

Ewa Dziawgo

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Wydział Nauk Ekonomicznych i Zarządzania
Katedra Ekonometrii i Statystyki
dziawew@umk.pl

WSPÓŁCZYNNIK THETA OPCJI BARIEROWYCH

Streszczenie: W artykule przedstawiono zagadnienia związane z opcjami barierowymi: charakterystykę instrumentu, wpływ wybranych czynników na wartość współczynnika theta. Ilustracja empiryczna zawarta w artykule jest przeprowadzona na podstawie symulacji wyceny opcji barierowych i opcji zwykłych wystawionych na EUR/PLN.

Słowa kluczowe: opcja kupna, opcja sprzedaży.

Wprowadzenie

Opcje barierowe należą do klasy opcji uwarunkowanych. Dochód uzyskany z opcji barierowych zależy od przekroczenia przez cenę instrumentu bazowego ustalonej ceny progowej (tzw. bariery) [Napiórkowski, 2002, s. 44; Dziawgo, 2008, s. 313, 2013, s. 201]. Jeżeli w okresie ważności opcji zostanie spełniony warunek określony barierą, to opcja barierowa staje się opcją zwykłą. W zależności od warunku bariery wyróżnia się:

- opcje z barierą wejścia, które od momentu przekroczenia przez cenę instrumentu bazowego ustalonej bariery są opcjami zwykłymi,
- opcje z barierą wyjścia, które w dniu wygaśnięcia są opcjami zwykłymi, o ile w okresie ważności cena instrumentu bazowego nie przekroczy poziomu bariery.

Współczynnik theta jest miarą wrażliwości ceny opcji, określającą zmianę wartości opcji, gdy długość okresu do terminu wygaśnięcia spadnie o jednostkę [Hull, 2002, s. 195; Jajuga 2007, s. 71; Tarczyński, Zwolankowski, 1999, s. 75; Dziawgo, 2003, s. 11].

W artykule przedstawiono analizę porównawczą kształtowania się wartości współczynnika theta opcji barierowych i opcji zwykłych oraz analizę wpływu bieżą-

cej ceny instrumentu bazowego i poziomu bariery na wartość współczynnika theta opcji barierowych. Ilustracja empiryczna zawarta w artykule jest przedstawiona na podstawie symulacji wyceny walutowych opcji wystawionych na EUR/PLN.

1. Współczynnik theta opcji kupna z barierą wejścia w dół oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół

Rozpatrywany jest przypadek, kiedy cena wykonania jest większa od ceny progowej. Cena opcji kupna z barierą wejścia w dół jest określona równaniem [Wilmott, 2000, s. 202-203]:

$$C_{t_d} = \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(\left(\frac{H^2}{S_t}\right) N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \right) \quad (1)$$

gdzie:

$N(d)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego zmiennej d ,

r – stopa procentowa wolna od ryzyka,

σ – zmienność ceny instrumentu bazowego,

S_t – cena instrumentu bazowego w chwili t ,

T – czas wygaśnięcia opcji,

K – cena wykonania opcji,

H – poziom bariery,

q – stopa dywidendy,

$t \in [0, T]$,

$n = r - q - 0,5\sigma^2$,

$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$,

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{H^2}{S_t K}\right) + n(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Cena opcji kupna z barierą wyjścia w dół wynosi:

$$C_{t_d} = S_t N(d_5) - e^{-r(T-t)} KN(d_6) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(\left(\frac{H^2}{S_t}\right) N(d_1) - e^{-r(T-t)} KN(d_2) \right) \quad (2)$$

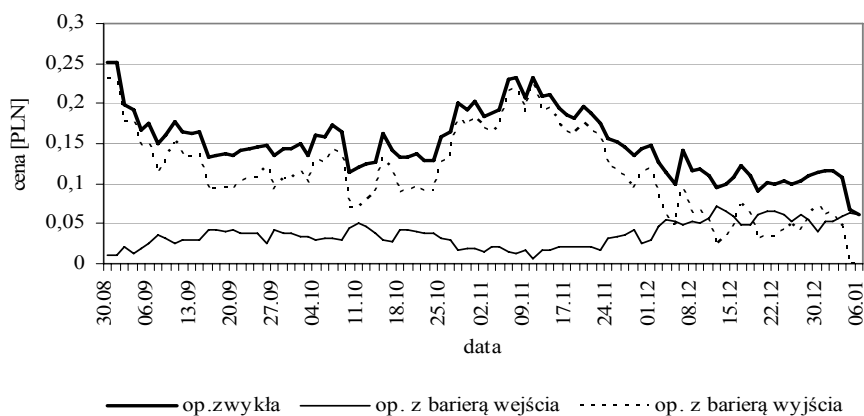
gdzie:

$d_5 = d_6 + \sigma\sqrt{T-t}$,

$$d_6 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + n(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

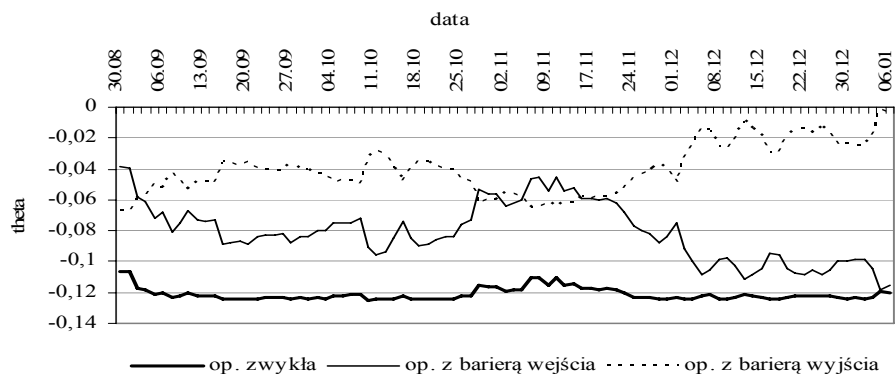
pozostałe oznaczenia są takie same jak we wzorze (1).

Na rys. 1 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w dół oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół. Rozpatrywane opcje są wystawione na EUR/PLN. Symulacja wyceny jest przeprowadzona dla okresu 30.08.2005–09.01.2006. Czas wygaśnięcia opcji wynosi 6 miesięcy. Cena wykonania opcji wynosi 3,85 PLN, a poziom bariery równy jest 3,8 PLN. W analizowanym okresie, w dniu 9 stycznia kurs EUR/PLN przekroczył poziom bariery. Od tego momentu opcja z barierą wejścia w dół stała się zwykłą opcją kupna, a opcja z barierą wyjścia w dół wygasła bezwartościowo.

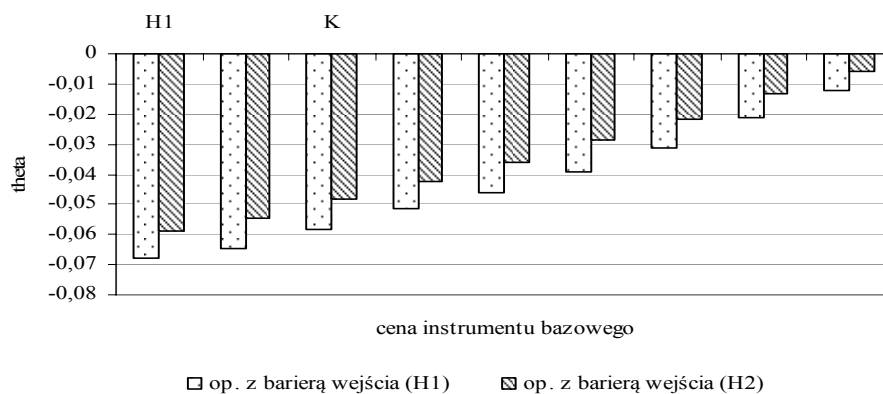


Rys. 1. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w dół oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół

Rys. 2 jest ilustracją kształtowania się wartości współczynnika theta analizowanych opcji kupna. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz poziomu bariery na cenę opcji kupna z barierą wejścia w dół oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół przedstawiono na rys. 3 oraz na rys. 4.

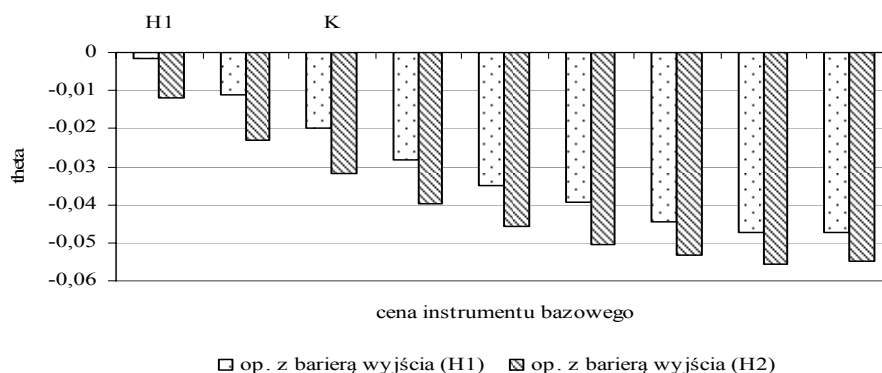


Rys. 2. Kształtowanie się wartości współczynnika theta zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w dół oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół



Rys. 3. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia w dół ($H2 < H1$)¹

¹ Gdzie: H1, H2 – poziomy barier, K – cena wykonania opcji. Oznaczenia te dotyczą również wykresów nr: 4, 7, 8, 11, 12, 15 oraz 16.



Rys. 4. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wyjścia w dół ($H2 < H1$)

Z analizy kształtowania się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia oraz opcji kupna z barierą wyjścia w dół wynikają następujące wnioski:

- współczynnik theta analizowanych opcji jest ujemny, co oznacza, że w miarę zbliżania się terminu wygaśnięcia wartość opcji maleje,
- w przypadku opcji kupna *silnie-w-cenie* / *nie-w-cenie* wartość współczynnika theta opcji z barierą wejścia w dół jest większa/mniejsza od wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wyjścia w dół,
- wartości współczynnika theta zwykłej opcji kupna są mniejsze od wartości współczynnika theta opcji barierowych,
- zbliżanie się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery wpływa na spadek/wzrost wartości współczynnika theta opcji z barierą wejścia/wyjścia w dół,
- niższy poziom bariery wpływa na wzrost/spadek wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia/wyjścia w dół.

2. Współczynnik theta opcji kupna z barierą wejścia w górę oraz opcji kupna z wyjścia w górę

Analiza jest przeprowadzona dla przypadku, kiedy cena wykonania jest mniejsza od ceny progowej. Cena opcji kupna z barierą wejścia w górę jest określona równaniem [Wilmott, 2000, s. 202-203]:

$$C_{i_g} = S_t(d_7) - e^{-r(T-t)}K(d_8) + \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(e^{-r(T-t)}K(N(-d_2) - N(-d_4)) + \left(\frac{H^2}{S_t}\right)(N(-d_3) - (N(-d_1))) \right) \quad (3)$$

gdzie:

$$d_7 = d_8 + \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_8 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{H}\right) + n(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_3 = d_4 + \sigma\sqrt{T-t},$$

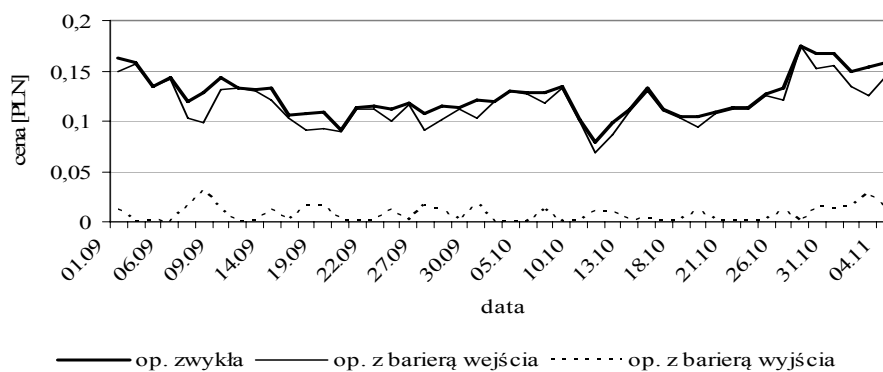
$$d_4 = \frac{\ln\left(\frac{H}{S_t}\right) + n(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

pozostałe oznaczenia jak w równaniu (2).

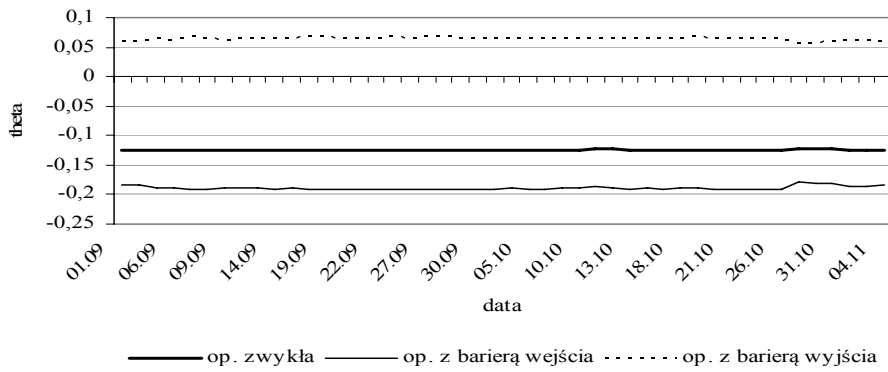
Cena opcji kupna z barierą wyjścia w górę wynosi:

$$C_{t_g} = S_t(N(d_5) - N(d_7)) + e^{-r(T-t)}K(N(d_8) - N(d_6)) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(\left(\frac{H^2}{S_t}\right)(N(d_1) - N(d_3)) + e^{-r(T-t)}K(N(d_4) - N(d_2)) \right) \quad (4)$$

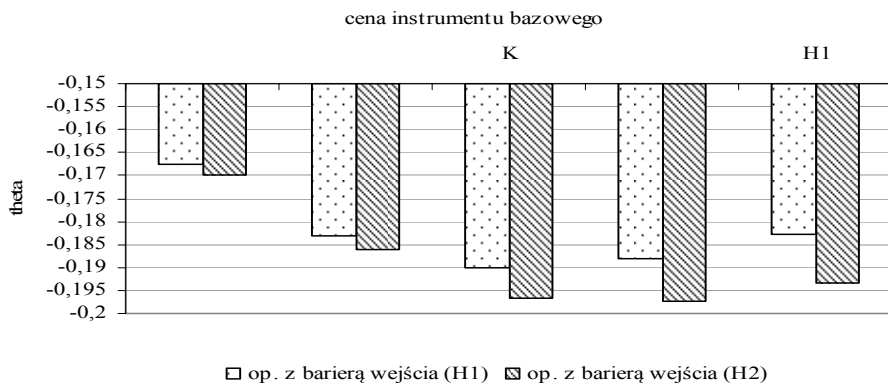
Na rys. 5 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w górę oraz opcji kupna z barierą wyjścia w górę. Opcje są wystawione na EUR/PLN. Symulacja wyceny jest przeprowadzona dla okresu 01.09.2005–7.11.2005. Czas wygaśnięcia opcji wynosi 6 miesięcy, cena wykonania wynosi 3,9 PLN, a poziom bariery jest równy 4,0 PLN. Rys. 6 jest ilustracją kształtowania się wartości współczynnika theta rozpatrywanych opcji kupna. Wpływ ceny instrumentu bazowego i poziomu bariery na cenę opcji kupna z barierą wejścia oraz z barierą wyjścia w górę jest przedstawiony na rys. 7 oraz na rys. 8.



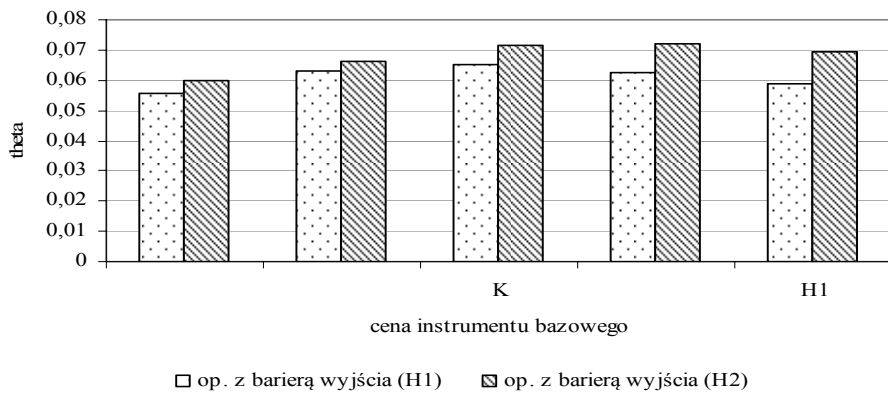
Rys. 5. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w górę oraz opcji kupna z barierą wyjścia w górę



Rys. 6. Kształtowanie się wartości współczynnika theta zwykłej opcji kupna, opcji kupna z barierą wejścia w górę oraz opcji kupna z barierą wyjścia w górę



Rys. 7. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia w górę ($H1 < H2$)



Rys. 8. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wyjścia w górę ($H1 < H2$)

Z analizy kształtowania się wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia w górę oraz opcji kupna z barierą wyjścia w górę wynikają następujące własności:

- współczynnik theta zwykłej opcji kupna oraz opcji kupna z barierą wejścia w dół jest ujemny; zbliżanie się terminu wygaśnięcia wpływa na spadek ceny opcji kupna,
- wartości współczynnika theta opcji kupna z barierą wejścia w górę są mniejsze od wartości współczynnika theta zwykłej opcji kupna; cena opcji barierowej charakteryzuje się większą wrażliwością na zmianę czasu,
- współczynnik theta opcji kupna z barierą wyjścia w górę jest dodatni; w miarę zbliżania się terminu wygaśnięcia wartość opcji wzrasta,
- jeśli cena instrumentu bazowego zmierza do ceny wykonania, to wzrasta wartość bezwzględna współczynnika theta,
- w przypadku zbliżania się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery występuje spadek wartości bezwzględnej współczynnika theta analizowanych opcji barierowych,
- wzrost poziomu bariery powoduje wzrost wartości bezwzględnej współczynnika theta rozpatrywanych barierowych opcji kupna.

3. Współczynnik theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę

Rozważany jest przypadek, kiedy cena wykonania jest mniejsza od poziomu bariery. Cena opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę jest określona równaniem [Wilmott, 2000, s. 202-203]:

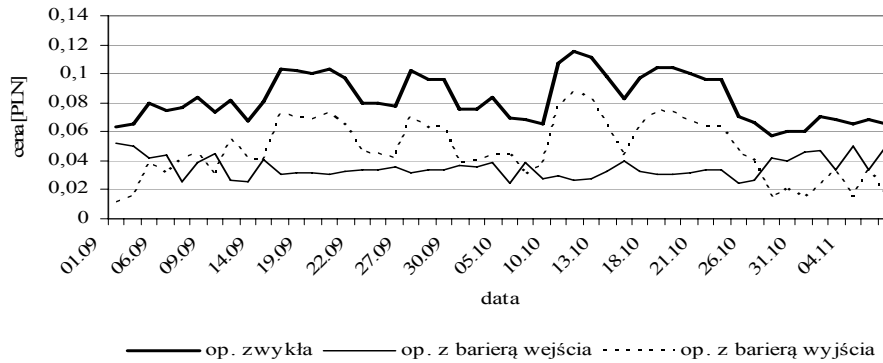
$$P_{t_g} = \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(e^{-r(T-t)} KN(-d_2) - \left(\frac{H^2}{S_t}\right) N(-d_1) \right) \quad (5)$$

Cena opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę wynosi:

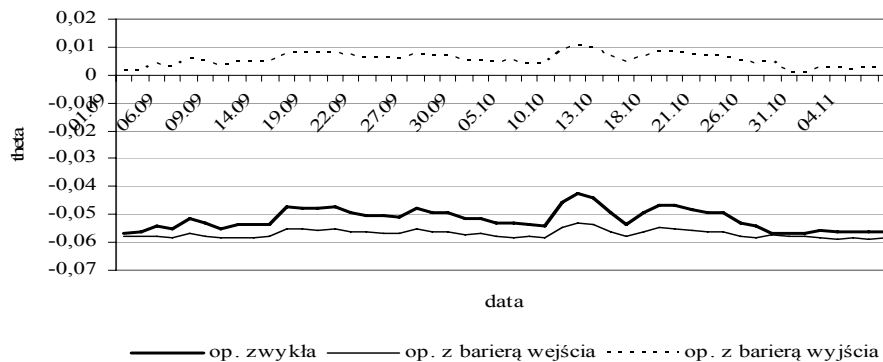
$$P_{t_g} = e^{-r(T-t)} KN(-d_6) - S_t N(-d_5) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(e^{-r(T-t)} KN(-d_2) - \left(\frac{H^2}{S_t}\right) N(-d_1) \right) \quad (6)$$

Rys. 9 ilustruje kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę. Symulacja wyceny jest przeprowadzona dla okresu 01.09.2005–7.11.2005. Opcje są wystawione na EUR/PLN. Czas wygaśnięcia opcji wynosi 6 miesięcy. Cena

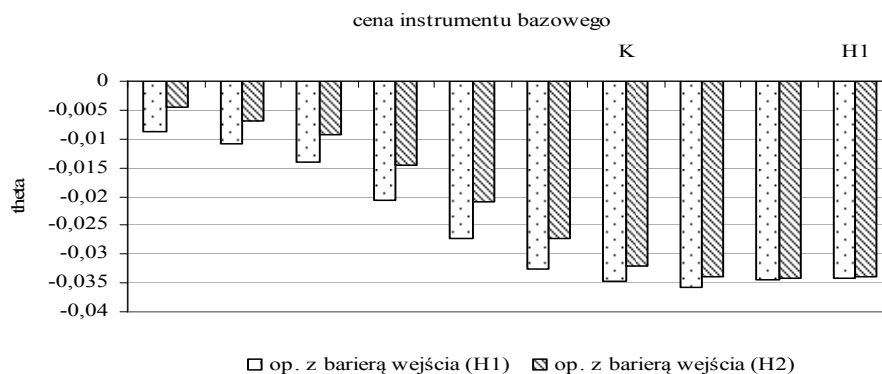
wykonania opcji wynosi 3,95 PLN. Poziom bariery równa się 4,0 PLN. Na rys. 10 przedstawiono kształtowanie się wartości współczynnika theta rozpatrywanych opcji sprzedaży. Wpływ ceny instrumentu bazowego i poziomu bariery na cenę opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę jest zilustrowany na rys. 11 oraz na rys. 12.



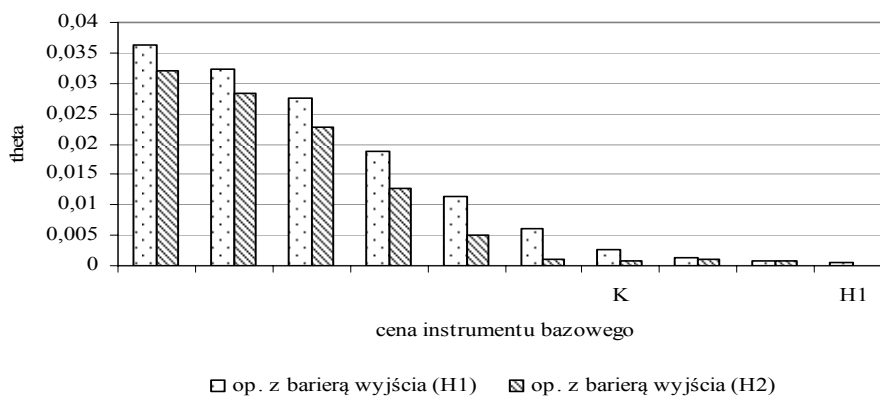
Rys. 9. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę



Rys. 10. Kształtowanie się wartości współczynnika theta zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę



Rys. 11. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę ($H1 < H2$)



Rys. 12. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę ($H1 < H2$)

Współczynnik theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia odznacza się następującymi własnościami:

- współczynnik theta opcji zwykłej oraz opcji z barierą wejścia w górę jest ujemny,
- wartości współczynnika theta opcji z barierą wejścia w górę są mniejsze od wartości współczynnika theta zwykłej opcji; opcja barierowa charakteryzuje się większą wrażliwością na wpływający czas,
- współczynnik theta opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę jest dodatni,
- w przypadku zbliżania się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wyjścia w górę maleją do zera,

- zbliżanie się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery wpływa na spadek wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w górę,
- wzrost poziomu bariery powoduje spadek wartości bezwzględnej współczynnika theta rozpatrywanych barierowych opcji sprzedaży.

4. Współczynnik theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół

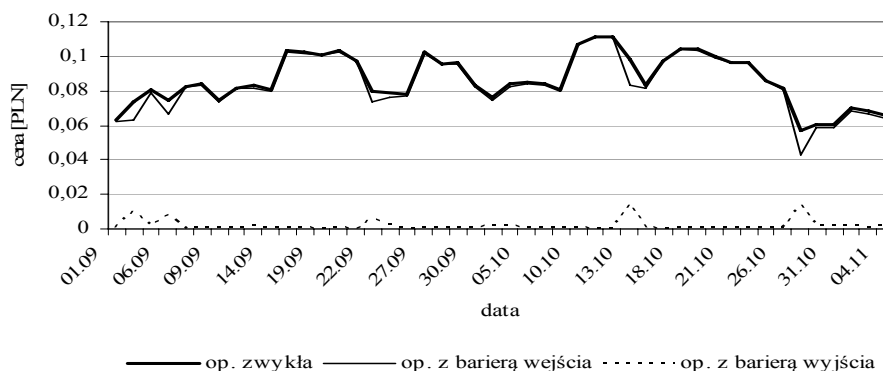
Rozpatrywany jest przypadek, kiedy cena wykonania jest większa od ceny progowej. Cena opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół wynosi [Wilmott, 2000, s. 202-203]:

$$P_{t_d} = e^{-r(T-t)} K(-d_8) - S_t(-d_7) + \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(e^{-r(T-t)} K(N(d_4) - N(d_2)) + \left(\frac{H^2}{S_t}\right) (N(d_1) - N(d_3)) \right) \quad (7)$$

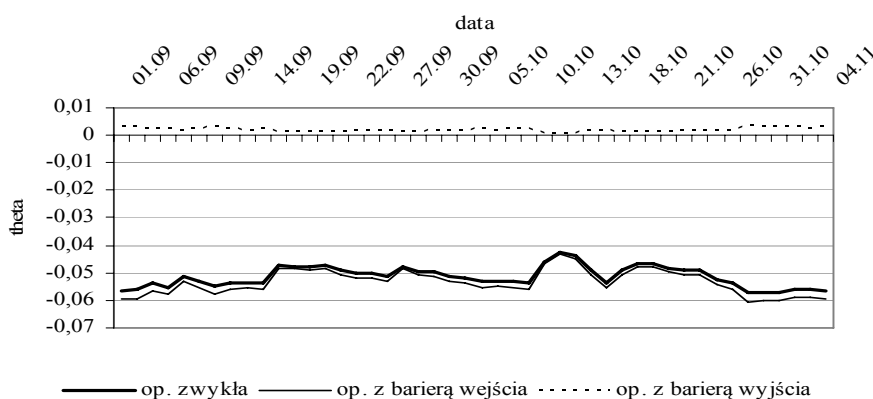
Cena opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół wynosi:

$$P_{t_d} = S_t (N(-d_7) - N(-d_5)) + e^{-r(T-t)} K(N(-d_6) - N(-d_8)) + \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2n/\sigma^2} \left(\left(\frac{H^2}{S_t}\right) (N(-d_1) - N(-d_3)) + e^{-r(T-t)} K(N(-d_4) - N(-d_2)) \right) \quad (8)$$

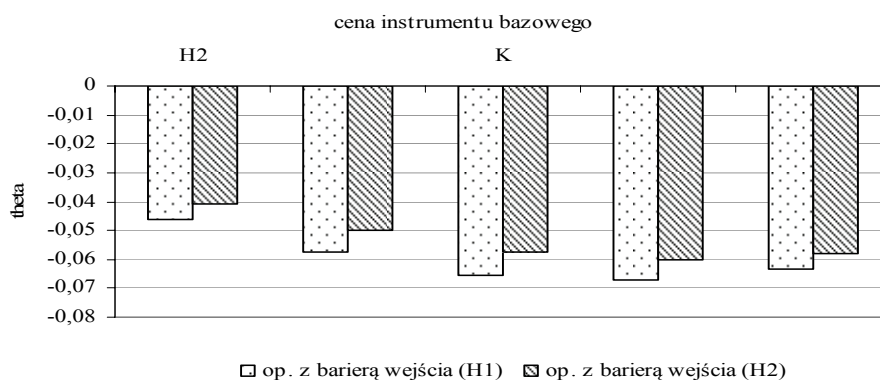
Na rys. 13 przedstawiono kształtowanie się ceny opcji walutowych wystawionych na EUR/PLN: zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół. Symulacja wyceny jest przeprowadzona dla okresu 01.09.2005–7.11.2005. Czas wygaśnięcia opcji wynosi 6 miesięcy. Cena wykonania opcji wynosi 3,95 PLN, a ustalony poziom bariery jest równy 3,85 PLN. Rys. 14 jest ilustracją kształtowania się wartości współczynnika theta rozpatrywanych opcji sprzedaży. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz poziomu bariery na cenę opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół jest przedstawiony na rys. 15 oraz na rys. 16.



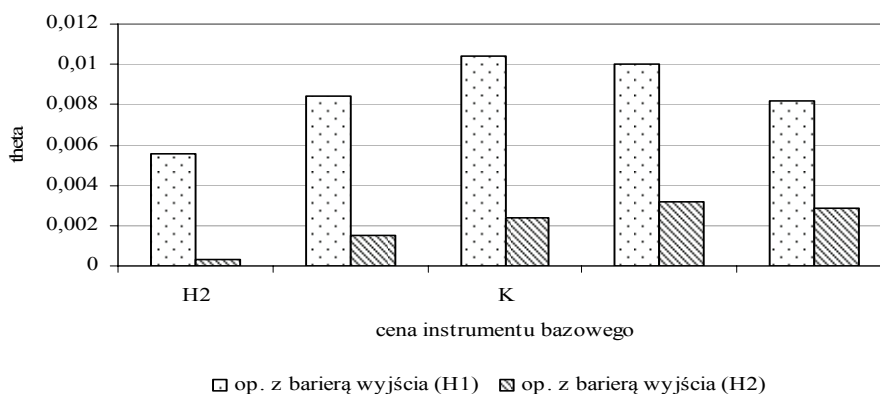
Rys. 13. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół



Rys. 14. Kształtowanie się wartości współczynnika theta zwykłej opcji sprzedaży, opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół oraz opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół



Rys. 15. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wejścia w dół ($H1 < H2$)



Rys. 16. Wpływ poziomu bariery i ceny instrumentu bazowego na kształtowanie się wartości współczynnika theta opcji sprzedaży z barierą wyjścia w dół ($H1 < H2$)

Z analizy kształtowania się wartości współczynnika theta analizowanych opcji sprzedaży wynikają następujące wnioski:

- współczynnik theta opcji zwykłej i opcji z barierą wejścia w dół jest ujemny, a opcji z barierą wyjścia w dół – dodatni,
- wartości współczynnika theta opcji z barierą wejścia w dół są mniejsze od wartości współczynnika theta opcji zwykłej,
- wzrost wartości bezwzględnej współczynnika theta występuje w sytuacji, kiedy cena instrumentu bazowego zmierza do ceny wykonania,
- zbliżanie się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery wpływa na spadek wartości bezwzględnej współczynnika theta opcji barierowych,
- niższy poziom bariery wpływa na wzrost wartości bezwzględnej współczynnika theta rozpatrywanych barierowych opcji sprzedaży.

Podsumowanie

Położenie poziomu bariery w stosunku do ceny wykonania jest istotnym czynnikiem wpływającym na cenę opcji oraz na wrażliwość ceny opcji na zmianę czasu. Jeśli w momencie zbliżania się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery opcja jest typu *nie-w-cenie*, to:

- wzrasta/maleje wartość bezwzględna współczynnika theta opcji z barierą wejścia/wyjścia,
- mniejsza różnica między poziomem bariery i ceną wykonania przyczynia się do wzrostu wartości bezwzględnej współczynnika theta opcji z barierą wejścia i opcji sprzedaży z barierą wyjścia oraz do spadku wartości bezwzględnej współczynnika theta opcji kupna z barierą wyjścia.

Jeżeli w momencie zbliżania się ceny instrumentu bazowego do poziomu bariery opcja jest typu *w-cenie*, to:

- maleje wartość bezwzględna współczynnika theta opcji z barierą wejścia i opcji z barierą wyjścia,
- mniejsza różnica między poziomem bariery i ceną wykonania wpływa na spadek wartości bezwzględnej współczynnika theta opcji z barierą wejścia oraz opcji z barierą wyjścia.

Opcje barierowe są tańsze od opcji zwykłych, dlatego umożliwiają zmniejszenie kosztów zabezpieczenia przed ryzykiem niekorzystnej zmiany ceny instrumentu bazowego. W zależności od oczekiwań związanych z kształtowaniem się ceny instrumentu bazowego w przyszłości, przez wyznaczenie odpowiedniego położenia bariery w stosunku do bieżącej ceny instrumentu bazowego oraz ceny wykonania, można wpłynąć zarówno na cenę opcji barierowej, jak i na wrażliwość tej ceny na zmianę czasu. Z uwagi na wahania ceny opcji oraz wartości współczynnika theta, które występują w przypadku kształtowania się ceny instrumentu bazowego w pobliżu poziomu bariery, opcje barierowe są szczególnym instrumentem transakcji spekulacyjnych.

Literatura

- Dziawgo E. (2003), *Modele kontraktów opcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Dziawgo E. (2008), *Opcje barierowe zarządzaniu ryzykiem* [w:] Buczek S., Fierla A. (red.), *Rynek kapitałowy w Polsce i na świecie – jak mądrze inwestować*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa.
- Dziawgo E. (2013), *Miary wrażliwości ceny jednoczynnikowych opcji egzotycznych*, CeDeWu, Warszawa.
- Hull C.J. (2002), *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall International Inc.
- Jajuga K. (2007), *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Napiórkowski A. (2002), *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Tarczyński W., Zwolankowski M. (1999), *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.
- Wilmott P. (2000), *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester.

THETA COEFFICIENT OF THE BARRIER OPTIONS

Summary: The article presents the issues connected with barrier options: characteristic of the instrument, the influence of selected factors on the value of theta coefficient. The empirical data included in the article are concerned with the simulations of the barrier options and standard options on EUR/PLN.

Keywords: call option, put option.