

Tadeusz Czernik

Daniel Iskra

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Katedra Matematyki Stosowanej

tadeusz.czernik@ue.katowice.pl
daniel.iskra@ue.katowice.pl

ANALIZA PORÓWNAWCZA ŚREDNIEGO ODSETKA CZASU PRZEBYWANIA W PIERWSZEJ I DRUGIEJ POŁOWIE DNIA – BADANIA EMPIRYCZNE

Wprowadzenie

Czas przebywania (*occupation time*) [1, 2, 3, 4, 5] jest wielkością opisującą jak długo badany proces X_t (cen, stóp zwrotu) przebywa w wybranym obszarze A_t w ustalonym horyzoncie czasu. Jest miarą łatwą w interpretacji i jednocześnie trudną w implementacji. W literaturze poświęconej zagadnieniom ekonomicznym czas przebywania zazwyczaj pojawia się w kontekście wyceny (egzotycznych) instrumentów pochodnych [2, 6], natomiast sporadycznie jest wykorzystywany w innych obszarach ekonomii, np. w analizie portfelowej. Konkludując, pole badań nad wielkością, jaką jest czas przebywania w kontekście nauk ekonomicznych, jest wciąż szerokie i mało eksplorowane.

W artykule została zaprezentowana analiza zmian procesu cen akcji w ciągu dnia oparta na czasie przebywania. Analiza będzie dotyczyć średniego odsetka czasu przebywania w wybranych obszarach, wyznaczanego na podstawie minutowych cen akcji z pierwszej i drugiej połowy dnia. Innymi słowy, każdy dzień sesyjny zostanie podzielony na dwie równe części, po czym zliczano odsetek czasu przebywania cen akcji w ustalonym obszarze oddzielnie dla części pierwszej i drugiej. Następnie wyznaczano średnią wartość odsetka czasu przebywania, biorąc pod uwagę wszystkie obliczone odsetki z pierwszej połowy badanych dni. Analogicznie postępowano w przypadku drugiej połowy badanych dni. Autorzy wykażą, że badane średnie różnią się od siebie istotnie.

1. Czas przebywania procesu w wybranym obszarze

Jak zaznaczano we wprowadzeniu, czas przebywania jest miarą prostą w interpretacji, niemniej jednak jej analityczne wyznaczanie może nastręczać trudności. Czas przebywania (*occupation time*) $OT_t(A)$ procesu X_t w ustalonym obszarze A_t jest zdefiniowany następująco [2, 3, 4, 5]:

$$OT_t(A) = \int_0^t 1_{A_s}(X_s) ds, \quad (1)$$

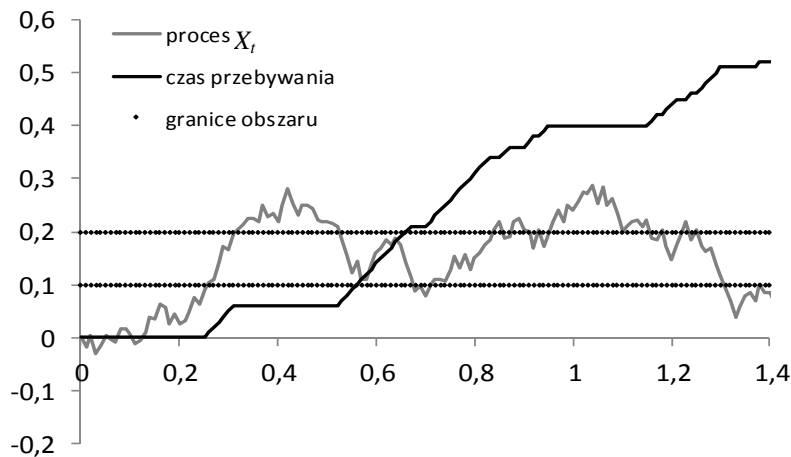
gdzie:

$$1_{A_t}(X_t) = \begin{cases} 1 & X_t \in A_t \\ 0 & X_t \notin A_t \end{cases} \text{ – funkcja charakterystyczna zbioru (indykator),}$$

A_t – obszar, dla którego wyznaczamy czas przebywania procesu X_t .

Autorzy przyjęli, iż w przypadku notacji czasu przebywania $OT_t(A)$ (względnego czasu przebywania $ROT_t(A)$) będzie pomijany indeks czasu przy symbolu oznaczającym obszar A_t , gdyż wielkości te zależą od kształtu obszaru A_t w każdym momencie czasu s mniejszym od t .

W przypadku, gdy X_t lub A_t są procesami losowymi, czas przebywania jest również niemalejącym, ciągłym procesem losowym.



Rys. 1. Czas przebywania procesu X_t w obszarze $A_t = (0,1; 0,2)$

Powyższy przykładowy rysunek przedstawia czas przebywania pewnego procesu X_t w obszarze $A_t = (0,1; 0,2)$. Oczywiście na wykresie widzimy tylko jedną z możliwych realizacji zarówno X_t , jak i odpowiadającej jej realizacji czasu przebywania w zadanym obszarze. Obszar ten może być niezmienny lub może ewoluować w czasie w sposób deterministyczny, jak też losowy, może oczywiście składać się także z różnych podobszarów (niekoniecznie spójnych).

Wielkością ściśle związaną z czasem przebywania jest względny czasu przebywania (*relative occupation time*) $ROT_t(A)$. Wyraża ona względną wartość czasu przebywania danego procesu (w wybranym obszarze) w stosunku do długości horyzontu czasu t [3]:

$$ROT_t(A) = \frac{1}{t} OT_t(A) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{A_s}(X_s) ds, \quad (2)$$

gdzie:

$OT_t(A)$ – czas przebywania procesu X_t w obszarze A_t .

Względny czas przebywania został użyty w przeprowadzonych na potrzeby pracy badaniach. Oczywiście jest, że $ROT_t(A)$ jako odsetek czasu przebywania w ustalonym obszarze nie może przekroczyć wartości jeden. Ciekawszy jest fakt, iż jego wartość początkowa może przyjąć wartość 1 lub 0:

$$ROT_0(A) = \begin{cases} 1 & X_0 \in A_0 \\ 0 & X_0 \notin A_0 \end{cases}, \quad (3)$$

w zależności od tego czy początkowa wartość procesu X_0 (w czasie $t = 0$) znajduje się w ustalonym obszarze czy jest poza obszarem.

2. Badania empiryczne

Jak zaznaczano we wprowadzeniu, autorzy przeprowadzili analizę średniego odsetka czasu przebywania unormowanych cen akcji w ustalonym obszarze. W badaniach użyto minutowych notowań instrumentów wchodzących w skład indeksu S&P100. Dla każdej spółki okres z jej notowaniami podzielono na dni (sesyjne), a każdy dzień podzielono na dwie równe części. Należy także dodać, iż wartość danego instrumentu była w każdym dniu i w każdej z jego dwóch części normowana (skalowana), tzn. ceny akcji zarówno z pierwszej, jak i drugiej połowy danego dnia były dzielone przez cenę początkową zaobserwowaną w odpowiedniej części dnia. Innymi słowy, w obu połowach dnia unormowane ceny akcji ewoluowały

z wartości początkowej równej jeden. Wcześniejsze unormowanie cen akcji pozwala na prostszą konstrukcję wybranych do badań obszarów, ponieważ odnosiły się one do początkowych cen akcji (z danej połowy dnia), np.:

$$A_i = (S_0^i, 1,1 \cdot S_0^i], \quad (4)$$

gdzie:

S_0^i – wartość początkowa akcji w pierwszej połowie i -tego dnia,

A_i – obszar w i -tym dniu,

po unormowaniu cen akcji obszar ten w każdym dniu jest tożsamy z obszarem:

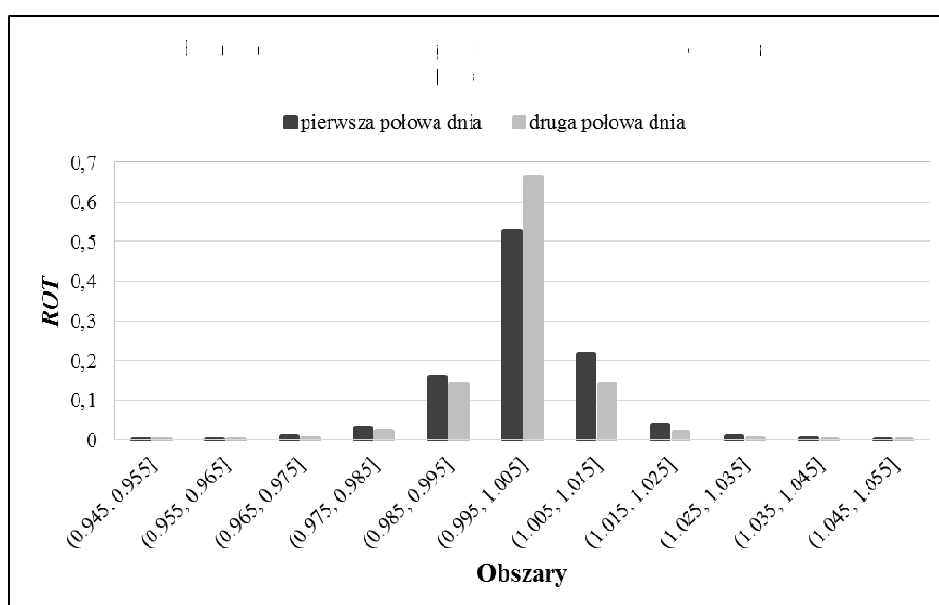
$$A = (1; 1,1]. \quad (5)$$

Na podstawie unormowanych szeregów cen, w każdym połowach dnia wyznaczano odsetek czasu przebywania w ustalonym obszarze, po czym konstruowano empiryczne rozkłady odsetka czasu przebywania (na podstawie odsetka czasu przebywania z odpowiednich części wszystkich badanych dni). Z wyznaczonych rozkładów obliczano średnie odsetki czasu przebywania, a następnie sprawdzano czy występują między nimi istotne różnice. Do weryfikacji użyto testu istotności dla dwóch średnich w przypadku nieznanymi odchyłek standardowych z poziomem istotności 0,05 [7].

W przeprowadzonych badaniach zakres unormowanych cen akcji (0,945; 1,055] został podzielony na obszary z interwałem 0,01, czyli na obszary: (0,945; 0,955], (0,955; 0,965], ... , (1,045; 1,055] (11 obszarów). Ze względu na małe wahania (unormowanych) minutowych cen akcji odsetek czasu przebywania procesu cen poza podanym zakresem jest bardzo krótki, wybrane obszary pokrywały średnio 99,3% oraz 99,7% wszystkich notowań w badanym okresie z pierwszych i drugich części dnia (badane dane zawierały notowania z średnio 3300 dni). Należy także zaznaczyć, iż obszary zostały tak skonstruowane, aby wartość jeden (wartość, z której startuje ewolucja unormowanych cen w każdej części dnia) leżała pośrodku jednego z obszarów (dokładnie obszaru (0,995; 1,005]).

Poniżej przedstawiono porównanie zaobserwowanych średniego odsetka czasu przebywania w ustalonych obszarach wyznaczanych z pierwszych i drugich połówek dni dla spółki IBM (rys. 2) oraz wykres średniego odsetka czasu przebywania i jego odchyłek standardowych dla spółki IBM i pierwszych części dni (rys. 3).

Jak można zauważyć na rys. 2, średni odsetek czasu przebywania wyznaczony na podstawie pierwszej części dnia jest zazwyczaj większy niż w drugiej. Jedynym wyjątkiem jest obszar $(0,995; 1,005]$, w którym relacja ta jest odwrotna. Z opisanej zależności wynika, że rozkład odsetka w drugiej części dnia jest bardziej skoncentrowany wokół ceny początkowej z danej części dnia. Większe rozproszenie ceny akcji w pierwszej połowie dnia jest najprawdopodobniej spowodowana relaksacją napięć informacyjnych skumulowanych po przerwie nocnej. W czasie, w którym GPW w Warszawie nie funkcjonowała inne rynki generowały impulsy informacyjne, które nie mogły być natychmiast przetworzone przez inwestorów na GPW.

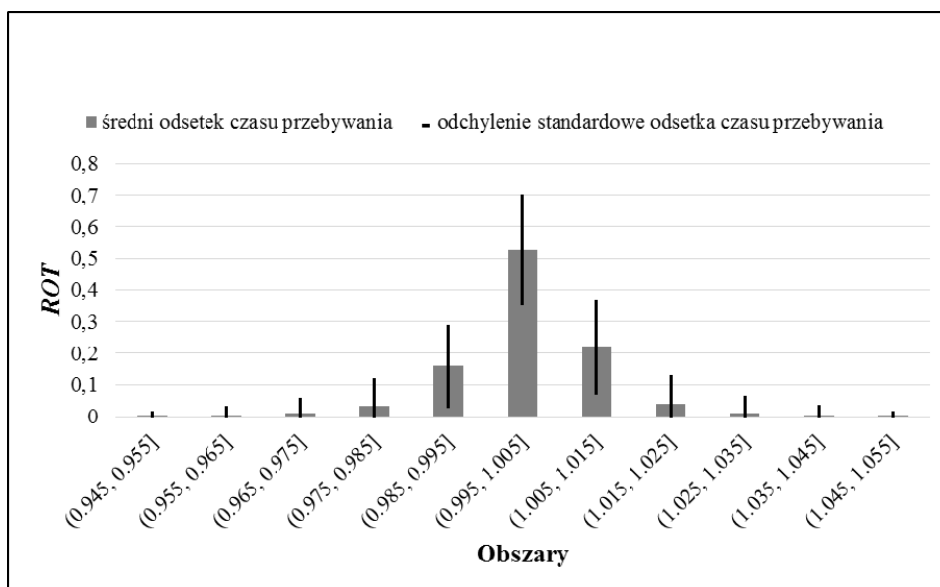


Rys. 2. Średni odsetek czasu przebywania unormowanych cen akcji IBM (dla pierwszej i drugiej połowy dnia)

W tym przypadku (dla spółki IBM), testy wykazały istotne różnice pomiędzy średnimi we wszystkich obszarach poza dwoma skrajnymi.

Rozproszenie odsetka czasu przebywania wokół średniej w wybranych obszarach nie jest małe (rys. 3), nie przekłada się jednak ono na błędy estymatora średniej na tyle, aby testy nie wykazywały istotnych różnic pomiędzy badanymi średnimi.

W tabeli przedstawiono odsetek przypadków, w których w danym obszarze występowały istotne różnice pomiędzy średnim odsetkiem czasu przebywania dla całej badanej próby.



Rys. 3. Średnia oraz odchylenie standardowe odsetka czasu przebywania unormowanych cen akcji IBM (dla pierwszej połowy dnia)

Tabela 1

Odsetek spółek z istotnymi różnicami pomiędzy średnimi odsetkami czasu przebywania w pierwszej i drugiej połowie dnia

Odsetek spółek z istotnymi różnicami pomiędzy średnimi odsetkami czasu przebywania w dwóch częściach dnia (test dwustronny)										
OBSZAR										
(0,945; 0,955]	(0,955; 0,965]	(0,965; 0,975]	(0,975; 0,985]	(0,985; 0,995]	(0,995; 1,005]	(1,005; 1,015]	(1,015; 1,025]	(1,025; 1,035]	(1,035; 1,045]	(1,045; 1,055]
69,4%	89,2%	98,2%	100,0%	96,4%	100,0%	82,0%	99,1%	96,4%	84,7%	66,7%

Jak widać w tabeli, w znaczącym procencie spółek występują istotne różnice pomiędzy badanymi średnimi odsetkami czasu przebywania w wybranych obszarach wyznaczanych na podstawie danych z pierwszej i drugiej części dnia. Jedynie w skrajnych obszarach wynik ten jest niższy od 80% (większy jednak od 65%) i sytuacja ta jest prawdopodobnie spowodowana krótkim czasem przebywania cen akcji w tych obszarach oraz rzadkim występowaniem dnia, w którym cena akcji znalazłaby się w skrajnym obszarze. Przeprowadzono także testy na istotne

różnice średniego odsetka czasu przebywania wyznaczanego wyłącznie na podstawie pierwszych części dni (oraz na podstawie wyłącznie drugich części dni). Szereg dni z notowaniami rozdzielono losowo na dwie równe części. Następnie w każdej z nich wyznaczano średnie odsetki czasu przebywania w wybranych obszarach na podstawie zaobserwowanych (unormowanych) cen akcji wyłącznie z pierwszych połówek dni (dla drugiej części dnia procedura była analogiczna). Badania wykazały, iż w żadnej ze spółek i w żadnym z obszarów nie występują istotnie różne średnie odsetki czasu przebywania, co oznacza, iż zaobserwowane wcześniej różnice pomiędzy pierwszą i drugą połową dnia nie są przypadkowe.

Inną istotną obserwacją jest fakt, iż w każdej spółce, jeżeli wystąpiły istotne różnice pomiędzy średnimi, to w obszarze $(0,995; 1,005]$, w każdym przypadku średnia z drugiej połowy dnia jest większa od średniej z pierwszej połowy dnia, a w pozostałych obszarach relacja ta jest odwrotna (rys. 2, testy jednostronne na istotne różnice pomiędzy średnimi z poziomem istotności 0,05). Nasuwa się zatem pytanie, czy występują zależności pomiędzy zaobserwowaną większą koncentracją cen w środkowym obszarze w drugiej połowie dnia w porównaniu do pierwszej a odchyleniami (także semiodchyleniami) standardowymi logarytmicznymi stóp zwrotu i unormowanych cen. Odpowiedź na to pytanie wymaga dalszych badań.

Podsumowanie

W artykule została zaprezentowana analiza zmian procesu cen akcji oparta na czasie przebywania. Dotyczyła ona średniego odsetka czasu przebywania w wybranych obszarach wyznaczanego na podstawie minutowych cen akcji z pierwszej i drugiej połowy dnia. Przedstawiona przez autorów analiza jest jedynie jedną z możliwych propozycji uwzględnienia czasu przebywania w badaniu szeregów czasowych i stanowi uzupełnienie klasycznych miar używanych zazwyczaj w tym celu. Z przeprowadzonych badań wynika iż średni odsetek czasu przebywania w ustalonych obszarach w pierwszej i drugiej połowie dnia różni się istotnie. Ponadto różnice te wykazują pewną tendencję, mianowicie średni odsetek czasu przebywania wyznaczany na podstawie pierwszych części dnia jest większy niż w drugim przypadku we wszystkich obszarach poza obszarem $(0,995; 1,005]$, w którym ta tendencja jest odwrotna (we wszystkich spółkach). Innymi słowy, w drugiej połowie dnia proces cen akcji średnio dłużej przebywa w obszarze $(0,995; 1,005]$ niż w pierwszej jego części i odwrotnie dla pozostałych obszarów.

Opisane zjawisko wymaga dalszych badań.

Literatura

- [1] Bayraktar E., Young V.R., *Optimal Investment Strategy to Minimize Occupation Time*, „Annales of Operations Research” 2010, No. 176, s. 389-408.
- [2] Cai N., Chen N., Wan X., *Occupation Times of Jump-Diffusion Processes with Double Exponential Jumps and the Pricing of Options*, „Mathematics of Operations Research” 2010, Vol. 35, No. 2, s. 412-437.
- [3] Czernik T., *Czas przebywania – potencjalne zastosowania. Geometryczny ruch Browna*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Katowice 2013.
- [4] Darling D.A., Kac M., *On Occupation Times for Markoff Processes*, „Transactions of AMS” 1957, No. 84, s. 444-458.
- [5] Pechtl A., *Distributions of Occupation Times of Brownian Motion with Drift*, „Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences” 1999, 3(1), s. 41-62.
- [6] Sharp N.J., Johnson P.V., Newton D.P., Duck P.W., *A New Prepayment Model (with Default): An Occupation-Time Derivative Approach*, „Journal of Real Estate Finance and Economic” 2009, No. 39, s. 118-145.
- [7] Wywił J., *Wprowadzenie do wnioskowania statystycznego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice 2004.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE RELATIVE OCCUPATION TIME OF THE FIRST AND SECOND HALF OF THE DAY – EMPIRICAL RESEARCH

Summary

In the paper, authors present the analysis of the relative occupation time. The analysis concerns the mean of relative occupation time determined on the basis of the stock price taken from the first and second half of the day. The presented analysis does not exhaust the family of possible applications of occupation time functional.