działalności:

$$PCD_t = 0,498456 PCD_{t-1} + 1,25674 PSP_t - 0,542983 PSP_{t-1} + 4700,42$$

(0,18292)      (0,124815)      (0,286921)      (7129,89)

$$R^2 = 0,9955 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,9938 \quad \text{Statystyka Durбина } h = -1,0805$$

- Równanie kosztów uzyskania przychodów:

$$\begin{aligned}
 KUP_t = & 1,04632 PSP_t + 0,894838 PSP_{t-1} + 1,31138 PSP_{t-2} + 68,3548 PZ_t + \\
 & (0,05898) \quad (0,241616) \quad (0,242444) \quad (24,0193) \\
 + & 231,486 PZ_{t-1} + 97,2118 PZ_{t-2} - 0,327948 KUP_{t-1} - 1,13910 KUP_{t-2} - 254837,0 \\
 & (33,7986) \quad (27,6399) \quad (0,19961) \quad (0,188359) \quad (35130,4) \\
 R^2 = & 0,999777 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,99888 \quad \text{Statystyka Durбина } h = -1,296054
 \end{aligned}$$

- Równanie przeciętnych wynagrodzeń brutto:

$$\begin{aligned}
 PWB_t = & 0,00428873 PSP_t + 0,740356 PWB_{t-1} + 317,847 \\
 & (0,00176613) \quad (0,123063) \quad (129,157) \\
 R^2 = & 0,991677 \quad \text{Skorygowany } R^2 = 0,989828 \quad \text{Statystyka Durбина } h = 0,389169
 \end{aligned}$$

Model powiązań między zmiennymi zbudowany zgodnie z procedurą modelowania wektorowo-autoregresyjnego charakteryzuje się wysoką zgodnością: współczynniki determinacji oraz skorygowane współczynniki determinacji przekraczają wartość 0,99, z wyjątkiem równania nakładów inwestycyjnych, dla którego  $R^2 = 0,82$ ; skorygowany  $R^2 = 0,79$ . Równanie to, po wyeliminowaniu nieistotnych zmiennych, jest identyczne z równaniem nakładów inwestycyjnych modelu przyczynowo-opisowego.

## 5. Analiza porównawcza modeli: tradycyjnego, dynamicznego zgodnego oraz VAR

Do oceny porównawczej oszacowanych modeli wykorzystano współczynniki determinacji, skorygowane współczynniki determinacji oraz kryteria informacyjne Akaike'a i Schwarza.

Tabela 2

Wartości współczynników determinacji oraz skorygowanych współczynników determinacji dla równań poszczególnych typów modeli

Równania Zmienne	Model tradycyjny (przyczynowo-opisowy)		Dynamiczny model zgodny		Model VAR	
	$R^2$	Skorygowany $R^2$	$R^2$	Skorygowany $R^2$	$R^2$	Skorygowany $R^2$
$NI_t$	0,8252	<b>0,7864*</b>	0,6922	0,6642	0,8252	<b>0,7864</b>
$WFN_t$	0,9988	0,9986	0,9992	<b>0,9990</b>	0,9988	0,9986
$PCD_t$	0,9935	0,9921	0,9835	0,9821	0,9955	<b>0,9938</b>
$KUP_t$	0,9923	0,9907	0,9923	0,9907	0,9998	<b>0,9989</b>
$PWB_t$	0,9917	<b>0,9898</b>	0,9917	<b>0,9898</b>	0,9917	<b>0,9898</b>

\* Pogrubioną czcionką zaznaczono najwyższe wartości skorygowanego współczynnika determinacji.

Z zestawionych w tab. 2 informacji wynika, że nie ma dominacji jednej procedury modelowania. Analizowane procedury modelowania dają podobne wyniki. Może w przypadku dłuższych szeregów czasowych rozbieżności byłyby większe. Równanie nakładów inwestycyjnych najlepiej jest wyjaśnione przez model VAR i model przyczynowo-opisowy, natomiast równanie wyniku finansowego charakteryzuje się najwyższą zgodnością w przypadku modelu zgodnego.

W tab. 3 zestawiono wartości kryteriów informacyjnych Akaike'a i Schwarzera dla równań zbudowanych według procedury klasycznej, modelu zgodnego oraz modelu VAR.

Tabela 3

Charakterystyka równań poszczególnych typów modeli z wykorzystaniem kryteriów informacyjnych Akaike'a i Schwarzera

Równania Zmienne	Model tradycyjny		Dynamiczny model zgodny		Model VAR	
	Kryt. bayes. Schwarzera	Kryt. inform. Akaike'a	Kryt. bayes. Schwarzera	Kryt. inform. Akaike'a	Kryt. bayes. Schwarzera	Kryt. inform. Akaike'a
$NI_t$	<b>212,7054*</b>	<b>211,2507</b>	234,1887	233,0588	<b>212,7054</b>	<b>211,2507</b>
$WFN_t$	182,3723	180,3290	<b>178,8851</b>	<b>176,6253</b>	182,3723	180,3290
$PCD_t$	241,6232	240,1685	271,0555	269,9256	<b>239,6686</b>	<b>237,0109</b>
$KUP_t$	260,9844	259,2896	260,9844	259,2896	<b>196,7048</b>	<b>193,1238</b>
$PWB_t$	<b>136,6906</b>	<b>135,2358</b>	<b>136,6906</b>	<b>135,2358</b>	<b>136,6906</b>	<b>135,2358</b>

\* Pogrubioną czcionką zaznaczono najniższe wartości kryterium informacyjnego dla danego równania.

Wskazania (preferencje) dla typów modeli (procedur) z tab. 3 pokrywają się ze wskazaniami w tab. 2.

## Podsumowanie

Z przeprowadzonej analizy porównawczej procedury modelowania wynika, że każda procedura daje podobne wyniki. Jakość replikatywna modeli jest podobna. Analizę porównawczą należałoby przeprowadzić na dłuższych szeregach czasowych, być może wtedy ujawniłyby się preferencje dla wybranych typów modeli.

## Literatura

Biolik J. (2010): Analiza dynamicznych własności modelu gospodarki województwa śląskiego z wykorzystaniem równania końcowego i analizy mnożnikowej. W: A.S. Barczak (red.): Gospodarka województwa śląskiego na drodze przemian. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Haremza W.W., Deadman D.F. (1997): Nowa ekonometria. PWE, Warszawa.

---

Osińska M., red. (2007): Ekonometria współczesna. „Dom Organizatora”, Toruń.

Kufel T. (2007): Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Biuletyny Statystyczne Województwa Śląskiego, wydania z lat 2000-2011.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF SELECTED ECONOMETRIC  
MODELING PROCEDURES FOR THE MODEL OF THE SILESIAN  
VOIVODESHIP ECONOMY**

**Summary**

Procedures and cause descriptive model, dynamic consistent model and vector autoregression model were used for modeling of selected variables characterizing the economy of the Upper Silesia. To assess the conformity of these three types of models the AIC, BIC, coefficient of determination and corrected coefficient of determination were used. Despite the use of different procedures, final results show similar quality of models.