Katarzyna Budny
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

WSPÓŁCZYNNIK EKSCESU WEKTORA LOSOWEGO

Wprowadzenie

Jedną z podstawowych miar spłaszczenia czy też koncentracji rozkładu zmiennej losowej jednowymiarowej wokół średniej jest kurtoza.

Definicja 1. *Kurtoza* to iloraz czwartego momentu centralnego rozważanej zmiennej losowej oraz kwadratu jej wariancji:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \tag{1}$$

gdzie $\mu_4 = E\left[(X - E(X))^4\right]$. Wielkość ta jest również rozpatrywana jako miara grubości ogonów rozkładu prawdopodobieństwa.

Kurtozą czasem określa się stosunek momentu centralnego czwartego rzędu i kwadratu wariancji pomniejszony o liczbę 3, czyli o kurtozę zmiennej losowej o rozkładzie normalnym (por. Jakubowski, Sztencel, 2004). Dla tak zdefiniowanego parametru przyjmuje się także nazwę współczynnik ekscesu (eksces) zmiennej losowej.

Definicja 2 (por. Cramer, 1958). *Współczynnik ekscesu (eksces)* rozkładu jednowymiarowej zmiennej losowej to wielkość wyrażona jako:

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3. \tag{2}$$

Charakterystyka ta dla rozkładu normalnego jest równa zero. Współczynnik ekscesu jest więc miarą spłaszczenia rozkładu zmiennej losowej czy też grubości jego ogonów w porównaniu z rozkładem normalnym o tej samej wartości oczekiwanej i wariancji.

W opracowaniu zostanie zaproponowane uogólnienie pojęcia ekscesu na przypadek wielowymiarowy. Wykażemy, że charakterystyka ta posiada istotne, pożądane własności, analogiczne do własności współczynnika ekscesu zmiennej losowej jednowymiarowej.

1. Kurtoza wektora losowego

Przypomnijmy podstawowe definicje i twierdzenia związane z pojęciem kurtozy wektora losowego (Budny, 2009; Budny, Tatar, 2009). Dzięki niemu w dalszej części pracy zostanie sformułowana definicja współczynnika ekscesu wektora losowego.

W literaturze przedmiotu można spotkać kilka sposobów uogólnienia kurtozy na przypadek wielowymiarowy (między innymi Mardia, 1970; Srivastava, 1984). W tym opracowaniu będzie rozważane uogólnienie skonstruowane poprzez bezpośrednią analogię do postaci kurtozy jednowymiarowej zmiennej losowej (1). Definicja ta opiera się na pojęciu potęgi wektora zaproponowanemu przez J. Tatara (między innymi 1996; 1999).

Definicja 3. Dla dowolnego $v \in R^n$ oraz dowolnej liczby $k \in N_\circ = N \cup \{0\}$ *k-tą potęgę wektora v* definiujemy w następujący sposób:

$$v^o = 1 \in R \text{ oraz } v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v, & \text{dla } k - \text{nieparzystych} \\ \langle v^{k-1}, v \rangle, & \text{dla } k - \text{parzystych} \end{cases}.$$

Ograniczono się do przestrzeni wektorowej $(R^n, R, +, \cdot)$, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny w postaci:

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \,, \tag{3}$$

gdzie $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in R^n$.

Przy wykorzystaniu pojęcia potęgi wektora – analogicznie do przypadku jednowymiarowego – zostały zdefiniowane między innymi momenty centralne wektora losowego.

Definicja 4 (Tatar, 1996; 1999). *Moment centralny rzędu* r *wektora losowego* $X : \Omega \to R^n$ (o ile istnieje) to wielkość wyrażona przez:

$$\mu_{r,n}(X) = E\left[(X - EX)^r\right].$$

W szczególności moment centralny rzędu drugiego został określony jako wariancja wektora losowego.

Definicja 5 (Tatar, 1996; 1999). *Wariancją wektora losowego* $X : \Omega \to R^n$ nazywamy parametr:

$$D^2 X = \mu_{2,n}(X) = E\left[(X - EX)^2\right].$$

Zauważmy, że przy iloczynie skalarnym (3) wariancja wektora losowego $X = \left(X_1,...,X_n\right) : \Omega \to R^n$ przyjmuje postać:

$$D^2 X = \sum_{i=1}^{n} D^2 X_i .$$

Wielkość ta w literaturze jest także określana jako wariancja całkowita wektora losowego (por. Bilodeau, Brenner, 1999).

Za pomocą momentów centralnych wektora losowego definiujemy jego kurtozę. Załóżmy wobec tego, że dla wektora losowego $X : \Omega \to R^n$ istnieje moment centralny rzędu czwartego, tj. $\mu_{4,n}(X)$.

Definicja 6 (Budny, 2009; Budny, Tatar, 2009). *Kurtoza wektora losowego X* to wielkość wyrażona jako:

$$\beta_{2,n}(X) = \text{Kurt}X = \frac{\mu_4(X)}{\left(\mu_2(X)\right)^2} = \frac{E\left[(X - EX)^4\right]}{\left(D^2 X\right)^2}.$$

Zwróćmy uwagę, że dla *n = 1* definicja 6 jest tożsama z definicją 1.

W pracy Budny (w druku) wykazano, że kurtoza wektora losowego spełnia pożądane własności niezmienniczości względem skali i względem translacji. Ponadto w opracowaniu tym także ustalono dolne ograniczenie dla wartości kurtozy (analogiczne do przypadku jednowymiarowego). Własności te przedstawiają poniższe twierdzenia.

Twierdzenie 1 (Budny, w druku). Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \in R \setminus \{0\}$ oraz dowolnego wektora $b \in R^n$ prawdziwa jest równość:

$$\text{Kurt}(aX + b) = \text{Kurt}X .$$

Twierdzenie 2 (Budny, w druku). Niech $X : \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza $\beta_{2,n}(X)$.Wówczas $\beta_{2,n}(X) \geq 1$.

W przypadku wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym zostało także ustalone ograniczenie górne.

Twierdzenie 3 (Budny, 2012). Dla kurtozy wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym prawdziwe są następujące oszacowania:

$$1 \leq \beta_{2,n}(X) \leq 3 .$$

Kolejne twierdzenia przedstawiają postaci kurtozy dla wybranych typów rozkładów (Budny, Tatar, 2009). W twierdzeniu 4 rozważa się wektor losowy o stochastycznie niezależnych współrzędnych, z normalnymi rozkładami brzegowymi. W twierdzeniu 5 natomiast, przy zachowaniu niezależności współrzędnych, rozkłady brzegowe to rozkłady t-Studenta.

Twierdzenie 4 (Budny, Tatar, 2009). Niech $X = (X_1,...,X_n): \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym spełniającym warunki:

- $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ dla wszystkich $i \in \{1,2,...,n\}$

oraz:

- zmienne losowe $X_1,...,X_n$ są stochastycznie niezależne.

Wtedy:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^4}{\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^2 \sigma_j^2}. \tag{4}$$

Zauważmy, że jeśli dodatkowo $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$, to:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{2}{n}. \tag{5}$$

Twierdzenie 5 (Budny, Tatar, 2009). Rozważmy teraz wektor losowy $X = (X_1,...,X_n): \Omega \to R^n$, dla którego:

- $X_i \sim t_{\nu_i}$ (tzn. X_i ma rozkład t-Studenta z ν_i stopniami swobody), gdzie $\nu_i > 4$, dla wszystkich $i \in \{1,2,...,n\}$

oraz:

- zmienne losowe $X_1,...,X_n$ są stochastycznie niezależne.

Wówczas:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{6}{\nu_i - 4}\right)\left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\nu_i}{\nu_i - 2}\right)\left(\frac{\nu_j}{\nu_j - 2}\right)}. \tag{6}$$

Przy założeniu $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n = \nu > 4$ otrzymujemy postać:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{2 + \frac{6}{\nu - 4}}{n}. \tag{7}$$

Uogólnienie powyższych wyników można znaleźć w pracy Budny (2009), w której została przedstawiona postać kurtozy wektora losowego o niezależnych współrzędnych.

Twierdzenie 6 (Budny, 2009). Jeżeli $X = (X_1, ..., X_n) : \Omega \to R^n$ jest wektorem losowym o stochastycznie niezależnych współrzędnych, to:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} (2 + \mathrm{Excess}X_i)(D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Kurt}X_i - 1)(D^2 X_i)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j}. \tag{8}$$

Zależność (8) ustala związek między kurtozą wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych i kurtozami jego współrzędnych, czy też równoważnie brzegowymi współczynnikami ekscesu.

Jako ostatnie twierdzenie tego rozdziału przypomnijmy, bardzo istotne dla dalszych rozważań, twierdzenie o postaci kurtozy dla wielowymiarowego rozkładu normalnego.

Twierdzenie 7 (Budny, 2012). Kurtoza wektora losowego $X : \Omega \to R^n$ o wielowymiarowym rozkładzie normalnym z wektorem wartości oczekiwanych m oraz macierzą wariancji-kowariancji:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

wyraża się formułą:

$$\mathrm{Kurt}X = 1 + \frac{2\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^4 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \rho_{ij}^2 \sigma_i^2 \sigma_j^2}{\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_i^2 \sigma_j^2}. \tag{9}$$

2. Współczynnik ekscesu (eksces) wektora losowego

Opierając się na definicjach i twierdzeniach zebranych w poprzednim rozdziale, przejdziemy teraz do sformułowania definicji współczynnika ekscesu wektora losowego oraz przeprowadzimy analizę jego podstawowych własności. Niech zatem $X = (X_1,...,X_n): \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje kurtoza (w rozumieniu definicji 6).

Definicja 7. *Współczynnik ekscesu (eksces) wektora losowego* $X = (X_1,...,X_n): \Omega \to R^n$ określamy w następujący sposób:

$$\gamma_{2,n}(X) = \text{Ekscess}X = \text{Kurt}X - \left(1 + \frac{2\sum_{i=1}^{n}\left(D^2 X_i\right)^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \rho_{ij}^2 D^2 X_i D^2 X_j}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j} \right). \quad (10)$$

Zauważmy, że dzięki postaci (9) kurtozy wielowymiarowego rozkładu normalnego uzyskujemy dwie istotne własności ekscesu wektora losowego spełnione także w przypadku jednowymiarowym. Własności te sformułujemy w postaci poniższych uwag.

Uwaga 1. Współczynnik ekscesu wektora losowego Ekscess $X: \Omega \to R^n$ można przedstawić w postaci:

$$\gamma_{2,n}(X) = \text{Ekscess}X = \text{KurtX} - \text{Kurt}N\,, \quad (11)$$

gdzie $N: \Omega \to R^n$ jest wektorem losowym o wielowymiarowym rozkładzie normalnym, z tym samym wektorem wartości oczekiwanych i macierzą wariancji-kowariancji, co wektor losowy X.

Uwaga 2. Jeżeli $X: \Omega \to R^n$ jest wektorem losowym o wielowymiarowym rozkładzie normalnym, to:

$$\text{Ekscess}X = 0\,.$$

Ze względu na fakt niezmienniczości kurtozy względem skali i względem translacji (twierdzenie1) oraz postać (11), otrzymujemy, niemal natychmiast, te same własności niezmienniczości dla współczynnika ekscesu wektora losowego.

Twierdzenie 8. Dla każdej liczby rzeczywistej $a \in R \setminus \{0\}$ oraz każdego wektora $b \in R^n$ zachodzi równość:

$$\text{Ekscess}(aX + b) = \text{Ekscess}X .$$

Twierdzenia 2 oraz 3 pozwalają natomiast na ustalenie ograniczenia dolnego dla wartości ekscesu wektora losowego. Ograniczenie to jest takie samo, jak w przypadku jednowymiarowym.

Twierdzenie 9. Niech zatem $X : \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym, dla którego istnieje współczynnik ekscesu $\gamma_{2,n}(X)$. Wówczas:

$$\gamma_{2,n}(X) \geq -2 .$$

Uwaga 3. Ograniczenie dolne dla ekscesu wektora losowego jest realizowane przez rozkład wektora losowego będącego zestawieniem n tych samych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym (zero-jedynkowym z $p = \frac{1}{2}$).

Dowód: Istotnie, dla rozważanego wektora losowego $X = (X_1,...,X_n) = (\xi,...,\xi) : \Omega \to R^n$ do postaci kurtozy prowadzą poniższe przekształcenia:

$$\beta_{2,n}(X) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} E\left[(X_i - EX_i)^2 (X_j - EX_j)^2\right]}{\left(D^2 X\right)^2} = \frac{n^2 E\left[(\xi - E\xi)^4\right]}{\left(nD^2 \xi\right)^2} = \text{Kurt}\xi . \quad (12)$$

Kurtoza zmiennej losowej $\xi : \Omega \to R$ o rozkładzie zero-jedynkowym ma postać:

$$\text{Kurt}\xi = \frac{\left(3p^2 - 3p + 1\right)}{p(1-p)} . \quad (13)$$

Dla $p = \frac{1}{2}$ otrzymujemy więc $\text{Kurt}\xi = \dfrac{\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 1$ wobec (12) $\beta_{2,n} = 1$.

Zauważmy ponadto, że macierz wariancji-kowariancji wektora losowego X jest macierzą w postaci:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} p(1-p) & \dots & 1\cdot p(1-p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1\cdot p(1-p) & \dots & p(1-p) \end{bmatrix}.$$

Kurtoza wektora losowego $N = \Omega \to R^n$ o wielowymiarowym rozkładzie normalnym z tą samą macierzą kowariancji wynosi 3. Ostatecznie więc:

$$\text{Ekscess}X = \beta_{2,n} - \text{Kurt}N = 1 - 3 = -2.$$

Uwaga 4. Nie ma górnego ograniczenia dla wartości współczynnika ekscesu wektora losowego.

Dowód. Rozważmy wektor losowy będący zestawieniem n tych samych zmiennych losowych o rozkładzie dwupunktowym (zero-jedynkowym) z prawdopodobieństwem sukcesu p. Z postaci (13) wynika, że jeżeli $p \to 0^+$ lub $p \to 1^-$, to $\gamma_{2,n} = \beta_{2,n} - 3 \to +\infty$.

Na koniec wyznaczymy postać ekscesu wektora losowego o stochastycznie niezależnych współrzędnych.

Twierdzenie 10. Niech $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to R^n$ będzie wektorem losowym o stochastycznie niezależnych współrzędnych. Wówczas:

$$\gamma_{2,n}(X) = \text{Ekscess}X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \text{Excess}X_i \cdot \left(D^2 X_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} D^2 X_i D^2 X_j}. \tag{14}$$

Dowód: Z postaci (8) oraz (4) w niemal oczywisty sposób wynika teza. Zauważmy, że (14) ustala związek ekscesu wektora losowego ze współczynnikami ekscesu jego współrzędnych.

Wniosek 1. Dla wektora losowego $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to R^n$ spełniającego założenia twierdzenia 5 współczynnik ekscesu $\gamma_{2,n}$ przyjmuje postać:

$$\gamma_{2,n}\left(X\right)=\text{Ekscess}X=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{\nu_i-4}\cdot\left(\frac{\nu_i}{\nu_i-2}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\nu_i}{\nu_i-2}\right)\left(\frac{\nu_j}{\nu_j-2}\right)}. \tag{15}$$

Ponadto przy założeniu $\nu_1=\nu_2=....=\nu_n=\nu>4$ otrzymujemy:

$$\gamma_{2,n}\left(X\right)=\frac{\frac{6}{\nu-4}}{n}. \tag{16}$$

Przykład 1. Rozważmy dwa wektory losowe dwuwymiarowe (por. Budny, 2012):

- wektor $T:\Omega\to R^2$ o stochastycznie niezależnych współrzędnych, z brzegowymi rozkładami t-Studenta o $\nu>4$ stopniach swobody

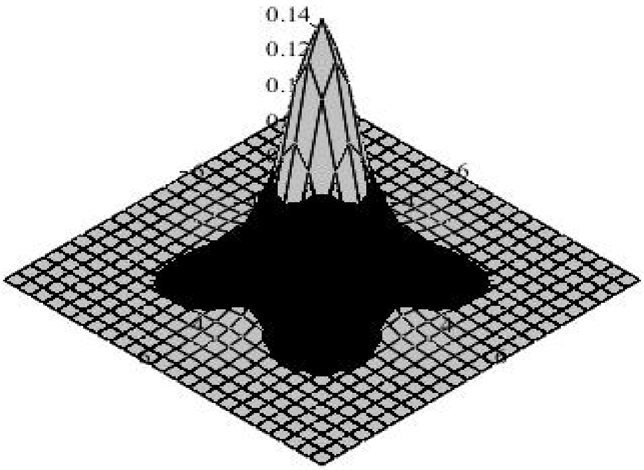
oraz

- wektor $N:\Omega\to R^2$ o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z tą samą macierzą wariancji-kowariancji, co wektor losowy T, czyli $\frac{\nu}{\nu-2}I$.

Współczynniki ekscesu dla tych wektorów spełniają zależność:

$$\text{Ekscess}T=\frac{\frac{6}{\nu-4}}{2}>0=\text{Ekscess}N.$$

Oznacza to, że rozkład wektora T charakteryzuje się mniejszym spłaszczeniem i „grubszymi ogonami” w porównaniu z dwuwymiarowym rozkładem normalnym o tej samej macierzy wariancji-kowariancji, czyli w porównaniu z rozkładem wektora losowego N .Własność ta dla $\nu=6$ została zilustrowana na rysunku 1, na którym przedstawiono funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego T (kolor szary) oraz wektora N (kolor czarny).



Rys. 1. Funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego *T* oraz wektora *N*

Podsumowanie

Eksces wektora losowego wpisuje się w zestaw charakterystyk związanych z rozproszeniem rozkładu wielowymiarowego wokół wektora wartości oczekiwanych. Za pomocą współczynnika ekscesu jest możliwe porównanie rozkładu wektora losowego z wielowymiarowym rozkładem normalnym o identycznej macierzy kowariancji.

Do dalszego opracowania pozostawia się problem estymacji. Skonstruowanie odpowiedniego estymatora otworzy możliwości zastosowań rozważanej charakterystyki do analizy danych wielowymiarowych.

Literatura

Bilodeau M., Brenner D. (1999): *Theory of Multivariate Statistics*. Springer Verlag, New York.

Budny K. (2009): *Kurtoza wektora losowego*. „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu", nr 78, seria: Ekonometria nr 26.

Budny K., Tatar J. (2009): *Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions*. „Statistics in Transiton", Vol. 10, No 3.

Budny K. (2012): *Kurtoza wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym*. W: *Zastosowanie metod ilościowych w finansach i ubezpieczeniach*. Red. S. Forlicz. CeDeWu, Warszawa.

Budny K. (w druku): *Wybrane własności kurtozy wektora losowego*. „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie", seria: Metody analizy danych, recenzja: grudzień 2012.

Cramer H. (1958): *Metody matematyczne w statystyce*. PWN, Warszawa.

Jakubowski J., Sztencel R. (2004): *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Wyd. 3. Script, Warszawa.

Mardia K.V. (1970): *Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications*. „Biometrika", Vol. 57, 3.

Srivastava M.S. (1984): *A Measure of Skewness and Kurtosis and Graphical Method for Assessing Multivariate Normality*. „Statistics & Probability Letters", Vol. 2, 5.

Tatar J. (1996): *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*. „Przegląd Statystyczny", z. ¾.

Tatar J. (1999): *Moments of a Random Variable in a Hilbert Space*. „Przegląd Statystyczny", z. 2.

EXCESS KURTOSIS OF A RANDOM VECTOR

Summary

Excess kurtosis of a univariate random variable is defined as its kurtosis minus 3, i.e. the kurtosis of a normal distribution. Excess kurtosis is a one of a dispersion measures. This parameter provides the information about peakedness and tail weight of a distribution compared to normal distribution.

In the paper we propose a generalization of this characteristic for random vectors and analyze its basic properties. Moreover, we introduce the form of excess kurtosis for the selected multivariate distribution.