



### **Magdalena Chmielińska**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
Katedra Statystyki  
chmielinska.magda@gmail.com

### **Małgorzata Szerszunowicz**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
Wydział Zarządzania  
Katedra Statystyki  
malgorzata.szerszunowicz@ue.katowice.pl

## **O KOSZTACH REALIZACJI PLANÓW EKSPERYMENTÓW CZYNNIKOWYCH**

**Streszczenie:** Planowanie eksperymentów jako metoda statystycznej kontroli jakości umożliwia właściwe przygotowanie procesu produkcyjnego poprzez ustalenie poziomów czynników oraz określenie ich wpływu na efekty realizowanego procesu. Metoda ta jest chętnie stosowana w przedsiębiorstwach, gdyż tylko prawidłowo ustawiony proces przebiega bez zakłóceń. Skutkuje to mniejszą liczbą wytworzonych elementów wadliwych, czyli niższymi kosztami braków wewnętrznych i zewnętrznych. Stosowanie planowania eksperymentów wymaga jednak ponoszenia pewnych nakładów finansowych.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie struktury kosztów ponoszonych przez przedsiębiorstwo w związku z zastosowaniem narzędzia planowania eksperymentów oraz wskazanie możliwości takiego zaplanowania eksperymentu czynnikowego, by koszty te były minimalizowane. W artykule zaprezentowany zostanie algorytm realizacji planu eksperymentu czynnikowego uwzględniający koszty jego przeprowadzenia. Koszty przeprowadzenia eksperymentu utworzonego zgodnie z proponowaną metodą zostaną porównane z kosztami realizacji klasycznych planów eksperymentów czynnikowych.

**Słowa kluczowe:** plany eksperymentów czynnikowych, plany ułamkowych eksperymentów czynnikowych, koszty kontroli jakości.

### **Wprowadzenie**

Planowanie eksperymentów jest jedną z metod statystycznej kontroli jakości, która pozwala na odpowiednie zaprojektowanie procesu produkcyjnego. Wykorzystanie narzędzia planowania eksperymentów prowadzi do wyeliminowania zakłóceń w procesie produkcyjnym, co z kolei wiąże się ze zmniejszeniem kosztów związanych z brakami wewnętrznymi i zewnętrznymi. Zastosowanie narzędzia planowania eksperymentów wymaga jednak ponoszenia przez przedsiębiorstwo produkcyjne pewnych nakładów finansowych.

Przedmiotem niniejszego artykułu jest przedstawienie struktury kosztów ponoszonych przez przedsiębiorstwo w związku z zastosowaniem narzędzia planowania eksperymentów. Ponadto zaprezentowany zostanie algorytm konstrukcji takiego planu eksperymentu czynnikowego, który pozwoli na zminimalizowanie kosztów jego przeprowadzenia. Koszty przeprowadzenia eksperymentu utworzonego zgodnie z proponowanym algorytmem zostaną porównane z kosztami realizacji najczęściej wykorzystywanych w praktyce planów eksperymentów czynnikowych.

## 1. Zarys teorii planowania eksperymentów

Celem statystycznej kontroli procesu jest poprawa funkcjonowania procesu produkcyjnego, która prowadzi do utrzymania wysokiego poziomu jakości produktów. Metody stosowane w ramach statystycznej kontroli jakości pozwalają na monitorowanie przebiegu procesu produkcyjnego oraz na określenie jego możliwości, zmienności i wyników. Jednym z narzędzi statystycznej kontroli jakości jest planowanie eksperymentów będące metodą aktywną, umożliwiającą poprawę jakości wyrobów oraz ekonomicznych rezultatów procesu.

Podstawą planowania eksperymentów jest stosowanie odpowiednich zasad obowiązujących podczas realizacji kolejnych doświadczeń. Przebieg etapu poprzedzającego proces produkcyjny można przedstawić w postaci następującego schematu [Montgomery, 1997]:

- identyfikacja i sformułowanie problemu, polegające na określeniu wszystkich aspektów, okoliczności i potencjalnych celów eksperymentu,
- dobór czynników oraz określenie ich poziomów, zakresów zmienności,
- określenie zmiennej objaśnianej najlepiej charakteryzującej badany proces,
- wybór odpowiedniego planu eksperymentu polegający m.in. na określeniu liczby doświadczeń oraz ewentualnych reguł randomizacji,
- przeprowadzenie eksperymentu,
- analiza statystyczna otrzymanych wyników,
- wnioski i zalecenia dla badanego procesu sformułowane na podstawie wyników analizy eksperymentu.

Eksperyment stanowi ciąg  $n$  kolejnych doświadczeń, gdzie pojedyncze doświadczenie rozumiane jest jako jednorazowe uzyskanie wartości zmiennej objaśnianej  $Y$ , przy ustalonych wartościach poszczególnych czynników  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Niech  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$  oznaczać zbiory wszystkich możliwych wartości czynników  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , wówczas obszar eksperymentowania jest zbiorem punktów  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , gdzie  $x_i \in \mathbf{X}_i, i = 1, 2, \dots, m$ . Zbiór par postaci

$$P_n = \{\mathbf{x}_j, p_j\}_{j=1}^n \quad (1)$$

określa plan eksperymentu obejmujący  $n$  doświadczeń, gdzie  $\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  oraz  $p_j = \frac{n_j}{n}$ , przy czym  $n_j$  oznacza liczbę doświadczeń w punkcie  $\mathbf{x}_j$  obszaru eksperymentowania, ponadto  $\sum_{j=1}^n n_j = n$  oraz  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  dla  $j = 1, 2, \dots, n$  [Wawrzynek, 2009].

Zazwyczaj badania eksperymentalne polegają na analizie wpływu pewnej liczby nielosowych czynników  $X_1, X_2, \dots, X_m$  na zmienną wynikową  $Y$ , ponadto na zmienną wyjściową  $Y$  mogą oddziaływać również czynniki losowe. Zależność tę można przedstawić w postaci modelu statystycznego określonego równaniem [Wawrzynek, 1993]:

$$Y(X_1, X_2, \dots, X_m) = y(X_1, X_2, \dots, X_m) + \varepsilon, \quad (2)$$

gdzie  $EY(X_1, X_2, \dots, X_m) = y(X_1, X_2, \dots, X_m)$ ,  $E\varepsilon = 0$  oraz  $V\varepsilon = \sigma^2$ , przy czym  $\sigma^2$  jest wielkością stałą, niezależną od wartości poszczególnych czynników. Przedmiotem badania statystycznego jest funkcja  $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , zwana powierzchnią odpowiedzi. Argumentami funkcji powierzchni odpowiedzi są realizacje  $m$  nielosowych zmiennych  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Model (2) można zapisać w postaci ogólnego modelu liniowego [Wawrzynek, 1993], wówczas estymacji parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi dokonujemy zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów [Aczel, 2000]. Najczęściej wykorzystywanymi w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych planami eksperymentów są całkowite i ułamkowe plany eksperymentów czynnikowych.

### Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu $2^m$

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego obejmuje  $m$  czynników występujących na dwu poziomach: górnym – oznaczanym liczbą +1 oraz dolnym – oznaczanym liczbą -1. Wówczas realizowany eksperyment obejmuje doświadczenia dla wszystkich  $2^m$  kombinacji poziomów poszczególnych czynników.

Zazwyczaj całkowite eksperymenty czynnikowe typu  $2^m$  są stosowane w celu estymacji funkcji powierzchni odpowiedzi postaci [Wawrzynek, 2009]:

$$y(\mathbf{x}) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \dots + \theta_m x_m + \theta_{12} x_1 x_2 + \dots + \theta_{m-1 m} x_{m-1} x_m + \theta_{123} x_1 x_2 x_3 + \dots + \theta_{m-2 m-1 m} x_{m-2} x_{m-1} x_m + \dots + \theta_{12\dots m} x_1 x_2 \dots x_m, \quad (3)$$

gdzie współczynniki  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  nazywane są efektami głównymi czynników  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , natomiast pozostałe współczynniki noszą nazwę interakcji czynników.

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^m$  możemy utożsamiać z  $2^m$  wierzchołkami  $m$ -wymiarowej kostki [Wawrzynek, 1993]:

$$K_m = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, m \}. \quad (4)$$

Całkowity eksperyment czynnikowy typu  $2^m$  przedstawia się w postaci tabeli zawierającej kod opisujący poszczególne doświadczenia. W kolumnach tabeli zamieszczamy kolejno numer doświadczenia, wartości zmiennej pozornej  $x_0 \equiv 1$  (stale równej „+”) oraz wartości poszczególnych jednomianów funkcji powierzchni odpowiedzi postaci (3), przy czym wartości interakcji są wynikiem iloczynu wartości czynników w nich uwzględnianych. Przykładowy plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^3$  przedstawia tabela 1.

**Tabela 1.** Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^3$

Oznaczenie doświadczenia	$x_0 \equiv 1$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$
$\mathbf{X}_1$	+	+	+	+	+	+	+	+
$\mathbf{X}_2$	+	+	-	-	-	-	+	+
$\mathbf{X}_3$	+	-	+	-	-	+	-	+
$\mathbf{X}_4$	+	-	-	+	+	-	-	+
$\mathbf{X}_5$	+	+	+	-	+	-	-	-
$\mathbf{X}_6$	+	+	-	+	-	+	-	-
$\mathbf{X}_7$	+	-	+	+	-	-	+	-
$\mathbf{X}_8$	+	-	-	-	+	+	+	-

Źródło: Wawrzynek [2009].

Zauważyć należy, że w eksperymencie realizowanym zgodnie z całkowitym planem eksperymentu czynnikowego typu  $2^m$  na skutek wzrostu liczby czynników analizowanych w eksperymencie liczba doświadczeń gwałtownie rośnie. Eksperymentator w uzasadnionych przypadkach może zakładać nieistotność interakcji dowolnego rzędu, wtedy liczba czynników w eksperymencie jest odpowiednio mniejsza, zatem liczba planowanych doświadczeń również maleje. W takim przypadku eksperyment realizuje się zgodnie z odpowiednim planem ułamkowego eksperymentu czynnikowego.

**Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{m-k}$** 

Ułamkowy eksperyment czynnikowy typu  $2^{m-k}$  uwzględnia  $m$  czynników, które, podobnie jak w planie całkowitego eksperymentu czynnikowego, występują na dwu poziomach: górnym lub dolnym. Eksperyment ten obejmuje wówczas  $n = 2^{m-k}$  doświadczeń, gdzie liczba naturalna  $k$  ( $0 < k < m$ ) dobrana jest tak, aby liczba doświadczeń pozwoliła na estymację wszystkich parametrów rozważanej funkcji powierzchni odpowiedzi.

Konstrukcję planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{m-k}$  tworzy się na podstawie planu całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^l$ , gdzie  $l = m - k$ . W kolejnych kolumnach tabeli ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{m-k}$  umieszczamy kolumny zawierające numer doświadczenia, wartości zmiennej pozornej oraz wartości kolejnych czynników  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . W celu określenia wartości pozostałych  $k$  czynników spośród kolumn tabeli całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^l$ , odpowiadających interakcjom dowolnego rzędu czynników, eksperymentator wybiera dowolnie  $k$  kolumn i oznacza je jako wartości czynników  $X_{m-k+1}, X_{m-k+2}, \dots, X_m$ . Wszystkie możliwe plany ułamkowych eksperymentów czynnikowych typu  $2^{3-1}$  przedstawiają tabele 2 i 3.

**Tabela 2.** Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{3-1}$  (wariant 1)

Oznaczenie doświadczenia	$x_0 \equiv \mathbf{1}$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1 x_2$
$\mathbf{X}_1$	+	+	+	+
$\mathbf{X}_2$	+	+	-	-
$\mathbf{X}_3$	+	-	+	-
$\mathbf{X}_4$	+	-	-	+

**Tabela 3.** Plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{3-1}$  (wariant 2)

Oznaczenie doświadczenia	$x_0 \equiv \mathbf{1}$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = -x_1 x_2$
$\mathbf{X}_5$	+	+	+	-
$\mathbf{X}_6$	+	+	-	+
$\mathbf{X}_7$	+	-	+	+
$\mathbf{X}_8$	+	+	+	-

Estymatory parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi dla ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{m-k}$  wyznacza się w analogiczny sposób, jak estymatory parametrów funkcji powierzchni odpowiedzi całkowitego planu czynnikowego typu  $2^m$ .

## 2. Koszty jakości planowania eksperymentów

Koszty jakości definiuje się jako wszelkie koszty związane z czynnościami mającymi na celu poprawę jakości produkowanych wyrobów lub/i świadczonych usług [Kończak, 2007]. Pojęcie to jest pojęciem umownym, niewystępującym w teorii kosztów [Konarzewska i Gubała, 2003]. Nie ma ogólnie przyjętego i akceptowanego podziału tych kosztów. Funkcjonujące klasyfikacje wywodzą się jednak w większości od klasyfikacji autorstwa J.M. Juran [Juran i Gryna, 1974]. Podział ten, zaproponowany w latach 50. ubiegłego wieku, wyróżnia dwie główne kategorie w kosztach jakości:

- koszty zgodności,
- koszty niezgodności.

Koszty zgodności związane są z dążeniem do zapewnienia jakości wymaganej oraz z kontrolą zgodności jakości uzyskiwanej z wymaganą. Jako podgrupę w tej kategorii kosztów wyróżnia się więc koszty zapewnienia i koszty oceny. Koszty zapewnienia ponoszone są w celu uzyskania jak najlepszych warunków do otrzymania pożądanego poziomu jakości. Koszty oceny ponoszone są w celu upewnienia się, czy wszystkie procesy projakościowe przebiegają prawidłowo. Ich wartość z reguły związana jest z nakładami na zapewnienie jakości w fazie projektowania zależnością odwrotną.

Koszty niezgodności związane są z powstawaniem niezgodności rozumianej jako rozbieżność pomiędzy jakością uzyskaną a jakością wymaganą. Grupa ta obejmuje swym zakresem również dwie podgrupy: koszty niezgodności wewnętrzne i koszty niezgodności zewnętrzne. Koszty niezgodności powstają w sytuacji, gdy jakość wykonania wyrobu lub/i usługi jest niższa od jakości projektowej. Koszty niezgodności wewnętrznej powstają, gdy niezgodność zostanie wykryta jeszcze przed przekazaniem jej do strefy odbioru (odbiorcy zewnętrznemu). Koszty te są efektem nieprawidłowo przeprowadzonego procesu produkcyjnego. Koszty niezgodności zewnętrznej powstają w sytuacji, gdy wyrób niezgodny został przekazany klientowi zewnętrznemu, który to wykrył wadę produktu. Koszty te są efektem źle zorganizowanej i prowadzonej kontroli.

Powyższy podział jest często modyfikowany, stanowi podstawę klasyfikacji przyjętej w normie ISO 9004 oraz podziału zaproponowanego przez A. Iwasiewicza [1999].

Planowanie eksperymentów jako metoda statystycznej kontroli jakości umożliwiającą prawidłowe przygotowanie procesu produkcyjnego przyczynia się do stworzenia jak najlepszych warunków do uzyskiwania pożądanego poziomu jakości. Koszty związane z planowaniem eksperymentu w całości więc mieszczą się w wyróżnionych przez Juran kosztach zapewnienia. Stosując ter-

minologię Iwasiewicza, nakłady wydatkowane na planowanie eksperymentu zaliczyć należy do kosztów prewencji.

Koszt eksperymentu zależy w głównej mierze od jednostkowego kosztu pomiaru oraz od ilości niezbędnych pomiarów, które należy wykonać. Jednostkowy koszt pomiaru obejmuje koszt pracy eksperymentatorów, koszt analizy uzyskanych wyników oraz łączny koszt zmiany poziomów analizowanych czynników. Nie bez znaczenia dla wartości kosztu eksperymentu jest również całkowity czas jego przeprowadzania.

Łączny koszt zmiany poziomów analizowanych czynników, wyróżniany w strukturze kosztów planowania eksperymentu uwzględniającego  $n$  punktów obszaru eksperymentowania, stanowi sumę kosztów związanych ze zmianą warunków panujących w dwóch następujących po sobie punktach, w których realizowano kolejne doświadczenia. W celu wyznaczenia tego kosztu dysponować należy macierzą jednostkowych kosztów zmiany poziomów czynników  $\mathbf{K}$  o wymiarach  $[n \times n]$  postaci:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie  $k_{ij}$  jest kosztem przejścia z  $i$ -tego punktu obszaru eksperymentowania do punktu  $j$ -tego, dla  $i \neq j$ , czyli kosztem zmiany poziomów poszczególnych czynników uwzględnionych w eksperymencie, przy czym dla  $i = j$  element  $k_{ij}$  jest równy 0 [Szerszunowicz, 2013].

Jednostkowy koszt zmiany poziomów analizowanych czynników w dwóch następujących po sobie punktach obszaru eksperymentowania może być stały, jak również może być uzależniony od warunków panujących w tych punktach.

Rozważając proces produkcyjny zależny od właściwości półproduktu, których zmiany dokonywane są bezpośrednio w jednej próbce, zauważyć należy, że koszt związany ze zmianą poziomów analizowanych czynników uzależniony jest od kolejności wykonywanych pomiarów. Niejednorodny koszt przejścia z jednego do drugiego punktu obszaru eksperymentowania wynika często z warunkowań technologicznych. Przykładowo, analizując pewną ciecz, której temperatura i gęstość wpływa na jakość produkowanego wyrobu, stosując plan całkowity  $2^2$ , konieczne jest wykonanie minimum czterech pomiarów, po jednym w każdym z punktów obszaru eksperymentowania: przy niskiej temperaturze i małej gęstości, przy niskiej temperaturze i dużej gęstości, przy wysokiej temperaturze

i małej gęstości oraz przy wysokiej temperaturze i dużej gęstości. Zwiększanie gęstości cieczy w porównaniu z operacją jej zmniejszania z technologicznego punktu widzenia może okazać się łatwiejsze do wykonania, co z ekonomicznego punktu widzenia okazać się może mniej kosztowne. Na możliwość manipulowania gęstością cieczy wpływ może mieć również temperatura, będąca w rozważanym przypadku drugim czynnikiem, co również będzie miało odniesienie w kształtowaniu się jednostkowych kosztów zmiany poziomów czynników. Koszt związany z przejściem pomiędzy poziomami poszczególnych czynników w takim przypadku zależy od ustawienia czynników na poziomach charakteryzowanych przez dwa następujące po sobie punkty obszaru eksperymentowania. Kolejność wykonywania doświadczeń w takim przypadku będzie wpływać na wartość ogólnego kosztu planowania eksperymentów.

Niech dany będzie teraz pewien materiał, którego sprężystość i grubość wpływają na właściwości wyrobu końcowego procesu produkcyjnego. Wówczas do przeprowadzenia doświadczeń zgodnie z planem  $2^2$  konieczne jest posiadanie (wytworzenie we własnym zakresie lub zamówienie u potencjalnego producenta) czterech próbek materiału o następujących właściwościach: materiału cienkiego o niskiej sprężystości, materiału cienkiego o wysokiej sprężystości, materiału grubego o niskiej sprężystości i materiału grubego o wysokiej sprężystości. Wymóg posiadania próbek materiału pociąga za sobą konieczność poniesienia określonego kosztu ich wytworzenia lub nabycia. W tym przypadku nie ma możliwości bezpośredniego manipulowania poziomami rozważanych czynników (sprężystości i grubości materiału), konieczne jest posiadanie tylu próbek, ile punktów obszaru eksperymentowania jest uwzględnionych w eksperymencie. Po nabyciu próbek i poniesieniu kosztu z tym związanego przeprowadzanie kolejnych doświadczeń nie wymaga dodatkowych nakładów pieniężnych związanych ze zmianą poziomów czynników, zatem kolejność realizacji doświadczeń w punktach obszaru eksperymentowania może być dowolna. W rozważanym przypadku elementy macierzy  $\mathbf{K}$  w poszczególnych wierszach mają taką samą wartość, która odpowiada kosztowi zakupu lub wytworzenia materiału o danych właściwościach.

W przypadku planowania eksperymentu bardzo często jako element kosztu wymienia się również czas [Draper i Stoneman, 1968, a za nimi również Joiner i Campbell, 1976]. Optymalne ustawienie czynników procesu wytwórczego jest warunkiem koniecznym do rozpoczęcia produkcji wyrobów o pożądanym parametrach. Przedłużające się badania skutkujące odroczeniem rozpoczęcia produkcji seryjnej są więc źródłem strat przedsiębiorstwa. Straty generowane w tym przypadku związane są z niewytworzeniem wyrobów i nieprzekazaniem ich do odbiorcy oraz z nieotrzymaniem za nie zapłaty. Niejednokrotnie w takim przy-



padku na dostawcę nakładane są finansowe kary umowne. Z tego względu w przedsiębiorstwach dąży się do minimalizacji czasu całkowitego przeprowadzenia planowania eksperymentu, co w praktyce oznacza ograniczenie do minimum wymaganej liczby przeprowadzanych doświadczeń.

### 3. Procedura wyboru planu eksperymentu dla zadanego poziomu kosztów jakości

Celem planowania eksperymentów jest uzyskanie dla procesu produkcyjnego odpowiednich rezultatów technologicznych i ekonomicznych. Jedną ze składowych rezultatów ekonomicznego procesu produkcyjnego są koszty niezgodności, które mogą stanowić ekonomiczną ocenę własności narzędzia planowania eksperymentów.

Istotnym elementem w projektowaniu planu eksperymentu jest uwzględnienie kosztów realizacji poszczególnych doświadczeń. Zatem właściwe wydaje się poszukiwanie procedury, która pozwoli na określenie kolejności wykonywania doświadczeń przy jednoczesnym ograniczeniu kosztów z tym związanych.

Niech dany będzie plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^m$  wraz z odpowiadającą mu macierzą kosztów  $\mathbf{K}$  postaci (5), określoną na podstawie wyników historycznych lub fachowej wiedzy eksperymentatora. Wówczas proponowana procedura doboru kolejnych punktów obszaru eksperymentowania obejmuje następujące etapy:

1. Losowy wybór punktu początkowego  $\mathbf{x}_{n_1}$ , dla  $n_1 \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$ , skonstruowanego planu eksperymentu, w którym zrealizowane zostanie pierwsze doświadczenie.
2. Na podstawie  $n_1$ -tego wiersza macierzy  $\mathbf{K}$  dobór punktu  $\mathbf{x}_{n_2}$  obszaru eksperymentowania, dla którego wartość  $k_{ij}$  ( $i \neq j$ ) jest najmniejsza. Jeżeli punktów takich jest więcej niż jeden, to kolejny punkt obszaru eksperymentowania zostaje wybrany w sposób losowy spośród wskazanych punktów.
3. Powtarzanie punktu 2 niniejszego algorytmu w celu realizacji pojedynczego doświadczenia w każdym punkcie obszaru eksperymentowania.

Proponowana procedura prowadzi do wyznaczenia schematu realizacji doświadczeń planu całkowitego eksperymentu czynnikowego postaci

$$P_{2^m} = \{\mathbf{x}_{n_1}, \mathbf{x}_{n_2}, \dots, \mathbf{x}_{n_m}\}, n_i \in \{1, 2, \dots, 2^m\},$$

uwzględniającego koszty zmian poziomów czynników we wszystkich punktach obszaru eksperymentowania uwzględnionych w planie.

W przypadku planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{m-k}$  powyższą procedurę należy poprzedzić określeniem wszystkich możliwych planów ułamkowych. Wówczas losowo wybrany punkt początkowy  $\mathbf{x}_{n_1}$  determinuje odpowiedni plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego. Tak wybrany plan eksperymentu określa macierz kosztów o wymiarach  $[2^{m-k} \times 2^{m-k}]$ , na podstawie której ustala się kolejność wykonywania doświadczeń zgodnie z punktami 2 i 3 prezentowanego algorytmu.

#### 4. Koszty realizacji klasycznego i alternatywnego planu eksperymentu czynnikowego – przykład liczbowy

Przykład liczbowy obrazujący ekonomiczne korzyści wynikające ze stosowania proponowanego algorytmu konstrukcji planu eksperymentu obejmować będzie dwa warianty. W pierwszym przypadku celem planu całkowitego eksperymentu czynnikowego jest wyznaczenie najlepszej konfiguracji poziomów czynników blachy stosowanej w procesie produkcji tłumików samochodowych. Natomiast drugi wariant dotyczyć będzie planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego mającego na celu optymalne ustawienie czynników wpływających na właściwości pewnego produktu chemicznego. Każdy z prezentowanych planów uwzględnia trzy czynniki występujące na dwóch poziomach. Ponadto w obu przypadkach koszty zmian poziomów uwzględnionych czynników oszacowane zostały przez eksperymentatora, natomiast jednostkowy koszt związany z pracą eksperymentatorów i analizą uzyskanych wyników wynosi 10 jednostek.

Plan całkowitego eksperymentu czynnikowego typu  $2^3$  określa wpływ grubości ( $X_1$ ) i plastyczności ( $X_2$ ) blachy oraz rodzaju stopu metalu ( $X_3$ ), z którego została wykonana, na pewien parametr charakteryzujący jakość wykonania tłumików samochodowych. Dla tak określonego planu eksperymentu występuje konieczność zakupu ośmiu próbek o odpowiednich właściwościach. W tym przypadku macierz kosztów związanych ze zmianą poziomów czynników kształtuje się następująco:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 3 & 15 & 20 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 3 & 15 & 20 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 0 & 3 & 15 & 20 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 8 & 0 & 15 & 20 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 8 & 3 & 0 & 20 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 8 & 3 & 15 & 0 & 1 & 5 \\ 10 & 5 & 8 & 3 & 15 & 20 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 8 & 3 & 15 & 20 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ w analizowanym przypadku koszt zmiany poziomu czynników to koszt zakupu próbki o danych parametrach, kolejność wykonywania doświadczeń nie wpływa na wartość całkowitego kosztu planu eksperymentu.

W związku z tym oczekiwane koszty związane z wyznaczeniem schematu realizacji doświadczeń w sposób losowy (podejście klasyczne) oraz zgodnie z prezentowanym algorytmem (podejście alternatywne) są jednakowe. W celu oceny ich wartości przeprowadzono symulację komputerową polegającą na wyznaczeniu 10 000 razy planów eksperymentu zgodnie z porównywanymi dwoma koncepcjami i uśrednieniu otrzymanych wyników. Na podstawie przeprowadzonych analiz można przyjąć, iż oczekiwany koszt eksperymentu w tym przypadku, niezależnie od zastosowanego algorytmu, wynosi 25,21 jednostki.

Rozważając plan ułamkowego eksperymentu czynnikowego typu  $2^{3-1}$ , którego celem jest charakterystyka wpływu temperatury ( $X_1$ ), ciśnienia ( $X_2$ ) i szybkości mieszania ( $X_3$ ) na właściwości pewnego produktu chemicznego, uwzględnić należy cztery doświadczenia spośród ośmiu składających się na obszar eksperymentowania. W przypadku wyznaczania najlepszego ustawienia poszczególnych czynników jednostkowe koszty przejścia pomiędzy poszczególnymi punktami eksperymentowania określa następująca macierz:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 18 & 5 & 17 & 3 & 4 & 20 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 5 & 2 & 10 & 2 \\ 25 & 15 & 0 & 15 & 15 & 20 & 15 & 3 \\ 10 & 15 & 25 & 0 & 25 & 5 & 5 & 8 \\ 12 & 3 & 7 & 10 & 0 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 30 & 3 & 12 & 0 & 8 & 9 \\ 8 & 15 & 20 & 3 & 15 & 5 & 0 & 10 \\ 15 & 10 & 5 & 3 & 11 & 18 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla tak określonego eksperymentu wyznaczono schemat realizacji doświadczeń ułamkowego planu eksperymentu czynnikowego zgodnie z klasycznym i alternatywnym algorytmem. Wyznaczone schematy, dla planów których początkiem jest punkt  $\mathbf{x}_5$ , odpowiednio dla podejścia klasycznego ( $P_4$ ) i alternatywnego ( $P_4^*$ ) są następującej postaci:

$$P_4 = \{\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_7\},$$

$$P_4^* = \{\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_8\}.$$

Dla wyznaczonych schematów realizacji doświadczeń, przy założonej macierzy kosztów, całkowity koszt realizacji poszczególnych eksperymentów wynosi odpowiednio:

$$K_4 = k_{56} + \mathbf{x}_{68} + \mathbf{x}_{87} + 4 \cdot k_p = 7 + 9 + 7 + 4 \cdot 10 = 63,$$

$$K_4^* = k_{57} + \mathbf{x}_{76} + \mathbf{x}_{68} + 4 \cdot k_p = 7 + 5 + 9 + 4 \cdot 10 = 61,$$

gdzie:

$K_4$  – całkowity koszt stosowania planu  $P_4$ ,

$K_4^*$  – całkowity koszt stosowania planu  $P_4^*$ ,

$k_{ij}$  – element macierzy  $\mathbf{K}_2$ ,

$k_p$  – jednostkowy koszt pomiaru (równy 10 jednostkom).

Zauważyć należy, iż koszt związany ze stosowaniem proponowanej procedury jest niższy niż ten związany ze stosowaniem klasycznego planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego.

W podejściu klasycznym kolejność wykonywania doświadczeń jest losowa, zatem koszty planowania eksperymentu w tym przypadku także mają charakter losowy. Koszty stosowania proponowanej procedury również są losowe, gdyż pierwszy punkt eksperymentowania wybierany jest w sposób losowy. Ponieważ koszty związane z przedstawionymi powyżej schematami są tylko realizacjami odpowiednich zmiennych losowych, przeprowadzono symulację komputerową polegającą na wyznaczeniu 10 000 razy planów eksperymentu zgodnie z proponowaną procedurą oraz na wyznaczeniu kosztów związanych z ich stosowaniem i uśrednieniu otrzymanych wyników.

Uśrednione koszty związane ze stosowaniem rozważanych ułamkowych planów eksperymentu traktować można jako ich wartość oczekiwaną. W rozważanym przypadku oczekiwany koszt związany ze stosowaniem klasycznego planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego wynosi 34,09 jednostki, a oczekiwany koszt związany z zastosowaniem proponowanej procedury wyznaczania alternatywnego planu ułamkowego eksperymentu czynnikowego kształtuje się na poziomie 27,5 jednostki. Ponieważ oczekiwany całkowity koszt związany z zastosowaniem podejścia alternatywnego jest niższy, wysnuć należy wniosek, iż wykorzystanie proponowanej metody jest bardziej korzystne z ekonomicznego punktu widzenia, niż wykorzystanie metody klasycznej.

## Podsumowanie

Planowanie eksperymentów zaliczane do metod statystycznego sterowania procesem umożliwia doskonalenie jakości wyrobów oraz oddziałuje na ekonomiczne rezultaty procesu produkcyjnego. Przeprowadzenie eksperymentu dostarcza niezbędnych informacji na temat możliwości procesu produkcyjnego

poprzez realizację eksperymentu we wskazanych przez plan punktach obszaru eksperymentowania. Losowa kolejność realizacji doświadczeń w przypadku klasycznych planów eksperymentu wpływa na losowość kosztów związanych z ich stosowaniem.

Proponowany w artykule ułamkowy plan eksperymentu czynnikowego uwzględniający koszty związane z jego stosowaniem pozwala na zmniejszenie oczekiwanych kosztów jego stosowania poprzez ograniczenie losowości doboru kolejnych punktów eksperymentowania. Źródłem losowości kosztów związanych ze stosowaniem proponowanej procedury pozostaje nadal wybór pierwszego elementu oraz wybór elementu, w przypadku gdy z danego punktu obszaru eksperymentowania występują co najmniej dwa punkty obszaru eksperymentowania, do których koszt przejścia jest najniższy.

Przedstawiony w pracy alternatywny do klasycznego schemat wyboru kolejnych punktów obszaru eksperymentowania jest metodą, którą stosować można w przypadku dowolnego planu eksperymentu. Schemat ten może mieć szczególne zastosowanie w przypadku, gdy ze zmianą poziomów czynników związane są zmienne koszty. W takiej sytuacji proponowany algorytm umożliwia optymalizację ponoszonych kosztów planowania eksperymentu, przynosząc wymierne korzyści ekonomiczne.

*Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/03/B/HS4/05630.*

## Literatura

- Aczel A.D. (2000), *Statystyka w zarządzaniu*, WN PWN, Warszawa.
- Draper N.R., Stoneman D.M. (1968), *Factor changes and Linear Trends in Eight-Run Two-Level Factorial Designs*, „Technometrics”, No. 10.
- Iwasiewicz A. (1999), *Zarządzanie jakością*, WN PWN, Warszawa-Kraków.
- Joiner B. L., Campbell C. (1976), *Designing Experiments When Run Order is Important*, „Technometrics”, No. 18.
- Juran J.M., Gryna F. M. (1974), *Jakość. Projektowanie. Analiza*, WNT, Warszawa.
- Konarzewska-Gubała E. (2003): *Koszty jakości w koncepcji TQM* [w:] E. Konarzewska-Gubała (red.), *Zarządzanie przez jakość. Koncepcje, metody, studia przypadków*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- Kończak G. (2007), *Metody statystyczne w sterowaniu jakością produkcji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Montgomery D.C. (2001), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Montgomery D.C. (1997), *Introduction to statistical quality control*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Szerszunowicz M. (2013), *Sequence of Experimental Trials and Factorial Design of Experiment Realization Costs* [w:] Cz. Domański (red.), *Acta Universitatis Lodziensis – Folia Oeconomica* 286, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Wawrzynek J. (2009), *Planowanie eksperymentów zorientowane na doskonalenie jakości produktu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.

Wawrzynek J. (1993), *Statystyczne planowanie eksperymentów w zagadnieniach regresji w warunkach małej próby*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.

### ON THE COSTS OF REALIZATION OF FACTORIAL DESIGN OF EXPERIMENT

**Summary:** Design of experiments as a method of statistical quality control enables proper planning and preparation of the production process by determining the levels of the factors and to determine their impact on the effects of realized process. This method is readily applicable in enterprises, as only correctly set process running smoothly. This results in a reduced number of produced defective elements, i.e. lower costs of internal and external lacks. The use of factorial design, however, requires incurring some financial outlay.

The purpose of this article is to present the structure of the costs incurred by companies in connection with the use of the factorial design and to indicate possibilities of such planning factorial experiment that the costs were minimized. In the paper will be presented an algorithm of implementation fractional factorial design taking into account the cost of its maintenance. The proposed method of carrying out the design will be compared with the costs of implementation classical factorial design.

**Key words:** design of experiments, fractional factorial design, costs.