

Tadeusz Czernik

Daniel Iskra

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Katedra Matematyki Stosowanej

tadeusz.czernik@ue.katowice.pl
daniel.iskra@ue.katowice.pl

OCENA ATRAKCYJNOŚCI INWESTYCYJNEJ AKCJI NA PODSTAWIE CZASU PRZEBYWANIA W OBSZARACH OGRANICZONYCH KRZYWĄ WYKŁADNICZĄ

Wprowadzenie

W ciągu ostatniej dekady można było zaobserwować intensywny rozwój prac nad konstrukcją oraz analizą zarówno miar atrakcyjności, jak i miar ryzyka instrumentów finansowych [1, 4, 5, 6, 12, 13]. Obecnie inwestorzy mają możliwość wykorzystania wielu narzędzi porządkujących instrumenty ze względu na ich atrakcyjność/ryzyko, opartych zarówno na metodach jakościowych, jak i ilościowych. W artykule autorzy zaprezentowali konstrukcję oraz analizę miary atrakcyjności instrumentów finansowych opartą na czasie przebywania procesu ceny (stopy zwrotu) instrumentu w ustalonym obszarze. Jak będzie można zauważyć w dalszej części artykułu, wielkość, jaką jest czas przebywania, niesie ze sobą duży potencjał, odnoszący się zwłaszcza do możliwych kształtów obszaru, dla którego jest on wyznaczany. Kształt obszaru może być stały, może zmieniać w sposób deterministyczny, jak również może być procesem stochastycznym.

1. Czas przebywania

Czas przebywania $OT_A^X(t)$ (*occupation time*) procesu losowego X_t w obszarze A_t (kształt obszaru może być stały, może zmieniać się w sposób deterministyczny, jak również może być procesem stochastycznym) jest definiowany [2, 3, 8, 11]:

$$OT_A^X(t) = \int_0^t 1(X_z \in A_z) dz, \quad (1)$$

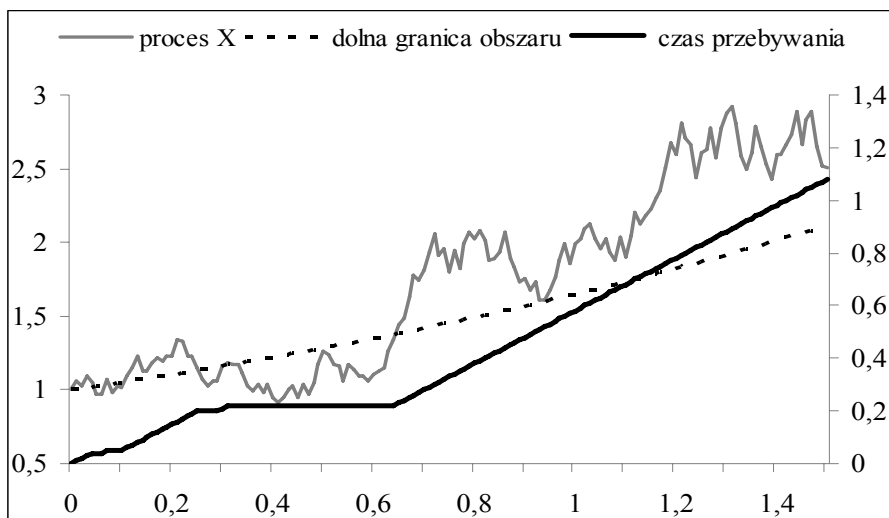
gdzie:

X_t – proces losowy (cena akcji),

A_t – dowolny obszar (indeks t podkreśla potencjalną deterministyczną/losową zależność od czasu; autorzy w swoich badaniach ograniczyli się do obszaru zdefiniowanego przez krzywą wykładniczą),

$$1(X_t \in A_t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } X_t \in A_t \\ 0 & \text{gdy } X_t \notin A_t \end{cases} \quad \text{– funkcja charakterystyczna zbioru.}$$

Autorzy przyjęli, iż w przypadku notacji czasu przebywania $OT_A^X(t)$ (odsetek czasu przebywania $ROT_A^X(t)$) będzie pomijany indeks czasu przy symbolu oznaczającym obszar A_t , gdyż wielkości te zależą od kształtu obszaru A_s w każdym momencie czasu s mniejszym od t .



Nota:

Skala po prawej stronie odnosi się do czasu przebywania.

Rys. 1. Czas przebywania procesu X_t w obszarze zdefiniowanym przez krzywą wykładniczą:

$$A_t = [e^{at}, \infty)$$

Na rysunku 1 przedstawiono poglądowo czas przebywania procesu X_t w obszarze zdefiniowanym przez krzywą wykładniczą $A_t = [e^{at}, +\infty)$.

Odsetek czasu przebywania $ROT_A^X(t)$ (*relative occupation time*) jako stosunek czasu przebywania $OT_A^X(t)$ do długości horyzontu czasu t jest dany wzorem:

$$ROT_A^X(t) = \frac{1}{t} OT_A^X(t),$$

lub alternatywnie:

$$ROT_A^X(t) = \frac{1}{t} \int_0^t 1(X_z \in A_z) dz = \int_0^1 1(X_{yt} \in A_{yt}) dy \in [0, 1], \quad (2)$$

gdzie $y = \frac{z}{t}$.

Ze wzoru (2) wynika, że odsetek czas przebywania procesu X_t w obszarze A_t jest równoważny czasowi przebywania procesu $X_{t'}$ (t – rzeczywisty horyzont czasu) w obszarze $A_{t'}$ w przypadku ustalonego horyzontu czasu (prze-transformowanego czasu t') wynoszącego 1.

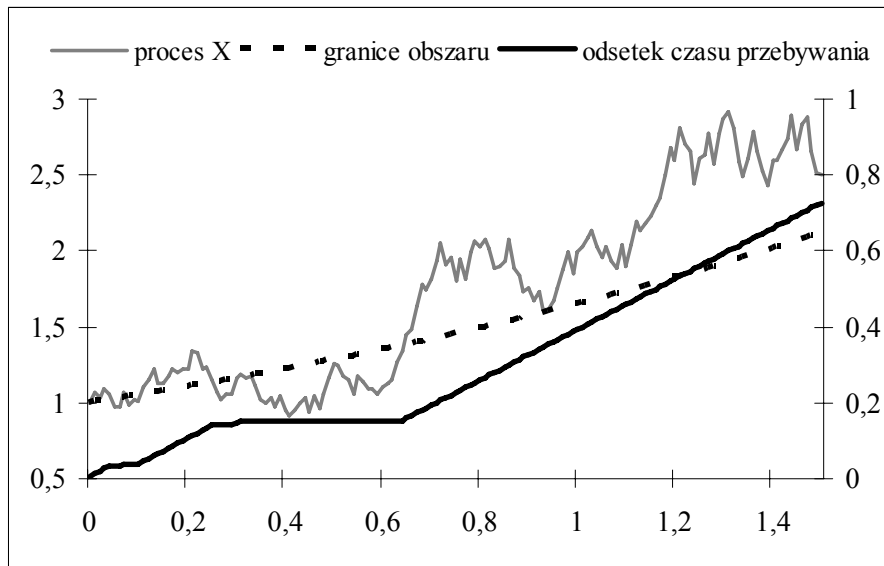
Na rysunku 2 przedstawiono poglądowo odsetek czasu przebywania procesu X_t w obszarze zdefiniowanym przez krzywą wykładniczą: $A_t = [e^{at}, \infty)$.

Łatwo pokazać, że oczekiwany odsetek czasu przebywania dany jest wzorem:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{t} E[OT_A^X(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t E[1(X_z \in A_z)] dz. \quad (3)$$

Korzystając z faktu, iż $E[1(X_z \in A_z)] = P(X_z \in A_z)$, formułę (3) można zapisać następująco:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t P(X_z \in A_z) dz \in [0, 1]. \quad (4)$$



Nota:

Skala po prawej stronie odnosi się do odsetka czasu przebywania.

Rys. 2. Odsetek czasu przebywania procesu X_t w obszarze ograniczonym krzywą wykładniczą:

$$A_t = [e^{at}, \infty)$$

W pracy rozważony zostanie obszar $A_t = [e^{at}, +\infty)$ (oraz prosta jego modyfikacja, patrz wzór (7)), gdzie a jest rzeczywistym parametrem, który jak zostanie przedstawione w dalszej części może być utożsamiany z miarą atrakcyjności instrumentu finansowego.

2. Geometryczny ruch Browna

Należy rozważyć instrument (akcję), którego cena jest procesem stochastycznym, będącym rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego (w sensie Ito) [9]:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad (5)$$

gdzie:

S – cena akcji,

μ – dryf,

σ – zmienność,

W – proces Wienera.

Rozwiązaniem równania jest geometryczny ruch Browna:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}. \quad (6)$$

Oczekiwany odsetek czasu przebywania procesu S_t w obszarze $[S_0 e^{at}, +\infty)$ można obliczyć ze wzoru (4), który w tym przypadku przyjmie postać:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t P(S_z \geq S_0 e^{az}) dz. \quad (7)$$

Dalej znajduje się:

$$\begin{aligned} E[ROT_A^X(t)] &= \frac{1}{t} \int_0^t P\left(S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)z + \sigma W_z} \geq S_0 e^{az}\right) dz = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t P\left(e^{\left(\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)z + \sigma W_z} \geq 1\right) dz = \frac{1}{t} \int_0^t P\left(\left(\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)z + \sigma W_z \geq 0\right) dz = (8) \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t P\left(W_z \geq -\frac{\left(\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)z}{\sigma}\right) dz. \end{aligned}$$

Korzystając z własności procesu Wienera wyrażenie z można zapisać:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t N\left(\frac{\left(\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{z}}{\sigma}\right) dz, \quad (9)$$

gdzie $N(x)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

Wykorzystując własności dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego oraz oznaczając $\hat{\mu} = \mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2$, otrzymuje się:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{2} + \frac{\sigma e^{-\frac{\hat{\mu}^2}{2\sigma^2}t}}{\sqrt{2\pi t \hat{\mu}}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{\hat{\mu}^2} \frac{1}{t}\right) \left[2N\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma} \sqrt{t}\right) - 1\right] \quad (10)$$

lub inaczej:

$$E[ROT_A^X(t)] = \frac{\sigma e^{-\frac{\hat{\mu}^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi t \hat{\mu}}} + \frac{\sigma^2}{2\hat{\mu}^2} \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\hat{\mu}^2} \frac{1}{t}\right) N\left(\frac{\hat{\mu}}{\sigma} \sqrt{t}\right). \quad (11)$$

Asymptotyczne rozwinięcie oczekiwanego odsetka czasu przebywania dla krótkiego horyzontu czasu $t \ll 1$, można otrzymać korzystając z rozwinięcia funkcji $N(x)$ w szereg [10]:

$$N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{i!(2i+1)}. \quad (12)$$

Stosując wzór (12) znajduje się:

$$E[ROT_A^X(t)] \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{\hat{\mu}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{t}. \quad (13)$$

Warto zaznaczyć, że ze wzoru (9), w przypadku gdy $\hat{\mu} = 0$

$$\forall t > 0 \quad E[ROT_A^X(t)] = \frac{1}{2}. \quad (14)$$

W przypadku $t \gg 1$ znajduje się:

$$E[ROT_A^X(t)] \approx \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2\hat{\mu}^2} \frac{1}{t} & \text{gdy } \hat{\mu} < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } \hat{\mu} = 0 \\ 1 - \frac{\sigma^2}{2\hat{\mu}^2} \frac{1}{t} & \text{gdy } \hat{\mu} > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ponadto należy zauważyć, że pochodna z oczekiwanego odsetka czasu

przebywania ze względu na $\alpha = \frac{\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} E[ROT_A^X(t)] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{t} \int_0^t N(\alpha\sqrt{z}) dz \right] = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \alpha} N(\alpha\sqrt{z}) dz = \frac{1}{t} \int_0^t N'_\alpha(\alpha\sqrt{z}) \sqrt{z} dz > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

jest większa od zera. Oznacza to, że oczekiwany odsetek czasu przebywania jest

rosnącą funkcją parametru $\alpha = \frac{\mu - a - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$.

Jeśli przyjmuje się wartość parametru $a = 0$ ($A = [1, +\infty)$), to oczekiwany

odsetek czasu przebywania jest rosnącą funkcją ilorazu $\frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$. Należy zauważyć, że iloraz ten ma ciekawą interpretację:

$$\frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{\sigma\Delta t} = \frac{E\left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)}{D\left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)}, \quad (17)$$

gdzie:

$E(\bullet)$ – wartość oczekiwana zmiennej,

$D(\bullet)$ – odchylenie standardowe zmiennej,

czyli jest on odwrotnością współczynnika zmienności logarytmicznej stopy zwrotu. W pracy [7] przeprowadzono dyskusję własności odwrotności zmodyfikowanego współczynnika zmienności jako miary ryzyka i wykazano, iż ma on znacznie lepsze własności niż współczynnik zmienności.

Ponadto, przyjmując $a = r$ (r – stopa wolna od ryzyka) znajdujemy:

$$\alpha = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma}. \quad (18)$$

Powyższą wielkość można interpretować jako premię za ryzyko $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - r$, przypadającą na jednostkę ryzyka (oczekiwaną logarytmiczną stopą zwrotu jest $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$). Można zatem stwierdzić, że w tym przypadku oczekiwany odsetek czasu przebywania jest rosnącą funkcją premii za ryzyko przypadającej na jednostkę ryzyka (mierzonego odchyleniem standardowym logarytmicznej stopy zwrotu). Oznacza to, że porządkowanie instrumentów ze względu na oczekiwany czas przebywania ich ceny ponad krzywą $S_0 e^{rt}$ jest równoważne porządkowaniu ze względu na premię za ryzyko przypadającą na jednostkę ryzyka.

Poniżej zaprezentowano jeszcze inne podejście do problemu porządkowania instrumentów. Dla ustalonej wartości parametru a (ustalonego obszaru: $A_t = [S_0 e^{at}, +\infty)$) instrumenty będą porządkowane ze względu na rosnącą wartość oczekiwanego odsetka czasu przebywania.

Alternatywnie można ustalić interesujący nas poziom oczekiwanego odsetka czasu przebywania ROT . Następnie wyznacza się (na podstawie danych empirycznych) taką wartość parametru a (kształt obszaru A), dla którego średni (oczekiwany) odsetek czasu przebywania jest równy ustalonej na początku wartości ROT . Im większa wartość w ten sposób wyznaczonego parametru a , tym bardziej atrakcyjny instrument. Jeżeli występują dwa instrumenty, dla których zachodzi $a_{X_1} > a_{X_2}$ $E\left(ROT_{X_1}^{A(a_{X_1})}\right) = E\left(ROT_{X_2}^{A(a_{X_2})}\right) = ROT$, to $E\left(ROT_{X_1}^{A(a_{X_2})}\right) > E\left(ROT_{X_2}^{A(a_{X_2})}\right)$. Oznacza to, że instrument X_1 jest z punktu widzenia oczekiwanego odsetka czasu przebywania bardziej atrakcyjny od instrumentu X_2 .

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano konstrukcję oraz analizę miary atrakcyjności instrumentów finansowych opartą na czasie przebywania procesu ceny instrumentu w ustalonym obszarze. W pracy rozważono oczekiwany odsetek czasu przebywania procesu cen w obszarze $A_t = [S_0 e^{at}, +\infty)$ ograniczonym krzywą wykładniczą z parametrem a , który może być utożsamiany z miarą atrakcyjności instrumentu finansowego. Przedstawione podejście zostało zaprezentowane na przykładzie geometrycznego ruchu Browna. Pozwoliło to na otrzymanie analitycznych wyników oraz na porównanie z klasycznymi miarami atrakcyjności.

Dalszych badań wymaga analiza empiryczna zaproponowanej miary atrakcyjności.

Literatura

- [1] Bayraktar E., Young V.R., *Optimal Investment Strategy to Minimize Occupation Time*, „Annals Operations Research” 2010, Vol. 176, s. 389-408.
- [2] Cai N., Chen N., Wan X., *Occupation Times of Jump-Diffusion Processes with Double Exponential Jumps and the Pricing of Options*, „Mathematics of Operations Research” 2010, Vol. 35, No. 2, s. 412-437.

-
- [3] Czernik T., *Czas przebywania – potencjalne zastosowania. Geometryczny ruch Browna*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Katowice 2013.
- [4] Czernik T., Iskra D., *Wartość zagrożona instrumentu z uwzględnieniem efektu pamięci modelowanym wielostanowym procesem Markowa. Badania symulacyjne* [w:] *Matematyczne aspekty ekonomii. Ryzyko – reasekuracja – równowaga*, red. W. Kulpa, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa 2008, s. 9-21.
- [5] Czernik T., Iskra D., *Wartość zagrożona portfela akcji – dwustanowa dynamika ze stanem pochłaniającym* [w:] *Badania ekonometryczne w teorii i praktyce*, red. A.S. Barczak, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice 2010, s. 286-297.
- [6] Czernik T., Iskra D., *Maximal Loss and Value at Risk. Portfolio analysis – a comparison* [w:] *Mathematical, Econometrical and Computer Methods in Finance and Insurance 2010*, red. A.S. Barczak, T. Węgrzyn, Publisher of the University of Economics in Katowice, Katowice 2012, s. 16-35.
- [7] Czernik T., *Zysk przed stratą – miara ryzyka z rodziny FPRM* [w:] *Metody matematyczne i ekonometryczne metody oceny ryzyka finansowego*, red. P. Chrzan, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice 2007, s. 29-39.
- [8] Darling D.A., Kac M., *On occupation Times for Markoff Processes*, „Transactions of AMS” 1957, Vol. 84, s. 444-458.
- [9] Oksendal B., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer, Berlin 2010.
- [10] Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W., *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [11] Pechtl A., *Distributions of Occupation Times of Brownian Motion with Drift*, „Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences” 1999, Vol. 3(1), s. 41-62.
- [12] Sharp N.J., Johnson P.V., Newton D.P., Duck P.W., *A New Prepayment Model (with Default): An Occupation-Time Derivative Approach*, „Journal Real Estate Finance Economics” 2009, Vol. 39, s. 118-145.
- [13] *Risk Measures for the 21st Century*, ed. G. Szegö, John Wiley & Sons, New York 2004.

THE ANALYSIS OF THE ATTRACTIVENESS MEASURE OF FINANCIAL INSTRUMENTS BASED ON THE OCCUPATION TIME IN THE AREAS BOUNDED BY THE EXPONENTIAL CURVE

Summary

Paper presents the construction and analysis of the attractiveness measure of financial instruments based on the occupation time of the price process. Analysis has been conducted under assumption that stock price is a geometric Brownian motion process. Asymptotic formulas and relation to classical risk measures has been shown.