Grażyna Trzpiot
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

EWOLUCJA METOD OCENY RYZYKA RYNKOWEGO

Po doświadczeniach ostatnich kryzysów finansowych wprowadzono nowe zasady ustalania rezerw celem zabezpieczenia ryzykownych inwestycji. Poziom zabezpieczenia zależy od rodzaju inwestycji, jak również od przyjętej miary ryzyka. Standardowe podejście średnia – wariancja nie jest adekwatne do obecnej sytuacji rynkowej w opisie i kontroli poziomu ryzyka, zatem instytucjonalnie proponuje się odpowiednio przyjęte inne miary ryzyka. W artykule przedstawimy stress VaR oraz IRC (*Incremental Risk Charge*). Zaprezentujemy dodatkowo zależność pomiędzy liniowym i nieliniowym pomiarem ryzyka w powiązaniu z poziomem ryzyka oraz typem rozkładu zmiennej losowej opisującej badaną inwestycję.

1. Miary ryzyka rynkowego

Model stopy zwrotu z inwestycji o kosztach zerowych w terminach przepływów pieniężnych jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P). Zbiór ryzyk zapiszemy jako G; jest to zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na Ω (zmiennych losowych). Ponieważ zakładamy, że zbiór Ω jest skończony, można przyjąć, że $G = \mathbb{R}^n$, gdzie $n = card(\Omega)$. Stożek dodatnich elementów G zapiszemy jako L_+, natomiast ujemnych $L\_$; zmienną losową zapiszemy jako X.

Zapiszemy jako $A_{i,j}$ zbiór przyszłych wartości netto wyrażonych w *i*-tej walucie, która w kraju *i* jest akceptowana przez regulatorów *j*, oraz $A = \bigcap_{ij} A_{i,j}$.

Przedstawimy poniżej zbiór aksjomatów dla **podzbioru akceptowalnego ryzyka**[1].

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, D. Heath: *Coherent Measure of Risk.* „Mathematical Finance" 1999, 9, 203-228.

Aksjomat A. Zbiór akceptowalnego ryzyka A zawiera L_+.
Aksjomat B. Zbiór akceptowalnego ryzyka A nie ma części wspólnej z $L_{-\,-}$ określonym jako:

$$L_{-\,-} = \{X: X(\omega) < 0, \omega \in \Omega\}.$$

Często ten aksjomat jest zastępowany mocniejszym założeniem.
Aksjomat B2. Zbiór akceptowalnego ryzyka A spełnia warunek $A \cap L_- = \{0\}$.
Kolejny aksjomat odnosi się do awersji do ryzyka części decydentów, a następny ma najmniej intuicyjny charakter.
Aksjomat C. Zbiór akceptowalnego ryzyka A jest wypukły.
Aksjomat D. Zbiór akceptowalnego ryzyka A jest homogenicznie dodatnio określonym stożkiem.

Zbiór akceptowalnego ryzyka jest punktem wyjścia do opisu obszaru akceptacji lub odrzucenia ryzyka. Przejdziemy do zdefiniowania w sposób naturalny miary ryzyka poprzez określenie położenia zajmowanej pozycji (ryzyka posiadanego instrumentu) w stosunku do zbioru akceptowanego ryzyka.

Definicja 1. Miara ryzyka jest odwzorowaniem ρ określonym z G w R.

Mówimy o miarach ryzyka zależnych od modelu (*model-dependent*), w przypadku znanego rozkładu prawdopodobieństwa lub o miarach niezależnych od modelu (*model-free*). Jeżeli wartość $\rho(X)$ jest dodatnia, jest interpretowana jako minimalna dodatkowa wpłata, która musi być wykonana, aby utrzymać pozycję (zrekompensuje straty do pozycji rynkowej). Jeżeli wartość $\rho(X)$ jest ujemna, jest to poziom możliwej wypłaty, która może być alokowana w dodatkowe instrumenty[2].

Definicja 2. *Miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka*. Jeżeli stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka wynosi r, to miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka A jest odwzorowaniem z G w R i jest określona jako:

$$\rho(X) = \inf\{k: k \cdot r + X \in A\}.$$

Definicja 3. *Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka.* Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka ρ jest określony jako:

$$A_\rho = \{X \in G: \rho(X) \le 0\}.$$

[2] G. Trzpiot: *O wybranych własnościach miar ryzyka*. „Badania Operacyjne i Decyzje" 2004a, 3-4, 91-98.

Z każdym zbiorem (stożkiem) akceptowalnego ryzyka jest powiązany wspomagający zbiór wycen. Przepływ pieniężny ma akceptowalny poziom ryzyka jedynie wówczas, gdy ma dodatnią oczekiwaną wycenę w zbiorze wycen. Im wyższy poziom akceptowalnego ryzyka, tym wyższa wycena, co pociąga za sobą mniejszy stożek akceptowalnego ryzyka. Jeżeli poziom akceptowalności przesuniemy do nieskończoności, wówczas stożek akceptowalnego ryzyka zamienia się w nieujemną zmienną losową lub w arbitraż.

Najszerszy stożek akceptowalnego ryzyka uzyskujemy wtedy, gdy zbiór wycen jest jednoelementowy. W tym przypadku mamy akceptowalną podprzestrzeń zmiennych losowych z dodatnią wartością oczekiwaną na zbiorze wycen.

Dwie dobrze znane miary ryzyka wykorzystywane przy ustalaniu rezerw celem zabezpieczenia ryzykownych inwestycji zgodnie z wymaganiami kapitałowymi to VaR (*Value-at-Risk)* oraz TVaR (*Tail-Value-at-Risk)*.

Definicja 4. Dla ryzyka X w ustalonym okresie $(0, T]$ oraz przy ustalonym $0 < p < 1$, VaR jest zdefiniowane jako:

$$VaR_p(X) = \sup\{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{P}(X \geq x) > 1 - p\}.$$

Definicja 5. Dla ryzyka X na (Ω, P) przy ustalonym $0 < p < 1$, $TVaR_p$ definiujemy jako[3]:

$$TVaR_p(X) = \frac{1}{1-p}\int_0^{1-p} VaR_t(X)dt.$$

Dla danego poziomu prawdopodobieństwa straty p zapiszemy kwantyl Q_p jako:

$$Q_p(X) = \inf\{x \mid P(X \leq x) \geq p\},\ 0 < p < 1.$$

Definicja 6. Miara ryzyka *shortfall* dla portfela ze stratą X i z wymogami kapitałowymi $\rho(X)$ jest definiowana jako:

$$\max(0, X - \rho(X)) \equiv (X - \rho(X))_+.$$

Miara *shortfall* może być interpretowana jako część strat, które nie mogą być pokryte przez zabezpieczenie[4]. Z literatury wiemy, że TVaR$p(X)$ może być wyrażone jako liniowa kombinacja odpowiedniego kwantyla oraz *expected shortfall*[5]:

---

[3] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath: Op. cit., 203-228.
[4] Inne nazwy: residual risk, insolvency risk, policyholders' deficit.
[5] M. Denuit, J. Dhaene, M.J. Goovaerts, R. Kaas: *Actuarial Theory for Dependent Risks.* Wiley, New York 2005, s. 73.

$$TVaR_p(X) = Q_p(X) + \frac{1}{1-p} E[(X - Q_p(X))_+] .$$

Zbiór własności definiowanych miar ryzyka można zapisać następująco:

1. Subaddytywność:
   dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$ zachodzi $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
2. Dodatnia homogeniczność:
   dla dowolnych $X \in L^\infty$ oraz $\lambda \geq 0$ zachodzi $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.
3. Translacja inwariantna:
   dla ustalonego $X \in L^\infty$ oraz dowolnych $a \in$ R zachodzi $\rho(X+a) = \rho(X) + a$.
4. Monotoniczność:
   dla $X, Y \in L^\infty$ takich , że $X \leq Y$, zachodzi $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
5. Prawo niezmienniczości[6]:
   dla każdego $X, Y \in L^\infty$, jeżeli $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ dla wszystkich $x \in$ R zachodzi $\rho(X) = \rho(Y)$.
6. Wypukłość:
   dla $X, Y \in L^\infty$ i $\lambda \in (0, 1]$ zachodzi $\rho[\lambda X + (1-\lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.
7. Co-monotoniczna addytywność:
   dla każdego $X, Y \in L^\infty$, które są co-monotoniczne, $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$.

Definicja 7. *Miara ryzyka* ρ jest nazywana *koherentną* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące aksjomaty[7]: subaddytywność, dodatnia homogeniczność, translacja inwariantna, monotoniczność.

Stochastyczna nierówność dla dwóch zmiennych losowych $X \leq Y$ jest rozumiana jako $X(\omega) \leq Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$. To oznacza, że prawie na pewno zachodzi taka nierówność dla wszystkich miar probabilistycznych w przestrzeni probabilistycznej. Dla pary zmiennych losowych (X, Y) mówimy, że jest *co-monotoniczna,* jeżeli nie istnieje para $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, taka, że $X(\omega_1) < X(\omega_2)$, podczas gdy $Y(\omega_1) > Y(\omega_2)$[8]. Równoważnie, *co-monotoniczne* zmienne losowe można scharakteryzować jako niemalejące funkcje zmiennych losowych. *Co-monotoniczność* jest silną zależnością dodatnią i często redukuje zmienne wielowymiarowe do jednowymiarowych. Miara VaR nie spełnia warunku subbaddytywności, nie jest koherentna, w przeciwieństwie do TVaR. Co więcej, VaR nie jest miarą wypukłą, co oznacza, że dla inwestorów być może korzystniej jest inwestować w pojedyncze papiery wartościowe. Wiemy, że VaR jest miarą wy-

[6] *Law invariance:* rozkłady mają takie same dystrybuanty i ten sam poziom akceptowalności.
[7] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath: Op. cit.
[8] D. Denneberg: *Non-Additive Measure and Integral.* Kluwer Academic Publisher, Boston 1994.

pukłą przy uwzględnieniu dodatkowych założeń o warunkowej dystrybuancie stopy zwrotu, takich, że stopa zwrotu podlega rozkładowi Gaussowskiemu (jak *random walk*) ze zmiennością stochastyczną[9]. Niezależnie zdefiniowano transponujące miary ryzyka.

Definicja 8. Transformująca funkcja g:(0, 1] → (0, 1] jest funkcją niemalejącą oraz taką, że $g(0) = 0$ oraz $g(1) = 1$.

Definicja 9. Transponująca miara ryzyka powiązana z transformującą funkcją g zostanie zapisana jako $\rho_g(\ )$ i zdefiniowana następująco:

$$\rho_g(X) = -\int_{-\infty}^{0}[1 - g(P(X > x))]dx + \int_{0}^{\infty} g(P(X > x))dx$$

dla każdej zmiennej losowej X, zakładając zbieżność całek.

Miara ρ_g(X) może być interpretowana jako transponowana wartość oczekiwana zmiennej losowej X, wykorzystująca transponowane prawdopodobieństwo w sensie całki Choqueta[10]. Wiadomo, że transformujące wypukłe miary ryzyka (indukowane przez wypukłe funkcje transformujące) są koherentne. Wypukłość implikuje, że dywersyfikacja nie podnosi ryzyka, ponieważ wartość ryzyka zdywersyfikowanego portfela jest mniejsza lub równa przeważonej średniej indywidualnych wartości ryzyka. Koherentne miary ryzyka, wypukłe miary ryzyka mogą mieć reprezentacje scenariuszowe. Klasa miar koherentnych może być scharakteryzowana jako klasa miar wypukłych, która dodatkowo jest dodatnio homogeniczna. Klasa miar wypukłych jest szersza niż klasa miar koherentnych, zatem jest nazywana klasą miar *słabo* koherentnych.

2. Rynkowe wymagania kapitałowe

Wprowadzono zasady ustalania rezerw celem zabezpieczenia ryzykownych inwestycji. Własności miar ryzyka powinny być zgodne z preferencjami inwestora oraz uwzględniać otoczenie, zmieniające się warunki ekonomiczne.

---

[9] C. Gourieroux, J.P. Laurent, O. Scaillet: *Sensitivity Analysis of Values at Risk*. „Journal of Empirical Finance" 2000, 7, 225-245.

[10] G. Trzpiot: *Własności transponujących miar ryzyka*. Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 91, UE, Katowice 2012, 21-36; S.S. Wang: *Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density*. „Astin Bulletin" 1996, 26, 71-92.

Rozważamy portfel z przyszłymi stratami X. Regulatorzy żądają zabezpieczenia kapitałowego powiązanego z X będącego na odpowiednio wysokim poziomie tak, aby zapewnić wartość *shortfall* na wystarczająco niskim poziomie. Aby rozwiązać to zadanie, wprowadzamy miarę ryzyka dla *shortfall*, którą zapiszemy φ:

$$\varphi((X - \rho(X))_+).$$

Zatem dwie różne miary ryzyka są wykorzystywane celem rozwiązania zadania sprostania wymogom kapitałowym: miara ryzyka ρ, która determinuje poziom zabezpieczenia kapitałowego, oraz miara ryzyka φ, która dokonuje pomiaru *shortfall*. Zakładamy, że φ spełnia następujący warunek:

$$\rho_1(X) \leq \rho_2(X) \Rightarrow \varphi((X - \rho_1(X))_+) \geq \varphi((X - \rho_2(X))_+),$$

co oznacza, że rosnące zabezpieczenie kapitałowe powoduje ograniczenie ryzyka *shortfall* mierzonego przez φ. Monotoniczność φ jest warunkiem wystarczającym, aby powyższe założenie było spełnione. Przyjęte założenie oznacza, że wyższe zabezpieczenie kapitałowe jest korzystniejsze z punktu widzenia minimalizacji $\varphi((X - \rho(X))_+)$. Należy dodać, że utrzymanie kapitału $\rho(X)$ pociąga za sobą koszt.

Definicja 10. Dla ustalonego ryzyka X, ustalonych miar ryzyka φ i ρ, ustalanego ε, $0 < \varepsilon < 1$, zapisujemy *funkcję kosztów* $C(X, \rho(X))$ jako:

$$C(X, \rho(X)) = \varphi((X - \rho(X))_+) + \rho(X)\varepsilon.$$

Wartość funkcji kosztów zależy zarówno od φ, jak i od ε. Wartość ε może być interpretowana jako poziom przekroczenia, przy którym powinien być uwzględniany koszt kapitału[11]. Optymalne zabezpieczenie kapitałowe $\rho(X)$ powinno określać najmniejszą wartość d, która minimalizuje funkcję kosztów $C(X, d)$. W szczególnym przypadku, gdy $\varepsilon = 0$, uwzględniany koszt kapitału przy wyznaczaniu zabezpieczenia kapitałowego wynosi[12]:

$$\rho(X) = \inf\{d \mid \varphi((X - d)_+) = 0\}.$$

Jeżeli podwyższamy wartość ε, to oznacza, że regulatorzy podnoszą relatywnie koszt kapitału, a to oznacza obniżenie poziomu zabezpieczenia kapitałowego.

Celem szczegółowego zapisu zadań optymalizacyjnych wykorzystamy wartość oczekiwaną do pomiaru ryzyka *shortfall*, przyjmując $\varphi(X) = E(X)$. W tym

[11] Regulatorzy decydują, czy wartość ε ma być ryzykiem specyficznym instytucji.
[12] Przyjęto, że $\inf\{\varphi\} = \infty$.

przypadku można przyjąć następującą interpretację: to ograniczająca straty premia netto, która musi być utrzymana celem pokrycia ryzyka niewypłacalności.

Zadanie I. $\min_{d \in R_+} C(X, d) = E((X - d)_+) + d\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$

Rozwiązaniem tego zadania jest $\rho(X) = Q_{1-\varepsilon}(X)$.

Jako wniosek możemy zapisać:

$$C(X, Q_{1-\varepsilon}(X)) = E((X - Q_{1-\varepsilon}(X))_+) + Q_{1-\varepsilon}(X)\varepsilon = \varepsilon TVaR_{1-\varepsilon}(X).$$

Zadanie II. $\min_{d \in A} C(X, d)$

dla $A = \{\rho_g(X) \mid g$ jest wypukłą funkcją transponującą i $\rho_g(X) \geq Q_{1-\varepsilon}(X)\}$.

Rozwiązaniem tego zadania jest $\rho(X) = \mathrm{TVaR}_{1-\varepsilon}(X)$.

Regulatorzy wymagają ograniczenia *shortfall*, co oznacza podwyższone zabezpieczenie kapitałowe. Jednocześnie nie pozwalają na wzrost *shortfall*, implikując wysokie koszty instytucji finansowych.

Zapisując powyższe wymagania łącznie, należy uwzględnić fakt, że miara ryzyka ρ wykorzystywana do ustalenia zabezpieczenia kapitałowego ryzykownych inwestycji powinna spełniać warunek (*wymaganie kapitałowe*):

Dla dowolnej pary zmiennych losowych (X, Y) oraz $0 < \varepsilon < 1$

$$E((X + Y - \rho(X + Y))_+) + \rho(X + Y)\varepsilon \leq$$
$$E((X - \rho(X))_+) + \rho(X)\varepsilon + E((Y - \rho(Y))_+) + \rho(Y)\varepsilon.$$

Zauważmy, że dla eliptycznych zmiennych losowych, które podlegają prawu niezmienniczości, koherentne miary ryzyka spełniają powyższy warunek.

Wniosek I. Rozwiązanie zadania I, miara $\rho(X) = Q_{1-\varepsilon}(X)$ spełnia wymaganie kapitałowe.

Wniosek II. Dowolna subbaddytywna miara $\rho(X) \geq Q_{1-\varepsilon}(X)$ spełnia wymaganie kapitałowe.

Rozważmy jako funkcję transponującą funkcję proporcjonalnego hazardu: $g(x) = x\frac{1}{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, gdzie parametr α opisuje poziom awersji do ryzyka. Im wyższa wartość a, tym większa awersja do ryzyka, gdy $\alpha = 1$, wówczas nie zastosowano przekształcenia. Możemy wyznaczyć wartości $Q_{1-\varepsilon}$, wykorzystując funkcję proporcjonalnego hazardu. Równoważne rozwiązanie może być zapisane jako VaR na poziomie istotności $1 - \varepsilon\alpha$. Przykładowo przyjmijmy, że regulatorzy ustalili wartość ε wynoszącą 4%. Zapisujemy (tabela 1) wartości prawdopodobieństwa VaR, którą przyjmujemy do obliczeń dla różnych wartości parametru α.

Tabela 1

α	Poziom istotności
1.0	96,00%
1.2	97,90%
1.4	98,90%
1.6	99,42%
1.8	99,70%
2.0	99,84%

Dokonując realnej walidacji ryzyka rynkowego zgodnie z najnowszymi wytycznymi, wykorzystujemy stress VaR dla poziomu istotności 99% oraz IRC kwantyl 99,9% (*Incremental Risk Charge*)[13].

3. Zależność pomiędzy miarami kwantylowymi

Obserwujemy zależność liniową pomiędzy TVaR i VaR. To zjawisko jest fenomenem dla portfeli opisywanych w odniesieniu do danych historycznych. Rozważymy następujące teoretyczne rozkłady zmiennych losowych: jednostajny, wykładniczy, Pareto i normalny.

Zapiszemy wartości relacji TVaR do VaR (tabela 2). W pierwszej kolumnie zapisano typ rozkładu, w drugiej wartość proporcji. Symbole ϕ oraz Φ oznaczają odpowiednio funkcję gęstości oraz dystrybuantę rozkładu normalnego standaryzowanego.

[13] B. Glensk, A. Ganczarek-Gamrot, G. Trzpiot: *Validation of Market Risk on the Electric Energy Market – An IRC Approach*. Zeszyty Naukowe UE nr 162, Katowice 2013.

Tabela 2

Zależność pomiędzy TVaR i VaR[14]

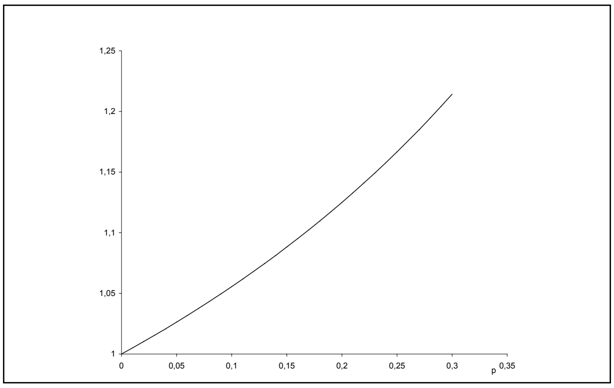
Typ rozkładu *X*	$\frac{TVaR_p(X)}{VaR_p(X)}$	*Funkcja g*(*p*)
U(*a*, *b*)	$\frac{b(2-p)+ap}{2[b(1-p)+ap]}$	*p*/2
$\gamma(1,\lambda)^{*}$	$1-\frac{1}{\log(p)}$	*p*/*e*
Pareto(*a*, *b*)**	$\frac{a}{a-1}$	$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{a} p$
N(0, 1)	$\frac{\phi(\Phi^{-1}(1-p))}{p\Phi^{-1}(1-p)}$	$1-\Phi\left[\frac{1}{p}\phi\left[\Phi^{-1}(1-p)\right]\right]$

* *λ* parametr skali, ** *a* parametr ogona[15], *b* parametr skali.

Zapisana proporcja jest niezależna od wartości parametru skali rozpatrywanego rozkładu, jest niemalejącą funkcją rozpatrywanego poziomu ryzyka *p*. Ponieważ TVaR jest funkcją VaR, możemy zapisać tę liniową zależność jako:

$$\mathrm{TVaR}_p(X) = [1 + L(p)]\ \mathrm{VaR}_p(X),$$

gdzie *L*(*p*) jest niemalejącą funkcją *p*. Graficzna ilustracja zapisanej zależności dla $p \in [0;\ 0{,}35]$ oraz dla ustalonych parametrów omawianych rozkładów pozwala na ocenę zakresu zmienności wartości *L*(*p*) (rysunek 1).

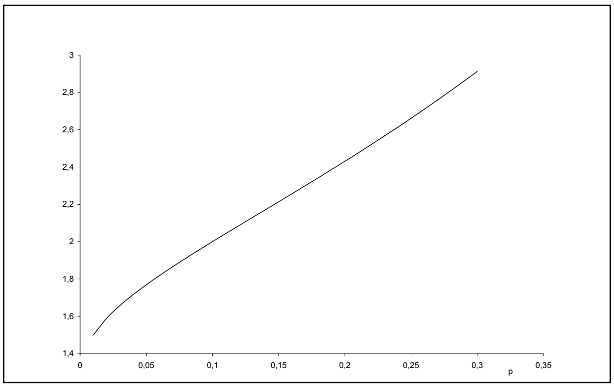


Rys. 1. Wykres $\mathrm{TVaR}_p(X)/\mathrm{VaR}_p(X)$ jako funkcja zmiennej *p* dla rozkładu U(0,1)

Źródło: Opracowanie własne.

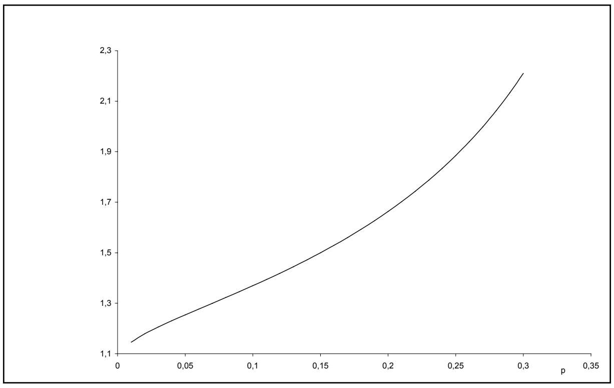
[14] Ch. Gourieroux, W. Liu: *Converting Tail-Var to Var: An Econometric Study*. „Journal of Financial Econometrics" 2012, Vol. 10, No. 2, 233-264.

[15] Parametr *a* rozkładu Pareto musi spełniać warunek a > 1, aby istniało TVaR.



Rys. 2. Wykres $TVaR_p(X)/VaR_p(X)$ jako funkcja zmiennej *p* dla rozkładu wykładniczego $\gamma(1,2)$

Źródło: Opracowanie własne.

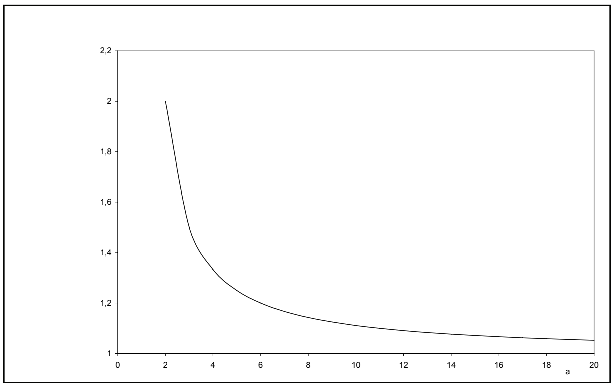


Rys. 3. Wykres $TVaR_p(X)/VaR_p(X)$ jako funkcja zmiennej *p* dla rozkładu N(0,1)

Źródło: Opracowanie własne.

Zachodzi następująca własność[16]: Dla zmiennych losowych X o dodatnich wartościach i takich, że mają skończony pierwszy moment, proporcja TVaR do VaR jest stała w *p* wtedy i tylko wtedy, gdy rozważanym rozkładem jest rozkład Pareto.

[16] Ch. Gourieroux, W. Liu: Op. cit.



Rys. 4. Wykres $TVaR_p(X)/VaR_p(X)$ dla rozkładu Pareto jako funkcja parametru a

Źródło: Opracowanie własne.

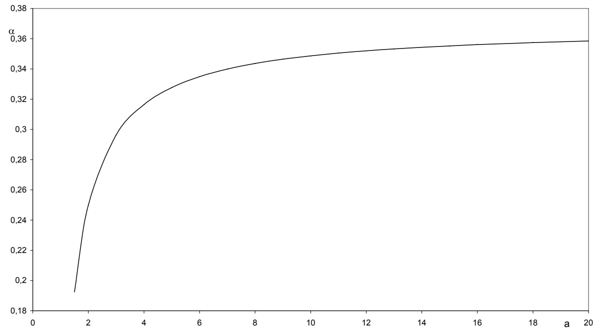
Alternatywnym zapisem zależności pomiędzy TVaR i VaR jest wykorzystanie zależności pomiędzy rozpatrywanym poziomem ryzyka. TVaR przy ustalonym poziomie ryzyka p może być rozpatrywane jako VaR z bardziej rygorystycznym poziomem ryzyka p^*. To pozwala zdefiniować rosnącą funkcję $p^* = g(p)$ tak, że $p^* < p$, ale zależy od rozpatrywanego rozkładu oraz zachodzi $TVaR_p(X) = [1 + L(p)]\ VaR_{p^*}(X)$. Funkcję $g(p)$ dla rozważanych rozkładów zapisano w ostatniej kolumnie tabeli 1. Z wyjątkiem rozkładu normalnego $g(p)$ jest proporcjonalne do p.

Zapiszemy funkcję g jako liniową funkcję współczynnika α:

$$TVaR_p(X) = VaR_{\alpha p}(X) \Leftrightarrow \int_0^p Q_{1-u}(X)du = pQ_{1-\alpha p}(X).$$

Zauważmy, że wartość p jest dzielona przez 2, jeżeli średnia jest równa medianie, oraz przez liczbę większą niż 2 (lub mniejszą niż 2), jeżeli średnia jest mniejsza (odpowiednio większa) niż mediana, co oznacza skośność prawostronną (odpowiednio lewostronną).

Dla rozważanych rozkładów: jednostajnego, wykładniczego i Pareto (tabela 1) warunek zachodzi odpowiednio dla: $\alpha = ½$ (ponieważ średnia jest równa medianie), $\alpha = 1/e$ oraz $\alpha = ((a - 1)/a)^a$.



Rys. 5. Wartość współczynnika α dla rozkładu Pareto(a, b)

Źródło: Opracowanie własne.

Wartość współczynnika α w zależności od parametru skali a dla rozkładu Pareto można przedstawić graficznie (rysunek 5), wartość $\alpha \in (0, 1/e)$. Im grubszy ogon rozkładu tym mniejsza wartość α.

Podsumowanie

Miary ryzyka ewoluują, pojawiają się nowe warunki rynkowe i nowe miary. Nie wszystkie nurty badawcze zostały omówione w tym artykule. W literaturze znajdujemy wiele metod wyznaczania VaR. Po ustaleniu wartości VaR wyznaczamy TVaR w sposób uproszczony analitycznie, jak zostało to omówione. Dodatkowo można interpretować ekstremalną wartość kwantyla jako wartość straty danego portfela, która nie będzie przekroczona w warunkach rynkowych, lub jako oczekiwaną stratę tego samego portfela przy niepomyślnych warunkach rynkowych, co daje powiązanie z zabezpieczeniem kapitałowym.

Alternatywne miary ryzyka są dedykowane odpornym pomiarom i zarządzaniu ryzykiem. Takie miary wykorzystują nie tylko prawdopodobieństwo niekorzystnych zdarzeń, ale także ich znaczenie[17]. W szczególności zastąpienie VaR przez TVaR, która to miara wykorzystuje zarówno prawdopodobieństwa, jak i wielkość strat, kiedy ta strata występuje[18]. TVaR jest rekomendowane do wyznaczenia średniego poziomu zabezpieczenia kapitałowego[19].

[17] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath: Op. cit.

[18] TVaR istnieje, jeżeli jest wyznaczane dla zmiennej losowej o skończonym pierwszym momencie.

[19] Decyzja z 2002 American Academy of Actuaries przy wycenie Life Capital.

Literatura

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.: *Coherent Measures of Risk*. „Mathematical Finance” 1999, 9, 203-228.

Denneberg D.: *Non-Additive Measure and Integral.* Kluwer Academic Publisher, Boston 1994.

Denuit M., Dhaene J., Goovaerts M.J., Kaas R.: *Actuarial Theory for Dependent Risks.* Wiley, New York 2005.

Dhaene J., Vanduffel S., Tang Q., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D.: *Capital Requirements, Risk Measures and Comonotonicity*. „Belgian Actuarial Bulletin” 2004, 4, 53-61.

Glensk B., Ganczarek-Gamrot A., Trzpiot G.: *Validation of Market Risk on the Electric Energy Market – An IRC Approach*. Zeszyty Naukowe UE nr 162, Katowice 2013.

Gourieroux Ch., Liu W.: *Converting Tail-Var to Var: An Econometric Study*. „Journal of Financial Econometrics” 2012, Vol. 10, No. 2, 233-264.

Gourieroux C., Laurent J.P., Scaillet O.: *Sensitivity Analysis of Values at Risk*. „Journal of Empirical Finance” 2000, 7, 225-245.

Trzpiot G.: *Własności transponujących miar ryzyka*. Zeszyty Naukowe Wydziałowe nr 91, UE, Katowice 2012, 21-36.

Wang S.S.: *Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density*. „Astin Bulletin” 1996, 26, 71-92.

EVOLUTION OF ESTIMATION METHODS OF THE MARKET RISK

Summary

By experience of the last financial crises new principles of setting reserves in order to secure risky investments were implemented. The security level depends from the type of investment as well as from the accepted measure of the risk. Conventional approach mean-variance isn't appropriate to the present market situation in the description and the inspection of the level of risk, so institutionally appropriately accepted other measures of the risk are proposed. In the article we will present stress VaR and the IRC (Incremental Risk Charge). We will describe the relation additionally between the linear and non-linear measurement of the risk in connecting with the level of risk and the type the schedule of a random variable describing examined investment.