



Daniel Iskra

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Finansów i Ubezpieczeń
Katedra Matematyki Stosowanej
daniel.iskra@ue.katowice.pl

Tadeusz Czernik

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Finansów i Ubezpieczeń
Katedra Matematyki Stosowanej
tadeusz.czernik@ue.katowice.pl

WARTOŚĆ ZAGROŻONA PORTFELA INWESTYCYJNEGO SZACOWANA NA PODSTAWIE DANYCH WYSOKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI – BADANIA EMPIRYCZNE

Streszczenie: W opracowaniu zaprezentowano wyniki szacowania wartości zagrożonej spółek oraz optymalnych portfeli inwestycyjnych. Badania przeprowadzono na minutowych notowaniach spółek wchodzących w skład indeksu S&P100. W symulacjach uwzględniono dwa podejścia konstrukcji empirycznych rozkładów logarytmicznej stopy zwrotu użytych do wyznaczania wartości zagrożonej. W pierwszym z nich rozpatrywany szereg zawierał kolejne notowania cen akcji. W podejściu drugim w konstrukcji rozkładów empirycznych dokonano podziału dni na części i wyznaczano rozkład na podstawie danych z wybranych części dnia sesyjnego (np. z jednej godziny) z kilku, kilkunastu dni. W wyniku przeprowadzonych badań wykazano, iż w pewnych przypadkach (użyte podejście, zakres parametrów) zgodność oszacowanej wartości zagrożonej z realnymi stratami była wysoka.

Słowa kluczowe: wartość zagrożona, optymalny portfel inwestycyjny, dane wysokiej częstotliwości.

Wprowadzenie

W naukach ekonomicznych zarządzanie ryzykiem przedsięwzięć inwestycyjnych stanowi ważny aspekt. Każdy element zarządzania ryzykiem, zaczynając od rozpoznania zagrożenia, poprzez jego kwantyfikację, a na optymalizacji i monitoringu kończąc, ma duże znaczenie. Z tego też powodu wraz z upływem czasu powstawało coraz więcej miar pozwalających na kwantyfikację ryzyka inwestycyjnego. Jedną z nich, użytą w niniejszym opracowaniu, jest wartość za-

grożona, która stała się popularna pod koniec ubiegłego wieku. W dużej mierze do jej popularyzacji przyczynił się Bank JP Morgan, publikując metodologię zarządzania ryzykiem RiskMetrics.

Wartość zagrożona (Value at Risk, VaR) dla ustalonego prawdopodobieństwa α (poziom tolerancji VaR) i ustalonego horyzontu t jest zdefiniowana następująco [Wilmott, 2006]:

$$P(S_0 - S_t \geq VaR(\alpha, t)) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie S_0 , S_t jest odpowiednio wartością początkową i końcową procesu ceny instrumentu finansowego.

Innymi słowy wartość zagrożona jest to taka strata wartości rynkowej, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia dla ustalonego przedziału czasu jest równe zadanemu poziomowi tolerancji [Jorion, 2001; Holton, 2003; Iskra, 2011].

W literaturze przedmiotu [Jorion, 2001; Holton, 2003; Alexander, 2008] można znaleźć kilka podejść wyznaczania wartości zagrożonej, a dokładniej kilka podejść do aproksymacji rozkładu prawdopodobieństwa rozważanej wielkości, za pomocą którego szacuje się wartość zagrożoną. Można przyjąć między innymi wprost rozkład teoretyczny badanej cechy, wykorzystać symulacje Monte Carlo czy też symulacje historyczne. Dokładność oszacowanej wartości zagrożonej jest tym większa, im aproksymowany rozkład badanej cechy dokładniej odzwierciedla rozkład rzeczywisty tej wielkości.

Tematyka pomiaru ryzyka inwestycyjnego na podstawie danych wysokiej częstotliwości jest bardzo popularna zarówno wśród naukowców, jak i praktyków [Huang, 2013; So, 2013].

Celem przeprowadzonych badań było wyznaczanie wartości zagrożonej instrumentów finansowych na podstawie szeregów o wysokiej częstotliwości (minutowe notowania cen akcji). Wartość zagrożoną szacowano z empirycznych rozkładów logarytmicznych stóp zwrotu akcji (symulacje historyczne). Kolejnym krokiem była optymalizacja portfela inwestycyjnego (dwuskładnikowego) ze względu na wartość zagrożoną.

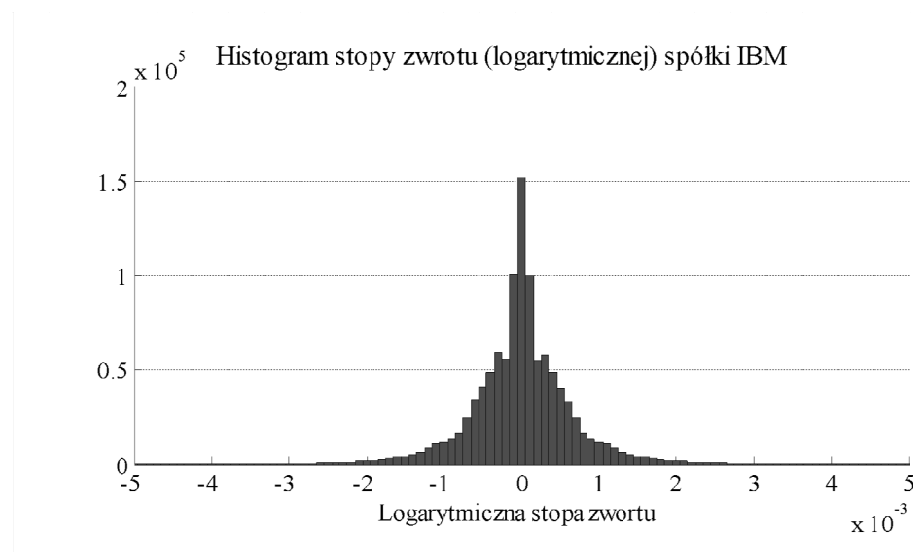
W wyniku przeprowadzonych badań wykazano, iż w pewnych przypadkach (użyte podejście, zakres parametrów) zgodność oszacowanej wartości zagrożonej z realnymi stratami była wysoka.

1. Wartość zagrożona akcji – wyniki badań empirycznych

W badaniach szacowano, a następnie testowano zgodność wartości zagrożonej dla szeregu notowań minutowych. Do badań dobrano losowo 50 spółek wchodzących w skład indeksu S&P100 notowanych pomiędzy początkiem 2000 a końcem 2011 roku. Jeżeli w danym instrumencie dla jakiejś minuty notowanie nie wystąpiło, lukę uzupełniano notowaniem z minuty poprzedniej (średnio około 97% notowań w szeregach występowało w odstępach minutowych). W ten sposób wszystkie spółki posiadały w każdym dniu tyle samo notowań, co usprawniło obliczenia zwłaszcza w przypadku portfela inwestycyjnego.

Wartość zagrożoną wyznaczano na podstawie rozkładów empirycznych („symulacje historyczne”) logarytmicznych stóp zwrotu akcji. Do wyboru powyższego podejścia przyczyniły się dwa aspekty. Pierwszy to brak parametryzacji (pomijamy w tej metodzie estymację parametrów modelu oraz testy zgodności rozkładów). Drugi aspekt polegał na sprawdzeniu, czy rozkłady empiryczne minutowych stóp zwrotu można aproksymować za pomocą wybranych rozkładów, takich jak: normalny, t-studenta czy Cauchy’ego.

W przypadku danych o wysokiej częstotliwości rozkłady stóp zwrotu nie są jednak typowe. Można to zauważyć na poniżej przedstawionych histogramach minutowych logarytmicznych stóp zwrotu w przypadku spółki IBM.

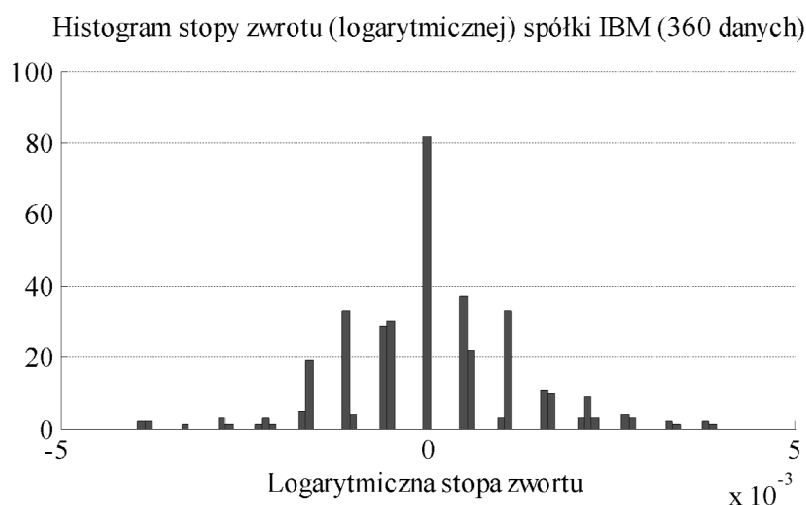


Rys. 1. Histogram logarytmicznej stopy zwrotu spółki IBM

Źródło: Opracowanie własne.

Z rysunku wynika, że ilość stóp bliskich zero jest znacznie większa od pozostałych wariantów. Do takiego stanu rzeczy przyczyniają się właśnie stopy zerowe, których ilość jest istotnie większa od zera (czy też od stóp o dowolnie innej ustalonej wartości). Dla spółki IBM zaobserwowano około 14% stóp zerowych. Stan taki przyczynia się do nietrywialnej postaci rozkładu w jego centralnej części. Generalnie średni odsetek występowania stóp zerowych w badanych spółkach wyniósł w przybliżeniu 25%.

Na rysunku 2 przedstawiono histogram z notowań zaobserwowanych w pierwszym dniu analizowanego okresu (360 notowań).



Rys. 2. Histogram logarytmicznej stopy zwrotu spółki IBM (360 notowań)

Źródło: Opracowanie własne.

Jak można zauważyć, stopy zwrotu skupiają się wokół niewielkiej ilości wartości. Wynika to z faktu, iż zmiany cen są wielokrotnością pewnej ustalonej odgórnie wielkości.

Opisana powyżej sytuacja prawdopodobnie przyczynia się do faktu, iż próba aproksymacji rozkładu empirycznego wybranymi przez autorów rozkładami teoretycznym nie przyniosła pozytywnego efektu.

W badaniach rozpatrzono bowiem szeregi czasowe zawierające minutowe dane o długości od 60 danych (1 godzina) do 7200 danych (120 godzin, 20 dni), zwiększając za każdym razem szereg o 60 danych (dane z dodatkowej godziny). Jak zaznaczono wcześniej, notowania pochodziły z okresu pomiędzy początkiem 2000 a końcem 2011 roku, z godzin od 10.00 do 16.00. Wszystkich notowań by-

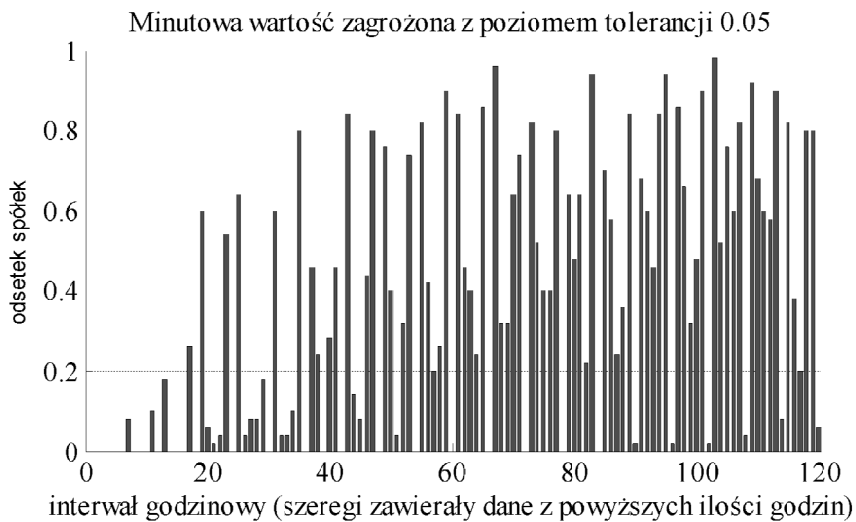
ło około jednego miliona w każdej spółce. Rozpatrywanie dłuższych okresów niż 20 dni jest niewskazane ze względu na przestarzałe informacje niesione przez najstarsze dane. Należy także zaznaczyć, że wybrane okresy (każdy przypadek), np. 60-minutowe, nie miały części wspólnych, tzn. okno z danymi nie było przesuwane o jedną daną, tylko o cały blok 60 danych, natomiast w przypadku okresów najdłuższych każdorazowo o 7200 danych.

Do weryfikacji jakości aproksymacji wykorzystano test Kołmogorowa-Smirnowa (Kołmogorowa) [Wywiał, 2004]. Hipoteza zerowa w tym teście zakłada brak istotnych różnic pomiędzy rozkładem empirycznym a założonym rozkładem teoretycznym. Jeżeli parametry rozkładu teoretycznego są znane, dystrybuanta statystyki jest wyznaczona analitycznie. W przypadku gdy parametry rozkładu teoretycznego są estymowane na podstawie próby, do której rozkład ten jest dopasowywany, należy wyznaczyć poprawkę polegającą na oszacowaniu rozkładu statystyki metodą symulacyjną i skorygowaniu wartości krytycznych (w tym przypadku rozkład statystyki będzie bardziej skoncentrowany). Dla rozkładu normalnego powyższy test z naniesioną poprawką nosi nazwę testu Lillieforsa (Kołmogorowa-Lillieforsa) [Wywiał, 2004]. W przypadku rozkładu t-studenta i Cauchy'ego rozkład statystyki testu Kołmogorowa-Smirnowa wyznaczano symulacyjnie (symulacje Monte Carlo) na podstawie wygenerowanych 5000 realizacji.

W przypadku rozkładu normalnego tylko nieliczne spółki wykazują poprawną aproksymację w co najmniej 20% przypadków, a dla żadnej spółki odsetek ten nie przekracza 60%. Średni odsetek przypadków z poprawną (co do testów zgodności) aproksymacją za pomocą rozkładu normalnego wynosi 16%, a odchylenie standardowe 12%. Należy także pamiętać, że w przypadku próbek mało licznych (60 danych) wyniki charakteryzują się mniejszą wiarygodnością. Użycie rozkładu t-studenta oraz rozkładu Cauchy'ego do aproksymacji rozkładu empirycznego daje gorsze wyniki niż w przypadku rozkładu normalnego, a jest przy tym znacznie bardziej czasochłonne obliczeniowo ze względu na konieczną do wprowadzenia poprawkę (typu Lillieforsa) w teście Kołmogorowa-Smirnowa.

Reasumując, istotna ilość stóp zerowych oraz nietrywialna postać rozkładu może się przełożyć na małą ilość przypadków poprawnej aproksymacji danych empirycznych wybranymi (typowymi) rozkładami teoretycznymi. Z drugiej strony użycie bardziej złożonych rozkładów (np. mieszaniny kilku rozkładów) czy też procesów stochastycznych do opisu dynamiki ceny, o większej ilości parametrów, oznacza zwiększenie czasochłonności procedury estymacji, a zarazem procedury testowania (co może stanowić problem w przypadku prognoz *VaR* dla krótkich horyzontów). Opisane wnioski przyczyniły się do wyboru przez autorów symulacji historycznej do szacowania wartości zagrożonej.

W dalszej części na podstawie szeregów czasowych z logarytmicznymi stopami zwrotu o długości 60, 120, 180, ..., 7200 danych (odpowiednio dane z 1, 2, 3, ..., 120 godzin) zweryfikowano poprawność oszacowanej wartości zagrożonej na podstawie symulacji historycznej. W tym celu użyto testu Kupca z poziomem istotności 0.05 [Campbell, 2005]. Dla lepszej przejrzystości wyniki przedstawiono w postaci wykresu. Na osi OX zaznaczono interwał czasu (w godzinach), z którego logarytmiczne stopy zwrotu posłużyły do konstrukcji rozkładu empirycznego, a następnie do oszacowania jednogodzinowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji 0.05. Na osi OY zaznaczono odsetek spółek (wszystkich było 50), w których testy wartości zagrożonej pozytywnie zweryfikowały zgodność prognoz z rzeczywistymi stratami.



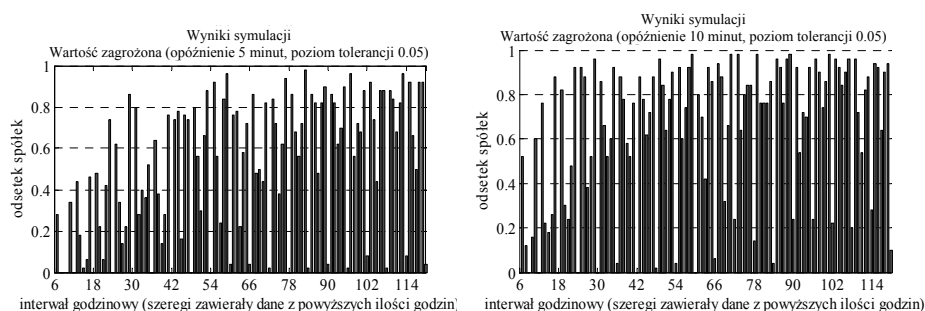
Rys. 3. Odsetek spółek wykazujących zgodność (co do testu Kupca) minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$

Źródło: Opracowanie własne.

Jak widać na powyższym wykresie, odsetek spółek, w których testy wykazały zgodność wartości zagrożonej z realnymi stratami, nie jest stabilny ze względu na zmianę ilości danych w rozkładach empirycznych. Dla małej ilości danych testy wartości zagrożonej nie wykazują zgodności. Dopiero niektóre przypadki, w których empiryczne rozkłady stóp zwrotu konstruowano na podstawie notowań z 40 godzin lub z jeszcze dłuższych interwałów, wykazywały zgodność w około 80%.

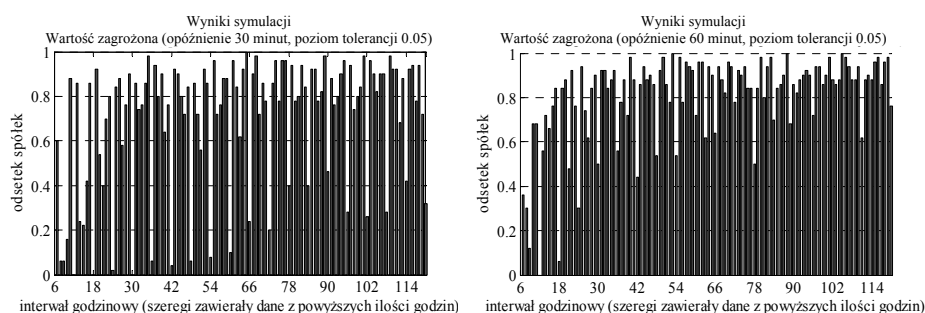
W przypadkach, w których empiryczne rozkłady stóp zwrotu zawierały odpowiednio dane z 6, 12, 18, ..., 60, 66, 72, ..., 112, 120 godzin (szeregi zwiększane o dane z sześciu dodatkowych godzin, przy czym początek tych szeregów zawsze był pierwszym notowaniem danego dnia), dla przypomnienia notowania obserwowano pomiędzy godziną 10.00 a 16.00 w każdym dniu, odsetek spółek z pozytywnie zweryfikowanymi prognozami wartości zagrożonej był minimalny, a właściwie w większości przypadków zerowy. Sytuacja taka jest spowodowana prawdopodobnie „efektem dnia następnego” (nazwa na użytek opracowania), tzn. w tych przypadkach prognozowano wartość zagrożoną na kolejną minutę, z tym że kolejna minuta oznaczała już pierwsze notowanie dnia następnego. Dołączając do rozkładu dane z pierwszej godziny dnia następnego, wyniki znacznie się poprawiały (odsetek spółek z pozytywnie zweryfikowaną wartością zagrożoną, co do testów zgodności, wynosił około 80%), jednak wraz ze stopami z kolejnych godzin odsetki te malały, po czym znów rosły, żeby ostatecznie spaść prawie do zera po dołączeniu do szeregu danych z całego kolejnego dnia (czyli do przypadku prognozy *VaR* na pierwsze notowanie kolejnego dnia).

Powyższe wyniki dotyczyły porównania wartości zagrożonej z realnymi stratami w następnym notowaniu. Jednak w przypadku rozkładów empirycznych konstruowanych z większej ilości danych nie powinna zachodzić potrzeba wyznaczenia wartości zagrożonej wraz z każdą nową obserwacją. Kilka czy też kilkanaście nowych danych nie ma istotnego wpływu na postać rozkładu skonstruowanego np. z 1000 czy większej ilości danych. W przeprowadzonych symulacjach utrzymywano prognozę jednogodzinowej wartości zagrożonej przez kolejne 60 minut. Wartość zagrożona była zawsze szacowana dla horyzontu jednogodzinnego, natomiast prognoza ta nie była zmieniana przez kolejne 60 minut. Na poniższych wykresach przedstawiono odsetek spółek, w których testy wartości zagrożonej pozytywnie zweryfikowały zgodność prognozy *VaR* ze zrealizowaną jednogodzinną stopą zwrotu obliczoną odpowiednio po 5, 10, 30 i 60 minutach od oszacowania wartości zagrożonej oraz na poziomie tolerancji równym 0.05. Na potrzeby opracowania w opisach wykresów do przytoczonych przypadków zostanie użyta nazwa „opóźnienie”, tzn. opóźnienie 5 minut oznacza wyniki w przypadku testów wartości zagrożonej w stosunku do zrealizowanej stopy zwrotu po pięciu minutach od momentu wyznaczenia *VaR*.



Rys. 4. Wyniki zgodności szacowanej jednodominutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ i zrealizowaną jednodominutową stopą zaobserwowaną po 5 i 10 minutach od momentu wyznaczenia VaR

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 5. Wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ w odniesieniu do zrealizowanej jednodominutowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia VaR

Źródło: Opracowanie własne.

Można zauważyć, że opisana wcześniej relacja pomiędzy zgodnością prognozy wartości zagrożonej a ilością danych użytych do konstrukcji rozkładu empirycznego zachodzi także w tych przypadkach. Na wykresach widać także, iż w niektórych przypadkach zgodność prognoz wartości zagrożonej poprawia się wraz z przesunięciem/opóźnieniem zrealizowanej stopy zwrotu w stosunku do momentu, w którym szacowano jednodominutową wartość zagrożoną. Opisane relacje mogą sugerować pewną bezwładność układu (inwestorzy asymilują informację).

Innym podejściem do konstrukcji rozkładów empirycznych jest podział dni na części i konstrukcja rozkładu na podstawie danych z pewnego zakresu czasowego (np. tylko z jednej i tej samej godziny) z kilku, kilkunastu dni. Dlatego też obecnie dni podzielono na sześć części o długości godziny każda (w każdym dniu notowania obserwowano w ciągu sześciu godzin sesyjnych). Stąd też np.

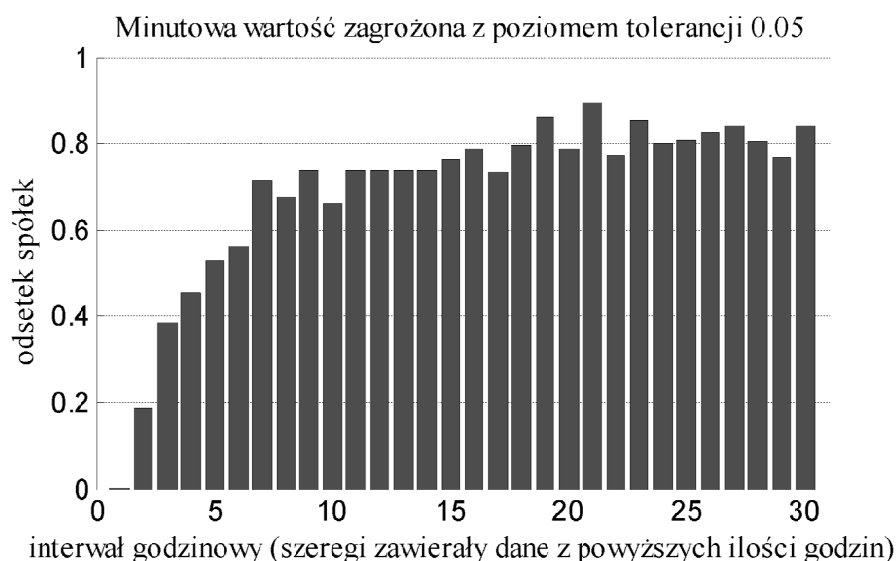
szereg danych, z których konstruowano rozkład empiryczny, składał się z logarytmicznych stóp zwrotu obserwowanych w ciągu kilku dni pomiędzy godziną 10.00 a 11.00 lub 11.00 a 12.00 itd.

Po podziale otrzymano sześć szeregów z notowaniami, co przekłada się na 15 możliwych par szeregów. Dla każdej pary przeprowadzono testy zgodności rozkładów (dla zwiększenia wiarygodności wyników przyjęto obecnie poziom istotności równy 0.01) testem Kołmogorowa-Smirnowa dla dwóch prób z populacji. Co najmniej w trzynastu parach dla każdej spółki zaobserwowano istotne różnice pomiędzy rozkładami. Można zatem stwierdzić, że w każdej godzinie dane pochodzą z innego rozkładu. Otrzymane wyniki dotyczą całego badanego okresu.

W przypadku krótszych szeregów z danymi sytuacja nie jest już tak klarowna. Badania wykazały, że im krótszy szereg, tym opisywane różnice (pomiędzy rozkładami) są mniej widoczne. Dla szeregów zawierających 7200 danych istotne różnice zaobserwowano średnio w około 10 parach (na 15 możliwych), dla szeregów o długości 1800 danych średnio już tylko w 7 parach, w szeregach z 720 danymi w 4 parach, a w najkrótszych szeregach średnio tylko w jednej parze.

Z powyższego nasuwa się wniosek, że w części rozpatrywanych przypadków notowania istotnie się zmieniają z godziny na godzinę i mogą utrzymać ten sam rozkład w kilku kolejnych dniach w przypadku danych z tej samej godziny. Fakt ten zostanie obecnie wykorzystany przy ponownym szacowaniu i weryfikacji zgodności wartości zagrożonej. Pomimo braku istotnych różnic pomiędzy najkrótszymi szeregami zostaną one uwzględnione w obecnych symulacjach (podobnie jak w poprzednim podejściu), ograniczona zostanie jednak ilość danych w dłuższych szeregach, do 1800 danych (poprzednio do 7200). Powodem takich ograniczeń jest długość próbki z wygasłymi prognozami wartości zagrożonej użytej do testów zgodności *VaR*. Ze względu na fakt, iż obecnie wybierano dane tylko z jednej godziny, a nie z całego dnia, narzucone ograniczenie pozwoli uzyskać (dla szeregów o 1800 danych) co najmniej 100 prognoz wartości zagrożonej, co jest istotne ze względu na wiarygodność testów *VaR* użytych w kolejnym kroku.

Na poniższych wykresach zaprezentowano otrzymane wyniki w obecnym podejściu do wyznaczania rozkładów empirycznych logarytmicznej stopy zwrotu badanych spółek. Należy pamiętać, że przypadek konstrukcji rozkładu empirycznego z danych obserwowanych, np. przez 30 godzin, oznacza dane obserwowane w ciągu jednej i tej samej godziny (np. tylko z drugiej godziny sesyjnej) w 30 kolejnych dniach. Przedstawione wyniki są zagregowane, zawierają bowiem łączne wyniki dla rozkładów empirycznych konstruowanych z danych obserwowanych podczas pierwszych, drugich, ..., szóstych godzin sesyjnych danych dni.

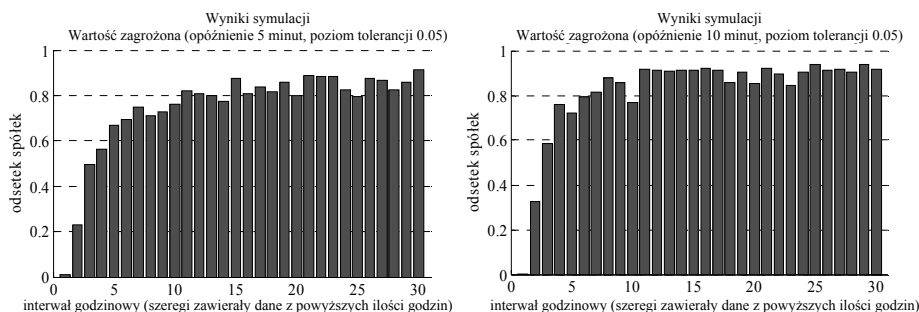


Rys. 6. Odsetek spółek wykazujących zgodność (co do testu Kupca) minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$

Źródło: Opracowanie własne.

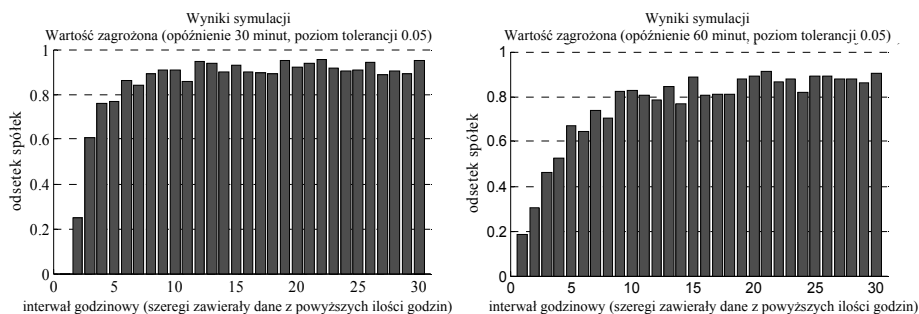
Na przedstawionym wykresie nie uwidaczniają się już wahania pomiędzy odsetkiem spółek z pozytywnie zweryfikowanymi prognozami wartości zagrożonymi w zależności od długości szeregu z danymi. Od pewnej ilości danych, około 1200 (notowania z 20 godzin, dokładniej z jednej godziny każdego z 20 dni), wyniki można uznać za wysokie (odsetek około 80%) i nieistotnie od siebie różne.

Podobnie jak wcześniej, prognozę jednoczasowej wartości zagrożonej utrzymywano przez kolejne 60 minut. Na poniższych wykresach przedstawiono odsetek spółek, w których testy wartości zagrożonej pozytywnie zweryfikowały zgodność VaR ze zrealizowaną jednoczasową stopą zwrotu obliczoną odpowiednio po 5, 10, 30 i 60 minutach od oszacowania VaR oraz na poziomie tolerancji równym 0.05. Wyniki wykazują, że i w tych przypadkach odsetek spółek z pozytywną weryfikacją zgodności zagrożonej jest wysoki (dla dłuższych szeregów) i nie różni się znacznie. Można także bez problemu wyznaczyć pewną minimalną długość szeregu z danymi, dla której skuteczność prognoz wyniesie około 80% zarówno dla minutowej wartości zagrożonej weryfikowanej za pomocą zrealizowanej jednoczasowej stopy zwrotu z kolejnego okresu, jak i minutowej stopy zaobserwowanej po 60 minutach od oszacowania wartości zagrożonej.



Rys. 7. Wyniki zgodności szacowanej jednodominutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ i zrealizowaną jednodominutową stopą zaobserwowaną po 5 i 10 minutach od momentu wyznaczenia VaR

Źródło: Opracowanie własne.

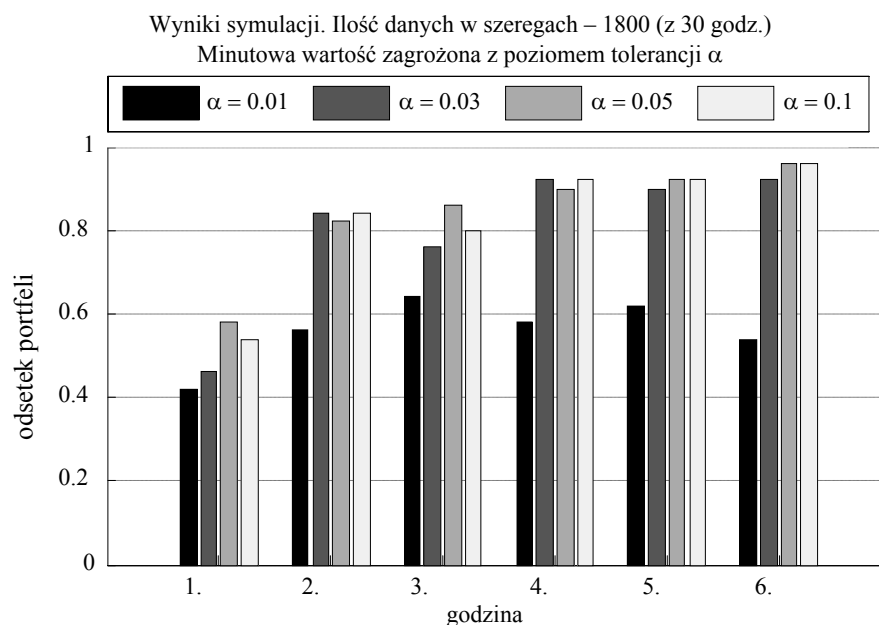


Rys. 8. Wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ w odniesieniu do zrealizowanej jednodominutowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia VaR

Źródło: Opracowanie własne.

Przeprowadzone badania powtórzono także dla poziomów równych 0.01, 0.03, oraz 0.1. Poza przypadkiem poziomu tolerancji 0.01 wyniki są podobne do przedstawionych powyżej. W przypadku poziomu tolerancji 0.01 odsetek spółek ze zgodną wartością zagrożoną jest istotnie niższy. Na rysunku 9 przedstawiono wyniki, które nie zostały zagregowane (dla wszystkich omawianych poziomów tolerancji). Zostały one rozdzielone ze względu na godzinę sesyjną (pierwszą, drugą, ..., szóstą) zawierającą logarytmiczne stopy zwrotu służące do konstrukcji rozkładów empirycznych. Wykres dotyczy wartości zagrożonej wyznaczanej z szeregow z danymi z 30 dni i porównanej (testy zgodności) do pierwszego notowania od momentu oszacowania VaR . Jak można na nim zauważyć, wyniki nie są jednakowe dla każdej części dnia. Dane z pierwszych godzin generują gorsze prognozy niż z pozostałych. Dla dłuższych „opóźnień” różnica ta się zaciera.

Pomimo tego, że w obecnym podejściu wyniki są lepsze niż w poprzednim, to nadal występują problemy z poprawnym oszacowaniem wartości zagrożonej na początek dnia następnego.



Rys. 9. Wyniki zgodności szacowanej wartości zagrożonej – $Var(\text{minuta}, \alpha)$ na podstawie 1800 danych (z 30 godzin) w zależności od godziny sesyjnej danego dnia

Źródło: Opracowanie własne.

Dla formalności w obecnym przypadku sprawdzono również możliwość aproksymacji omawianych rozkładów empirycznych wybranymi rozkładami teoretycznymi. Wszystkie założenia co do długości szeregów czasowych, postaci rozkładów czy ilości symulacji w generowaniu rozkładu statystyki testu Kołmogorowa-Smirnowa pozostały bez zmian. Jedyną różnicą jest wybór danych do rozkładu empirycznego, które obecnie pochodzą z jednej godziny każdego dnia. W przypadku rozkładu normalnego wyniki nieznacznie się poprawiły, jednak nadal nie są satysfakcjonujące. Na przykład w przypadku danych z pierwszej godziny jednego dnia średni odsetek poprawnych aproksymacji (co do testów istotności) wyniósł 25%, w przypadku trzeciej godziny 11%, a z ostatniej 17%. Gdy szeregi zawierały notowania z sześciu dni odpowiednio z tych samych godzin, średnie odsetki wyniosły: 2%, 0,5% oraz 1%. Dla dłuższych szeregów omawiane odsetki były jeszcze mniejsze. W przypadku rozkładu t-studenta oraz Cauchy'ego ilość zgodnych dopasowań jest nie większa niż dla rozkładu normalnego.

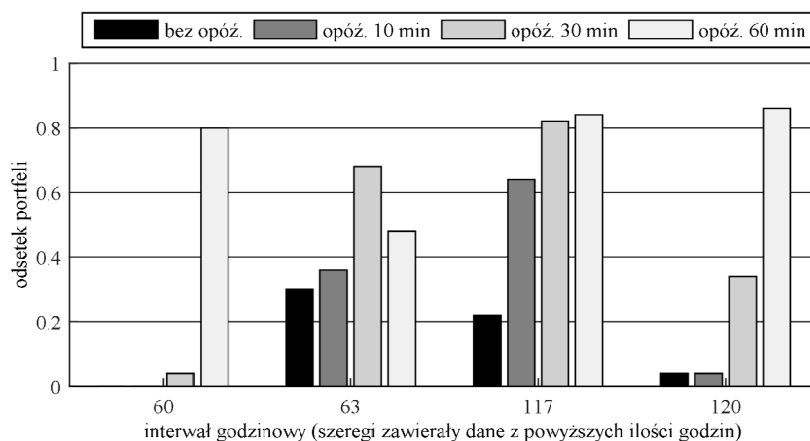
2. Optymalny portfel inwestycyjny ze względu na VaR – wyniki badań empirycznych

Kolejnym aspektem badań, który rozważali autorzy, jest ponowne szacowanie wartości zagrożonej, tym razem w przypadku portfela inwestycyjnego. Rezultaty badań wykażą, czy zaobserwowane prawidłowości dla pojedynczych spółek mogą dotyczyć także portfeli inwestycyjnych. Ponieważ analiza portfelowa zajmuje się między innymi optymalizacją strategii inwestycyjnych, autorzy rozważyli optymalne portfele z punktu widzenia wartości zagrożonej.

W portfelach wyznaczano skład tak, aby ich wartość zagrożona była minimalna dla ustalonego poziomu tolerancji (w badaniach ustalono poziom tolerancji odpowiednio 0.01, 0.03, 0.05, 0.10) i horyzontu jednonominutowego. Ponadto przeprowadzono testy zgodności wartości zagrożonej optymalnych portfeli.

Rozpatrzono 50 dwuskładnikowych portfeli, w skład których losowo dobrane dwie z 50 spółek wchodzących w skład indeksu S&P100 notowanych pomiędzy początkiem 2000 a końcem 2011 roku. Podobnie jak poprzednio, rozkłady empiryczne stóp zwrotu wyznaczano na podstawie notowań zawartych pomiędzy pewnymi momentami czasu oraz w drugim przypadku konstruowano rozkłady empiryczne po podziale dni na części (dokładniej na godziny) i używano tylko danych z tej samej godziny poszczególnych dni.

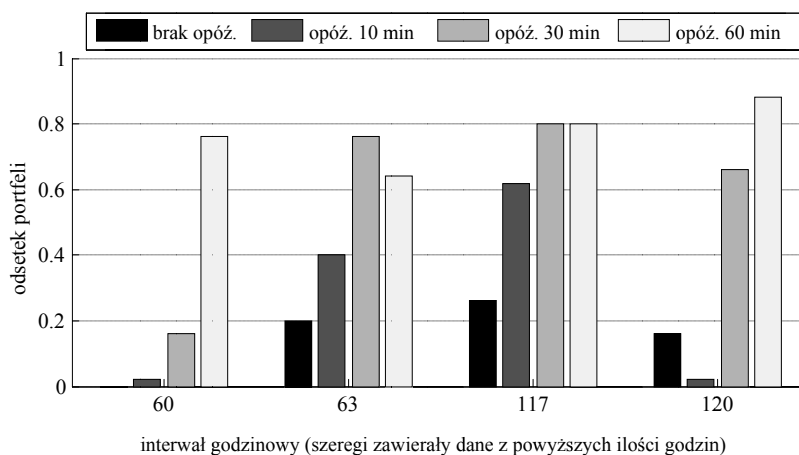
W pierwszym przypadku konstruowano rozkłady z 3600, 3780, 7020 i 7200 danych, co odpowiada notowaniom dokładnie z 60, 63, 117 i 120 godzin. Z badań dla pojedynczych akcji wynika, iż krótkie szeregi czasowe oraz szeregi, z których szacowano wartość zagrożoną dla notowań z dnia już następnego, nie dawały pozytywnych rezultatów. Stąd też wybrano szeregi dłuższe do konstrukcji rozkładów empirycznych w dwóch wariantach, mianowicie szacowano wartość zagrożoną dla dnia już następnego (przypadek z 60 i 120 godzinami) lub dla notowań rozpoczynających dokładnie drugą połowę dnia (przypadek z 63 i 117 godzinami). Na rysunku 10 przedstawiono wyniki testów (odsetek spółek z pozytywnie zweryfikowanym testem Kupca) w zależności od ilości danych, z których szacowano wartość zagrożoną i zrealizowanych wartości, odpowiednio po pierwszej, dziesiątej, trzydziestej i sześćdziesiątej minucie, użytych w testach zgodności. Wartość zagrożona była szacowana dla poziomu tolerancji 0,05 i horyzontu jednonominutowego.



Rys. 10. Wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ w odniesieniu do zrealizowanej jednoczynowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 1, 10, 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia *VaR*

Źródło: Opracowanie własne.

Jak można zauważyć, ponownie uwidacznia się pewna bezwładność układu. Przypadki, w których szacuje się wartość zagrożoną dla dnia już następnego (60 i 120 godzin), dają znacznie gorsze wyniki niż pozostałe. Dla pozostałych poziomów tolerancji uzyskane wyniki nie różnią się znacznie od przedstawionych. Na rysunku 11 zaprezentowano wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji 0.01 w odniesieniu do zrealizowanej jednoczynowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 1, 10, 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia *VaR*.

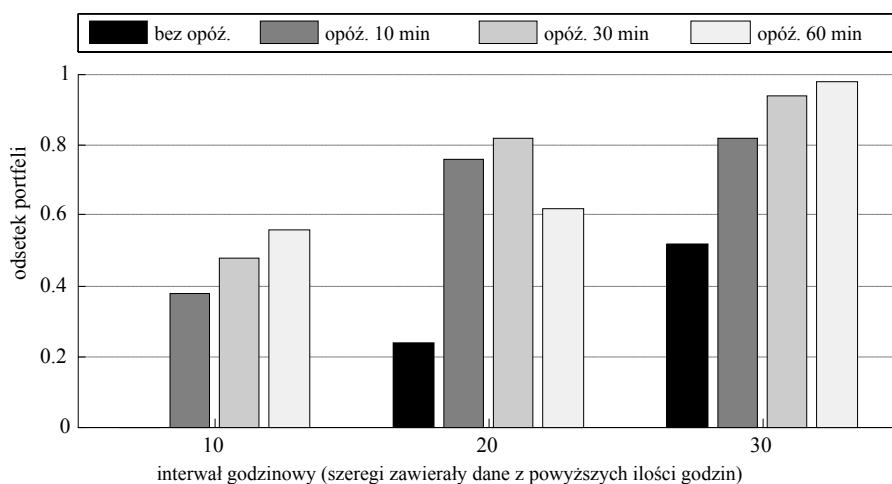


Rys. 11. Wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.01$ w odniesieniu do zrealizowanej jednoczynowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 1, 10, 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia *VaR*

Źródło: Opracowanie własne.

Rezultaty badań w przypadku konstrukcji rozkładów empirycznych z obserwacji w ciągu kilku dni wyłącznie z wybranej godziny zostały syntetycznie przedstawione na rysunkach 12 i 13. Obecnie rozkłady optymalnych portfeli inwestycyjnych wyznaczano odpowiednio z 300, 600, 1200 i 1800 danych, co odpowiada notowaniom dokładnie z 5, 10, 20 i 30 godzin (lub inaczej z notowań obserwowanych podczas jednej godziny na przestrzeni 5, 10, 20 i 30 dni).

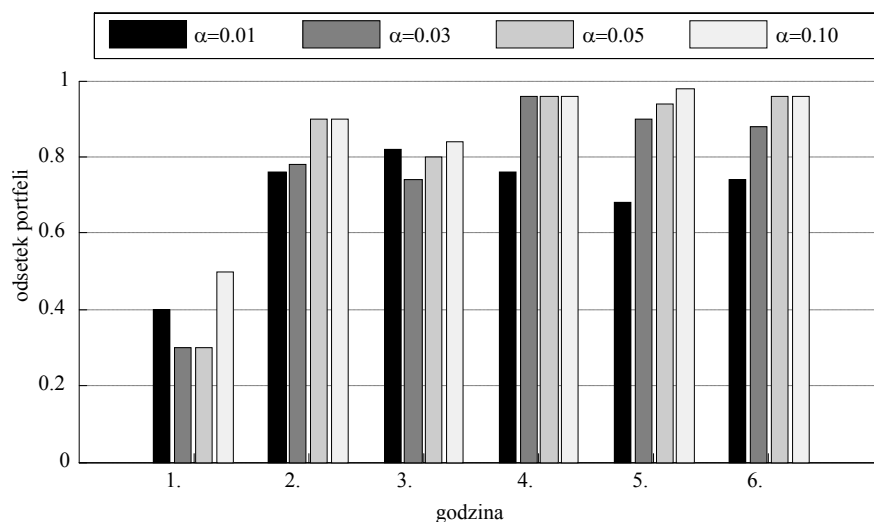
Na rysunku 12 przedstawiono zagregowane wyniki zawierające łączne wyniki dla rozkładów empirycznych konstruowanych z danych obserwowanych podczas pierwszych, drugich, ..., szóstych godzin sesyjnych danych dni w przypadku poziomu tolerancji wartości zagrożonej równej $\alpha = 0.05$. Dla pozostałych poziomów tolerancji wyniki były podobne (przypadek 5-dniowy (300 danych) został pominięty ze względu na wyniki nieistotnie większe od zera).



Rys. 12. Wyniki zgodności szacowanej minutowej wartości zagrożonej z poziomem tolerancji $\alpha = 0.05$ w odniesieniu do zrealizowanej jednoninutowej stopy zwrotu zaobserwowanej odpowiednio po 1, 10, 30 i 60 minutach od momentu wyznaczenia VaR

Źródło: Opracowanie własne.

Natomiast na rysunku 13 przedstawiono wyniki, które nie zostały zagregowane (dla wszystkich omawianych poziomów tolerancji). Zostały one rozdzielone ze względu na godziny sesyjne zawierające notowania służące do konstrukcji empirycznych rozkładów stóp zwrotu (pierwsza, druga, ..., szósta danych dni). Wykres dotyczy wartości zagrożonej wyznaczanej z szeregów z danymi z 30 dni i porównanej (testy zgodności) do pierwszego notowania od momentu oszacowania VaR .



Rys. 13. Wyniki zgodności szacowanej wartości zagrożonej – $VaR(\text{minuta}, \alpha)$ na podstawie 1800 danych (z 30 godzin) w zależności od godziny sesyjnej danego dnia

Źródło: Opracowanie własne.

Jak należało się spodziewać, podobnie jak w przypadku pojedynczych spółek na wykresie można zauważyć, iż odsetek optymalnych portfeli zweryfikowanych pod kątem zgodności jednogodzinnej wartości zagrożonej nie jest jednaki dla każdej godziny. Dane z pierwszych godzin generują gorsze prognozy niż z pozostałych, co zapewne po uśrednieniu przekłada się na nieco gorsze rezultaty w zagregowanych wynikach (rysunek 12). Również w przypadku portfeli dla dłuższych „opóźnień” różnica ta się zaciera. Za gorsze wyniki w przypadku pierwszej godziny częściowo mogą odpowiadać problemy z poprawnym oszacowaniem wartości zagrożonej dla pierwszej obserwacji z dnia następnego.

Niemniej jednak w przypadku wartości zagrożonej szacowanej zarówno dla pojedynczych instrumentów, jak i dla optymalnych portfeli podejście, w którym konstrukcja rozkładów empirycznych opiera się na obserwacjach z kilku dni wyłącznie z wybranej godziny, daje „stabilniejsze” wyniki ze względu na ilość danych użytych przy konstrukcji rozkładów.

Podsumowanie

W przedstawionym opracowaniu zaprezentowano wyniki szacowania wartości zagrożonej na podstawie symulacji historycznej. Badania przeprowadzono na minutowych notowaniach 50 losowo wybranych spółek wchodzących w skład indeksu S&P100 oraz w przypadku optymalizacji portfela dwuskładniko-

wego ze względu na minimalną wartość zagrożoną. W symulacjach uwzględniono dwa podejścia konstrukcji empirycznych rozkładów logarymicznej stopy zwrotu użytych do wyznaczania wartości zagrożonej. W pierwszym z nich dane z szeregu wybierano „liniowo”, tzn. rozpatrywany szereg zawierał notowania minuta po minucie. W podejściu drugim do konstrukcji rozkładów empirycznych dokonano podziału dni na części i konstruowano rozkład na podstawie danych z pewnego zakresu czasowego (np. tylko z jednej i tej samej godziny) z kilku, kilkunastu dni.

Drugi przypadek dawał zdecydowanie bardziej „stabilne” wyniki (efekt pory dnia). Odsetek spółek czy też optymalnych portfeli z poprawnie zweryfikowanymi prognozami wartości zagrożonej (co do testów zgodności) wynosił około 80% dla poziomów tolerancji pomiędzy 0.03 a 0.1. Dla mniejszych poziomów tolerancji wyniki ($\alpha = 0.01$) były zdecydowanie gorsze, zazwyczaj VaR był średnio niedoszacowany. Co istotne, otrzymane wyniki mogą sugerować pewną bezwładność układu (informacje docierają do inwestorów z pewnym opóźnieniem), ponieważ jednogminutowa wartość zagrożona była bardziej zgodna w przypadku zrealizowanej realnej wartości zaobserwowanej po upływie co najmniej pięciu minut niż w notowaniu kolejnym w stosunku do momentu wyznaczenia wartości zagrożonej.

W przeprowadzonych badaniach sprawdzono także możliwość aproksymacji rozkładów empirycznych logarymicznej stopy zwrotu z akcji rozkładem normalnym, t-studenta czy też rozkładem Couchy’ego, niestety bez powodzenia. W badaniach zakładano, że rozkład teoretyczny wyznacza się na podstawie całej dostępnej informacji, jednak wartość zagrożona nie dotyczy bezpośrednio całego zbioru obserwacji, lecz jego lewego ogona. Może zaistnieć sytuacja, w której rozkłady: teoretyczny i empiryczny nie wykażą zgodności, natomiast rozkłady warunkowe lub inaczej lewy ogon rozkładu teoretycznego mogłyby poprawnie aproksymować lewy ogon rozkładu empirycznego. Użycie warunkowych rozkładów mogłoby poprawić własności prognostyczne wartości zagrożonej, jednak należy się liczyć z czasochłonną procedurą estymacyjną i testującą zgodność rozkładów.

Literatura

- Alexander C. (2008), *Market Risk Analysis: Value at Risk Models. Vol. IV*, John Wiley & Sons, England.
- Campbell S.D. (2005), *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*, Federal Reserve Board, Washington.
- Holton G.A. (2003), *Value at Risk. Theory and Practice*, Academic Press, USA.

- Huang H., Lee T.-H. (2013), *Forecasting Value-at-Risk Using High-frequency Information*, "Econometrics", I, s. 127-140.
- Iskra D. (2011), *Value at Risk – Securities of Portfolio Optimization. A Geometric Brownian Motion Case* [w:] *Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, serie II number 83, Sede della Societa, Palermo, s. 199-208.
- Jorion P. (2001), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd edition, McGraw-Hill.
- So M.K.P., Xu R. (2013), *Forecasting Intraday Volatility and Value-at-Risk with High-frequency Data*, "Asia-Pacific Financial Markets", 20, s. 83-111.
- Wilmott P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Vol. 1, John Wiley & Sons, England.
- Wywiał J. (2004), *Wprowadzenie do wnioskowania statystycznego*, Wyd. Akademii Ekonomicznej, Katowice.

VALUE AT RISK OF THE INVESTMENT PORTFOLIO BASED ON HIGH FREQUENCY DATA – EMPIRICAL STUDIES

Summary: Paper presents results of estimating Value at Risk for stocks and the optimal investment portfolios. Study was conducted at the minute quotations of companies included in the S&P100 index. The simulations included two design approaches of empirical distributions of the logarithmic rate of return used to determine the value at risk. The first one takes into account consecutive price quotations. In the second price quotations were divided into empirical distributions days were divided into six groups (quotations which come from time interval e.g. 10 am-11 am from each consecutive day were transferred to the same data set). The research has shown that in certain cases the accuracy of the estimated value at risk of real loss was high.

Keywords: Value at Risk, optimal portfolio, high frequency data.