

**Andrzej Wójcik**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# **MODELE WEKTOROWO-AUTOREGRESYJNE JAKO ODPOWIEDŹ NA KRYTYKĘ STRUKTURALNYCH WIELORÓWNANIOWYCH MODELI EKONOMETRYCZNYCH**

## **Wprowadzenie**

Komisja Cowlesa<sup>1</sup> stworzyła podstawy budowy oraz weryfikacji modeli ekonometrycznych; z biegiem czasu głównym obiektem jej zainteresowania stały się strukturalne modele wielorównaniowe. Członkowie Komisji skupili się na badaniu struktury powiązań pomiędzy zmiennymi oraz estymacji modeli wielorównaniowych.

Estymacja parametrów strukturalnych wielorównaniowych modeli ekonometrycznych przysparza pewne problemy. Szacowanie parametrów wielorównaniowych modeli strukturalnych poprzedza badanie identyfikowalności. Możliwe jest oszacowanie jedynie modeli jednoznacznie bądź też niejednoznacznie identyfikowalnych (badanie identyfikowalności parametrów strukturalnych modeli wielorównaniowych można znaleźć w większości podręczników do ekonometrii) – [Barczak, Biolik, 2002]. Problem pojawia się wtedy, gdy modele są nieidentyfikowalne. Rozwiązanie tego problemu jest bardzo proste, ale równocześnie bardzo problematyczne. Należy do odpowiedniego równania bądź też kilku równań dodać kilka zmiennych lub też z niektórych równań usunąć pewne zmienne. Tu nasuwa się pytanie dlaczego mamy dodawać zmienne, których wcześniej nie uwzględnialiśmy w naszym modelu lub też dlaczego mamy usuwać zmienne, które naszym zdaniem powinny się znaleźć w równaniach modelu.

W latach 70. XX w. coraz powszechniejsza stała się krytyka strukturalnego podejścia do modelowania wielorównaniowego, którego podstawy zostały stwo-

---

<sup>1</sup> Komisja Cowlesa została powołana przez Alfreda Cowlesa w 1932 r., jej celem były badania w ekonomii.

rzony przez Komisję Cowlesa, również z tego powodu, że proste metody analizy szeregów czasowych mogły w pewnych warunkach z powodzeniem konkurować z dużymi i bardzo skomplikowanymi strukturalnymi modelami wielorównanowymi.

Alternatywą dla dużych i często bardzo skomplikowanych strukturalnych modeli wielorównanowych miały stać się modele wektorowo-autoregresyjne. Podstawy modelowania wektorowo-autoregresyjnego przedstawił w 1980 r. w swoim artykule C.A. Sims [1980].

## 1. Podstawy modelowania wektorowo-autoregresyjnego

Główne różnice między metodologią stosowaną przez C.A. Simsa a metodologią wynikającą z podejścia strukturalnego Komisji Cowlesa są następujące [Charemza, Deadman, 1997]:

1. Nie istnieje podział a priori na zmienne endogeniczne i egzogeniczne.
2. Nie zakłada się warunków zerowych.
3. Nie ma ścisłej (i poprzedzającej modelowanie) teorii ekonomicznej, która stanowiłaby podstawę modelu.

Pierwsza zasada jest konsekwencją założenia, że każda zmienna konstytuuje osobne równanie modelu, a więc jest tyle równań ile jest zmiennych użytych w badaniu. Nie ma podziału na zmienne egzogeniczne i endogeniczne. Zmienneymi objaśniającymi są opóźnienia wszystkich zmiennych objaśnianych, a więc tak naprawdę jest to model prosty, czyli nie ma potrzeby nakładania restrykcji zerowych, aby uzyskać identyfikowalność modelu.

Skoro zmiennymi objaśniającymi są opóźnienia wszystkich zmiennych biorących udział w badaniu, a zmiennymi objaśnianymi są wszystkie zmienne użyte do modelowania, to wszystkie zmienne zależą od wszystkich, a więc nie ma tu miejsca na jakiegokolwiek założenia stanowiące punkt wyjścia, poza bardzo ogólnymi zasadami ekonomicznymi.

Metodologia zaproponowana przez C.A. Simsa spotkała się początkowo z krytyką; wielu ekonometryków uważało ją za teoretyczną, skoro nie ma w niej miejsca na uwzględnienie w modelu ekonometrycznym konkretnych hipotez ekonomicznych, a do skonstruowania modelu ekonometrycznego nie jest potrzebna wiedza o powiązaniach pomiędzy zmiennymi. Wiedza ekonomiczna jest jednak niezbędna do wyboru zmiennych, tak więc przy wyborze zmiennych należy opierać się na określonej teorii ekonomicznej.

Klasyczna postać modelu wektorowo-autoregresyjnego zaproponowana przez C.A. Simsa przedstawia się następująco:

$$Z_t = \sum_{i=1}^k A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie:

$Z_t$  – wektor obserwacji bieżących wartości wszystkich  $n$  zmiennych modelu,

$A_i$  – macierz autoregresyjnych operatorów poszczególnych procesów, w których a priori nie zakłada się żadnych elementów zerowych,

$\varepsilon_t$  – wektor procesów reszkowych, w odniesieniu do którego przyjmuje się, że poszczególne składowe są jednocześnie skorelowane ze sobą, ale nie zawierają autokorelacji,

$k$  – rząd modelu VAR.

Kontynuatorzy prac C.A. Simsa zmodyfikowali postać klasyczną modelu VAR, dodając do niego składnik zawierający średnią procesu, deterministyczny trend oraz deterministyczną sezonowość.

Zmodyfikowany model wektorowo-autoregresyjny można zapisać w postaci:

$$Z_t = A_0 D_t + \sum_{i=1}^k A_i Z_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

gdzie:

$D_t$  – wektor deterministycznych składników równań,

$A_0$  – macierz parametrów przy zmiennych wektora  $D_t$ .

Jak już wcześniej podkreślono, model postaci (2) jest modelem prostym, a więc do oszacowania jego parametrów można zastosować klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (KMNK), aby oszacować każde równanie osobno. Składniki losowe poszczególnych równań nie powinny wykazywać autokorelacji, aczkolwiek z założenia wielowymiarowy składnik losowy  $\varepsilon_t$  ma niediagonalną macierz kowariancji i wydaje się oczywiste, że do estymacji parametrów modelu nie powinno się wykorzystywać KMNK, lecz inne metody.

Estymatory uzyskane metodą KMNK są zgodne i asymptotycznie efektywne. Na współczynniki modelu (2) nie nałożono żadnych warunków, a macierze  $A_i$  oraz  $A_0$  nie zawierają elementów zerowych, dlatego estymatory wielowymiarowej metody najmniejszych kwadratów nie dają estymatorów efektywniejszych niż klasyczna metoda najmniejszych kwadratów, a więc KMNK jest odpowiednia do oszacowania parametrów modeli wektorowo-autoregresyjnych.

Pierwszym, a zarazem najważniejszym etapem budowy modeli wektorowo-autoregresyjnych jest wybór zmiennych do modelu. Ekonometryk, dokonując wyboru zmiennych, powinien posiadać gruntowną wiedzę o modelowanym zja-

wisku, ponieważ każda dodatkowa zmienna konstytuuje dodatkowe równanie, a jej opóźnienia powodują powiększenie się zbioru zmiennych objaśniających. Wybór rzędu opóźnień powinien odzwierciedlać naturalne interakcje pomiędzy zmiennymi. Przy ograniczonej liczbie obserwacji, dołączenie każdej kolejnej zmiennej powoduje więc zmniejszenie stopni swobody.

Drugim etapem modelowania wektorowo-autoregresyjnego jest zbadanie stacjonarności zmiennych. Jeżeli szereg czasowy nie jest stacjonarny, to większość sprawdzianów testów nie ma pożądanych rozkładów [Lütkepohl, 1991]. Testy przyczynowości będą nadal obowiązywać, jeżeli opiszemy niestacjonarność zmiennych modelem zawierającym trend deterministyczny lub modelem dla pierwszych różnic bądź logarytmów zmiennych [Geweke, 1984].

Kolejnym krokiem jest wybór rzędu opóźnień zmiennych. Jak już wcześniej zasygnalizowano, ustalając maksymalny rząd opóźnień, należy uwzględnić możliwość występowania autokorelacji składników losowych, a więc dla danych kwartalnych maksymalny badany rząd opóźnień zmiennych powinien wynieść co najmniej 4, dla danych miesięcznych 12. Występowanie autokorelacji składników losowych może prowadzić do niezgodnych oszacowań parametrów, zatem ustalając rząd opóźnień zmiennych, należy kierować się (oprócz innych kryteriów omówionych w dalszej części pracy) brakiem autokorelacji reszt w oszacowanych modelach [Charemza, Deadman, 1997].

Jeżeli ustalono już rząd opóźnień zmiennych, to należy przystąpić do oszacowania parametrów modelu VAR. Bardzo istotnym etapem jest weryfikacja modelu, a więc należy przede wszystkim sprawdzić, czy nie zachodzi autokorelacja składników losowych oraz czy reszty mają rozkład normalny.

Jeżeli model przeszedł pozytywnie etap weryfikacji, to może posłużyć do wyznaczenia prognoz.

### 1.1. Badanie stacjonarności zmiennych

Bardzo duża część szeregów czasowych jest niestacjonarna, co stanowi poważny problem w analizie ekonometrycznej. P.C.B. Phillips [1986] wykazał, że własności statystyczne analizy regresji dla niestacjonarnych szeregów czasowych są w większości przypadków wątpliwe, a część sprawdzianów testów nie ma zakładanego rozkładu statystycznego.

Proces stochastyczny (uporządkowany w czasie zbiór zmiennych losowych) jest stacjonarny (silnie stacjonarny), jeżeli łączne i warunkowe rozkłady prawdopodobieństwa procesu nie zmieniają się przy przesunięciach w czasie [Charemza,

Deadman, 1997]. Na ogół są to zbyt restrykcyjne warunki i w badaniach ekonomicznych wystarczy, aby szeregi czasowe były słabo stacjonarne, a więc aby były spełnione założenia [Kusideł, 2000]:

$$- \text{stałej w czasie średniej procesu: } E(x_t) = E(x_{t-k}) = \mu; \quad (3)$$

$$- \text{stałej w czasie wariancji: } E[(x_t - \mu)^2] = E[(x_{t-k} - \mu)^2] = \sigma^2; \quad (4)$$

- niezależnej od czasu, a jedynie od okresu (interwału) – s, kowariancji:

$$E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] = E[(x_{t-s} - \mu)(x_{t-k-s} - \mu)] = \gamma_s. \quad (5)$$

Zwykle dla uproszczenia zamiast pojęcia szeregu generowanego przez proces (nie)stacjonarny używa się terminów: zmienna (nie)stacjonarna lub szereg (nie)stacjonarny.

Niestacjonarność może być skutkiem tego, iż zmienna składa się z deterministycznego trendu i stacjonarnej zmiennej losowej wyrażającej odchylenia od niego:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \xi_t, \quad (6)$$

lub generuje ją proces nazywany ścieżką losową albo błędzeniem losowym [Welfe, 2003]:

$$y_t = y_{t-1} + \xi_t. \quad (7)$$

Przyczyna niestacjonarności zmiennych wymusza sposób ich filtrowania. Jeżeli proces jest stacjonarny wokół trendu, to należy dołączyć do zestawu zmiennych objaśniających zmienną czasową lub wyeliminować trend ze zmiennych. Zmienna czasowa może mieć różną postać, w zależności od tego jaki trend występuje w badanym procesie, np.: liniowy, kwadratowy, logarytmiczny.

W przypadku niestacjonarności spowodowanej błędzeniem losowym, należy dokonać opóźnienia zmiennych, aby ich przyrosty były stacjonarne. Niektóre szeregi wymagają kilkukrotnego różnicowania, aby były stacjonarne. Niestety pomimo wielokrotnego różnicowania, niektóre szeregi nigdy nie będą stacjonarne (tzw. procesy niezintegrowane). W przypadku użycia operatora różnicowania, proces wyjściowy staje się w stosunku do spełniającego warunki stacjonarności procesem zintegrowanym o stopniu integracji równym liczbie koniecznych powtórzeń operacji różnicowania, aby osiągnąć stacjonarność szeregu [Majsterek, 2008].

Proces generujący szereg statystyczny  $y$  nazywa się zintegrowanym w stopniu  $d$ , jeśli daje się przedstawić jako stacjonarny, odwracalny proces ARMA po  $d$ -krotnym różnicowaniu [Engle, Granger, 1987]. Szereg zintegrowany  $y_t$  stopnia  $d$  zazwyczaj oznacza się symbolem:  $y_t \sim I(d)$ .

Najpopularniejszymi testami służącymi do badania zintegrowania szeregów są: test Dickeya-Fullera, rozszerzony test Dickeya-Fullera, test Philipisa-Perrona oraz test KPSS [Kwiatkowski, Philips, Schmidt, Shin, 1992]. Poniżej zaprezen-

towano rozszerzony test Dickeya-Fullera. Szerzej o testach Philipisa-Perrona oraz KPSS można znaleźć w pracy M. Doman i R. Doman [2004].

### Rozszerzony test Dickeya-Fullera

Rozszerzony test Dickeya-Fullera, nazywany w skrócie testem ADF, różni się od testu DF równaniem podlegającym testowaniu. W przypadku testu ADF wygląda ono następująco:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (8)$$

Wartość  $k$  oznacza liczbę opóźnień; ustalając ją należy uwzględnić, aby była jak najniższa, ale na tyle duża, aby wykluczyć autokorelacje składnika losowego. Przy jej ustalaniu można skorzystać z kryterium informacyjnego Akaike'a lub z kryterium Schwarza.

Procedura testu ADF jest analogiczna do procedury testu DF. Hipoteza zerowa ( $H_0: \delta = 0$ ) zakłada, że proces jest zintegrowany stopnia pierwszego, natomiast hipoteza alternatywna ( $H_1: \delta < 0$ ) zakłada stacjonarność badanego procesu. Wartości krytyczne stosowane w tym teście są identyczne z wartościami krytycznymi stosowanymi w teście Dickeya-Fullera.

Dodatkowo, rozszerzony test Dickeya-Fullera może posłużyć do testowania hipotezy o występowaniu pierwiastka jednostkowego przeciwko hipotezie alternatywnej mówiącej o występowaniu trendu deterministycznego. Testowane równanie w tym przypadku wygląda następująco:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \delta \alpha_{1t} + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \delta_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (9)$$

## 1.2. Wybór rzędu opóźnień w modelu wektorowo-autoregresyjnym

W modelu wektorowo-autoregresyjnym jako zmienne objaśniające występują opóźnienia wszystkich zmiennych. Wybór rzędu opóźnień zmiennych jest bardzo istotną kwestią przy modelowaniu wektorowo-autoregresyjnym. Istnieje kilka kryteriów wskazujących ekonometrykowi najlepszy rząd opóźnień; do najpopularniejszych z nich należą [Jadamus-Hacura, Melich-Iwanek, 2009]:

- kryterium informacyjne Akaike'a AIC (Akaike Information Criterion):

$$AIC(k) = \ln|\hat{\Sigma}_k| + \frac{2n^2k}{T} \quad (10)$$

- kryterium informacyjne Schwarza BIC (Bayesian Schwarz Criterion):

$$BIC(k) = \ln |\hat{\Sigma}_k| + \frac{n^2 k \ln T}{T} \quad (11)$$

- kryterium informacyjne Hannana i Quinna (HQ):

$$HQ(k) = \ln |\hat{\Sigma}_k| + \frac{2n^2 k \ln \ln T}{T}, \quad (12)$$

gdzie:

$k$  – rząd opóźnień zmiennych w modelu VAR  $|\hat{\Sigma}_k|$  jest wyznacznikiem estymatora macierzy  $\Sigma$  dla stacjonarnego modelu VAR(k).

Wszystkie te kryteria sugerują rząd opóźnień zmiennych, dla którego wartość kryterium jest najmniejsza, a więc utrata informacji jest najmniejsza.

W celu wyznaczenia optymalnego rzędu opóźnień zmiennych w modelu wektorowo-autoregresyjnym można posłużyć się również ilorazem wiarygodności LR. Badanie rozpoczyna się od najdłuższego możliwie rzędu opóźnień (ze względu na liczbę stopni swobody) lub najbardziej prawdopodobnego np. dla danych kwartalnych – wielokrotność 4, a dla danych miesięcznych – wielokrotność 12. Wybrany rząd opóźnień  $k$  ograniczamy o  $r$  i szacujemy parametry równań modelu VAR dla  $k-r$  opóźnień. W kolejnym kroku weryfikujemy hipotezę zerową mówiącą, że długość opóźnień w modelu wynosi  $k-r$  przeciw hipotezie mówiącej, że wynosi ona  $k$ .

Do weryfikacji hipotezy zerowej służy statystyka LR dana wzorem:

$$LR = T \ln |\Sigma_{k-r}| - \ln |\Sigma_k|, \quad (13)$$

gdzie:

$T$  – liczba dostępnych obserwacji,

$|\Sigma_{k-r}|$  – wyznacznik macierzy wariancji i kowariancji reszt modelu o liczbie opóźnień  $k-r$ ,

$|\Sigma_k|$  – wyznacznik macierzy wariancji i kowariancji reszt modelu o liczbie opóźnień  $k$ .

Statystyka LR ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z liczbą stopni swobody równą liczbie ograniczeń w całym modelu. Jeżeli nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, a więc wartość statystyki LR jest mniejsza od odpowiedniej wartości odczytanej z tablic rozkładu  $\chi^2$ , to należy kontynuować postępowanie zmniejszając liczbę opóźnień. Procedura kończy się, gdy odrzucimy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej.

Wszystkie te kryteria sugerują badaczowi optymalny rząd opóźnień, jednak decyzję o wielkości rzędu opóźnień musi podjąć sam badacz, zwracając szcze-

gólną uwagę na możliwość wystąpienia autokorelacji składników losowych. Wystąpienie autokorelacji składników losowych może prowadzić do niezgodnych oszacowań modelu, jeśli metodą stosowaną do estymacji parametrów modelu będzie klasyczna metoda najmniejszych kwadratów lub wielowymiarowa metoda najmniejszych kwadratów.

### 1.3. Estymacja oraz weryfikacja modelu VAR

W modelu wektorowo-autoregresyjnym VAR zmiennymi objaśniającymi są opóźnienia wszystkich zmiennych występujących w modelu, a więc jest to wielorównaniowy model prosty, w którym nie występują żadne powiązania pomiędzy zmiennymi endogenicznymi. Dodatkowo z definicji zmienne te są nieskorelowane ze składnikiem losowym (przy zakładanym braku autokorelacji). Do oszacowania parametrów takiego modelu można posłużyć się metodą najmniejszych kwadratów. Można również zastosować wielowymiarową metodę najmniejszych kwadratów, aby uwzględnić niezerowe kowariancje składników losowych. Estymatory uzyskane wielowymiarową metodą najmniejszych kwadratów nie są efektywniejsze od estymatorów danych KMNK [Harvey, 1989], dlatego nie ma sensu stosować metody bardziej skomplikowanej i śmiało można zastosować KMNK, szacując parametry każdego równania po kolei.

Do podstawowych wymagań stawianych składnikom losowym modeli wektorowo-autoregresyjnego należą: brak autokorelacji oraz rozkład normalny.

#### Badanie autokorelacji składnika losowego modelu

Weryfikując modele VAR, należy upewnić się, że nie występuje autokorelacja reszt nie tylko pierwszego stopnia, ale również wyższych stopni aż do stopnia równego liczbie opóźnień, zwracając szczególną uwagę na 4 stopień w przypadku danych kwartalnych i 12 dla danych miesięcznych.

Do weryfikacji autokorelacji składników losowych poszczególnych równań można posłużyć się testem Ljunga-Boxa [Ljung, Box, 1978]. Hipoteza zerowa mówi o braku autokorelacji, natomiast alternatywna mówi o tym, że autokorelacja składnika losowego jest istotna statystycznie.

Do weryfikacji hipotezy zerowej służy statystyka  $Q$ , dana wzorem:

$$Q = T(T + 2) \sum_{i=1}^m \frac{\rho_i^2}{T-i}, \quad (14)$$

gdzie:

$m$  – badany rząd autokorelacji,

$\rho_i$  – współczynnik autokorelacji  $i$ -tego rzędu.



Statystyka  $Q$  ma rozkład  $\chi^2$  z  $m$  stopniami swobody. Jeżeli wartość statystyki (14) jest większa od wartości krytycznej odczytanej z tablic, to hipotezę zerową mówiącą o braku autokorelacji rzędu  $m$  należy odrzucić. W przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej – autokorelacja rzędu  $m$  nie jest istotna statystycznie.

### Badanie normalności rozkładu składnika losowego

Do badania normalności rozkładów składników losowych można posłużyć się testem Jarque'a-Bera [Jarque, Bera, 1987]. Badamy wtedy normalność rozkładu składników losowych poszczególnych równań modelu po kolei.

Hipoteza zerowa w teście tym zakłada normalność rozkładu składnika losowego, natomiast hipoteza alternatywna mówi o tym, że składnik losowy modelu nie ma rozkładu normalnego. Do weryfikacji hipotezy zerowej służy statystyka  $JB$ , dana wzorem [Osińska, red., 2007]:

$$JB = n \left[ \frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right], \quad (15)$$

gdzie:

$S$  jest miarą skośności,

$K$  jest miarą kurtozy,

$$S = \frac{\mu_3^3}{\mu_2^2},$$

$$K = \frac{\mu_4^4}{\mu_2^2},$$

$\mu_2, \mu_3, \mu_4$  – oznaczają odpowiednio drugi, trzeci i czwarty moment centralny.

Statystyka  $JB$  ma rozkład chi-kwadrat z dwoma stopniami swobody. Wartość statystyki  $JB$  większa od wartości odczytanej z tablic statystycznych oznacza, że należy odrzucić hipotezę zerową o normalności rozkładu składnika losowego.

Do badania normalności składnika losowego można również posłużyć się na przykład testem Doornika-Hansena [Doornik, Hansen, 2008].

## 2. Przykłady zastosowań modeli wektorowo-autoregresyjnych w badaniach ekonomicznych

Zastosowanie modeli wektorowo-autoregresyjnych VAR jest bardzo szerokie. Przykłady zastosowania modeli VAR można znaleźć zarówno w literaturze polskiej, jak i w światowej. W tym miejscu autor chciałby zwrócić uwagę na

wybrane zastosowania modeli VAR. Wybór jest subiektywny i ma na celu pokazanie różnorodności tematów, do analizy których zostały wykorzystane modele wektorowo-autoregresyjne. Przedstawionych zostało jedynie kilka pozycji literaturowych, spośród bardzo wielu również zasługujących na uznanie.

Holenderski ekonometryk J.A. Bikker wykorzystuje modele VAR do prognozowania oraz modelowania gospodarek narodowych [Bikker, 1999], badał również zależności pomiędzy gospodarkami różnych krajów [Bikker, 1993].

F. Canova badał zależność pomiędzy produkcją Niemiec, USA i Japoni [Canova, 1995]. Wraz z J. Piną zajmował się również polityką walutową [Canova, Pina, 2005].

J. de Haan i J.E. Sturm analizowali powiązania pomiędzy realnym deficytem i realnym wzrostem dochodu narodowego [Sturm, Haan, 1995], a F.C. Bagliano i C.A. Favero analizowali mechanizm transmisji polityki monetarnej w USA [Bagliano, Favero, 1998].

D. Orden oraz P.L. Fackler stosowali modele wektorowo-autoregresyjne do modelowania cen w rolnictwie [www1].

Od opublikowania pracy Johannesa [Johansen, 1998] modele VAR są używane w badaniach kointegracji nad istnieniem długookresowej równowagi pomiędzy różnymi wielkościami ekonomicznymi.

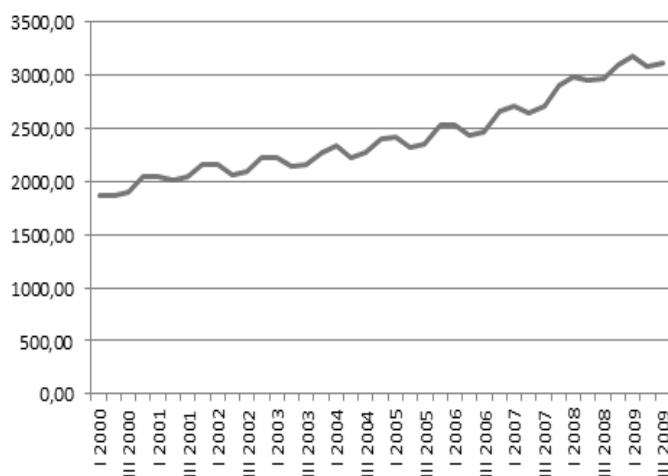
W literaturze polskojęzycznej również można znaleźć wiele zastosowań modeli VAR, np.:

- analiza cen wyrobów stalowych [Miczka, Szulc, 2011],
- analiza współzależności kursów akcji spółek branży cukrowniczej [Dudek, 2008],
- badanie ryzyka rynkowego na podstawie instrumentów polskiego rynku transakcji terminowych futures [Kusideł, 2002].

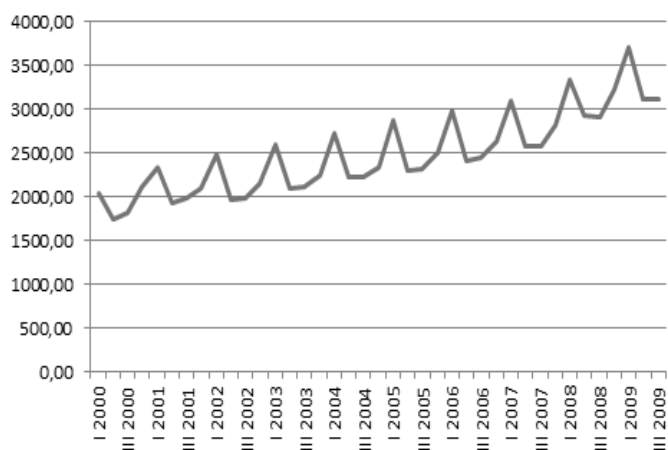
### **3. Zastosowanie modelu VAR do prognozowania przeciętnych miesięcznych wynagrodzeń**

W niniejszym artykule autor zastosuje modele wektorowo-autoregresyjne VAR do modelowania i prognozowania warunków życia ludności. Do modelowania autor użył dwóch zmiennych: przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia brutto w gospodarce narodowej oraz przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia brutto w sferze budżetowej.

Rozważane zmienne są mierzone w PLN, a ich obserwacje pochodzą z okresu od I kwartału 2000 r. do III kwartału 2009 r. Zmienne są przedstawione na rys. 1-2.



Rys. 1. Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w gospodarce narodowej



Rys. 2. Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w sferze budżetowej

W pierwszym kroku zbadano stacjonarność zmiennych – wyniki przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1

Badanie stacjonarności zmiennych rozszerzonym testem Dickeya-Fullera

	Dla wartości zmiennych		Dla pierwszych różnic	
	Statystyka testu ADF	Wartość p	Statystyka testu ADF	Wartość p
WYN.GOSP.	-0,367665	0,9123	-15,5117	1,149e-036
WYN.BUDŻ.	-1,98545	0,2935	-8,04481	3,693e-013

Wartość  $p$  mniejsza od przyjętego poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  oznacza, że mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej, mówiącej o występowaniu pierwiastka jednostkowego.

Z danych z tab. 1 wynika, że obie zmienne są przyrostostacjonarne, tzn. ich pierwsze różnice są stacjonarne. Do oszacowania modeli ekonometrycznych wykorzystano więc pierwsze różnice zmiennych.

W kolejnym kroku badano rząd opóźnień zmiennych (tab. 2).

Tabela 2

Wybór rzędu opóźnień zmiennych w modelu VAR

Opóźnienia	loglik	p(LR)	BIC	AIC	HQC
1	-391,19815		24,072615	24,344708	24,164166
2	-359,62353	0,00000	22,401426	22,854913	22,554011
3	-337,45527	0,00000	21,300319	21,935201	21,513938
4	-329,53286	<b>0,00323</b>	<b>21,062598</b>	<b>21,878875</b>	<b>21,337250</b>
5	-326,12554	0,14601	21,098518	22,096190	21,434204

Wszystkie kryteria wskazały na IV rząd opóźnień modelu wektorowo-autoregresyjnego, dlatego oszacowano parametry modelu VAR(4). Model VAR(4) nie przeszedł pozytywnie procesu weryfikacji (składnik losowy modelu nie miał rozkładu normalnego), dlatego oszacowano model VAR(2).

Tabela 3

Parametry modelu VAR(2)

Równanie 1: WYN.GOSP.				
	<i>Współczynnik</i>	<i>Błąd stand.</i>	<i>t-Studenta</i>	<i>wartość p</i>
stała	35,6024	7,72832	4,6067	0,00007
WYN.GOSP._1	<b>0,293832</b>	0,0910514	3,2271	0,00295
WYN.GOSP._2	0,259665	0,198154	1,3104	0,19968
WYN.BUDŻ._1	<b>-0,251272</b>	0,0428133	-5,8690	<0,00001
WYN.BUDŻ._2	<b>-0,257332</b>	0,042967	-5,9891	<0,00001
Równanie 2: WYN.BUDŻ.				
	<i>Współczynnik</i>	<i>Błąd stand.</i>	<i>t-Studenta</i>	<i>wartość p</i>
stała	-51,919	32,091	-1,6179	0,11582
WYN.GOSP._1	<b>4,4207</b>	0,378081	11,6925	<0,00001
WYN.GOSP._2	-0,237889	0,822814	-0,2891	0,77442
WYN.BUDŻ._1	<b>-1,08064</b>	0,177777	-6,0786	<0,00001
WYN.BUDŻ._2	-0,24167	0,178416	-1,3545	0,18536

W tab. 3 wyróżniono te zmienne objaśniające, które mają istotny wpływ na zmienne objaśniane. W równaniu 1 tylko przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w gospodarce narodowej opóźnione o 2 kwartały nie ma istotnego wpływu na zmienną objaśnianą, natomiast w równaniu 2, obie zmienne opóźnione o 2 kwartały nie mają istotnego wpływu na zmienną objaśnianą.

Kolejny etap budowy modelu to jego weryfikacja. Zbadano identyfikowalność modelu, autokorelację i normalność rozkładu składnika losowego.

Tabela 4

Statystyka F Fischera-Snedecora dla poszczególnych równań modelu VAR

	F(4,31)	Wartość p dla testu F
Równanie 1	65,69397	1,08e-14
Równanie 2	66,84260	8,52e-15

Tabela 5

Badanie autokorelacji reszt poszczególnych równań modelu VAR – test Ljunga-Boxa

Rząd autokorelacji	I		II		III		IV	
	Q'	Wartość p	Q'	Wartość p	Q'	Wartość p	Q'	Wartość p
Równanie 1	1,118	0,29	1,15	0,563	2,379	0,498	5,533	0,237
Równanie 2	1,099	0,295	1,308	0,52	1,411	0,703	1,989	0,738

Tabela 6

Badanie normalności składnika losowego poszczególnych równań modelu VAR – test Jarque'a-Bery

	JB	Wartość p
Równanie 1	2,643	0,267
Równanie 2	0,614	0,736

Skorygowany współczynnik determinacji  $R^2$  dla poszczególnych równań jest bardzo wysoki i wyniósł odpowiednio:

- dla pierwszego równania: 0,995,
- dla drugiego równania: 0,978.

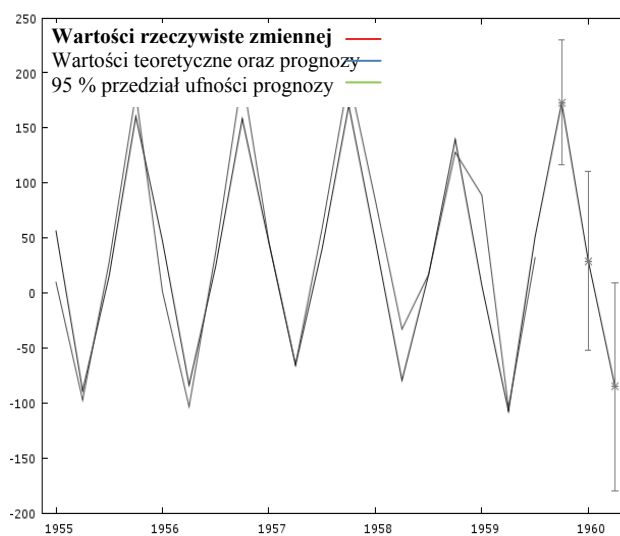
Model przeszedł pomyślnie weryfikację i może posłużyć do prognozowania przeciętnych miesięcznych wynagrodzeń brutto w gospodarce narodowej i w sferze budżetowej.

W tab. 7 podano prognozy punktowe, błędy prognoz ex ante, 95% przedziały ufności dla prognoz oraz rzeczywiste wartości przeciętnego miesięcznego wynagrodzenia brutto w gospodarce narodowej, zaś w tab. 8 dla przeciętnych miesięcznych wynagrodzeń brutto w sferze budżetowej. Wszystkie statystyki dotyczą pierwszych różnic obu zmiennych.

Tabela 7

Prognozy na trzy kolejne okresy zmiennej: przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w gospodarce narodowej

	IV 2009	I 2010	II 2010
Prognoza punktowa	172,97	29,33	-84,52
Błąd ex ante	27,826	39,825	46,335
Prognoza przedziałowa	116,22-229,72	-51,89-110,56	-179,02-9,98
Rzeczywista wartość prognozowanej zmiennej	129,74	72,78	-118,53

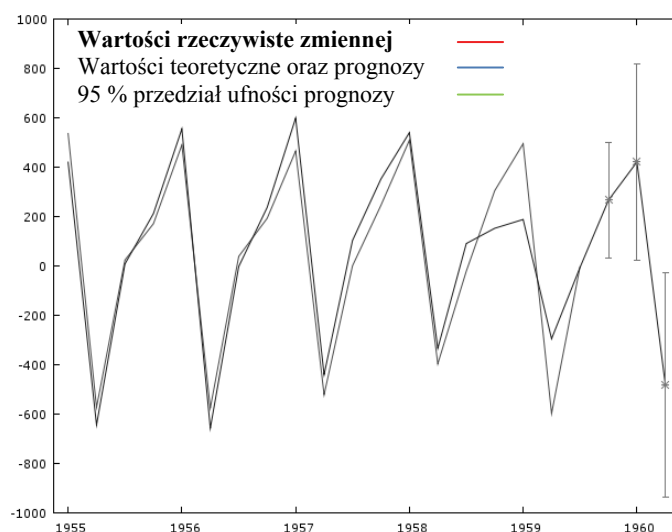


Rys. 3. Prognozy na trzy kolejne okresy zmiennej: przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w gospodarce narodowej

Tabela 8

Prognozy na trzy kolejne okresy zmiennej: przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w sferze budżetowej

	IV 2009	I 2010	II 2010
Prognoza punktowa	265,13	419,57	-480,87
Błąd ex ante	115,543	194,252	223,141
Prognoza przedziałowa	29,48 - 500,79	23,39 - 815,74	-935,97 - -25,77
Rzeczywista wartość prognozowanej zmiennej	193,26	747,86	-868,98



Rys. 4. Prognozy na trzy kolejne okresy zmiennej: przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w sferze budżetowej

Z prezentowanej analizy wynika, że 95-procentowy przedział ufności prognoz pokrył rzeczywistą wartość zmiennej prognozowanej w okresie, na który była liczona prognoza. Należy pamiętać, że przedział prognozy jest uzależniony od średniego błędu prognozy, a więc im większy popełniamy błąd, tym szerszy przedział ufności i odwrotnie, czyli im ten błąd mniejszy, tym przedział ufności jest węższy.

## Podsumowanie

Modele wektorowo-autoregresyjne VAR są stosunkowo prostą konstrukcją, która może posłużyć do prognozowania zmiennych ekonomicznych. W modelowaniu wektorowo-autoregresyjnym w przeciwieństwie do modeli strukturalnych nie zakłada się podziału na zmienne endo- i egzogeniczne oraz nie trzeba martwić się o identyfikowalność poszczególnych równań modelu, ponieważ do estymacji parametrów modeli VAR służy klasyczna metoda najmniejszych kwadratów.

Modelowanie wektorowo-autoregresyjne nie jest jednak pozbawione wad; budując modele VAR należy dysponować dużą liczbą obserwacji zmiennych, aby prawidłowo oszacować ich parametry. Przykładowo szacując parametry modelu VAR dla 5 zmiennych (dane kwartalne), trzeba dysponować co najmniej 36 obserwacjami zmiennych, a więc obserwacjami z 9 lat. Jeżeli zmienne nie są stacjonarne, to niezbędne są kolejne obserwacje, ponieważ należy policzyć pierwsze różnice (dla zmiennych przyrostostacjonarnych).

Reasumując, modele wektorowo-autoregresyjne są dobrą alternatywą dla modeli strukturalnych, jednak zarówno jedne, jak i drugie mają swoje wady i zalety.

## Literatura

- Bagliano F.C., Favero C.A. (1998): Measuring Monetary Policy with VAR Models: An Evaluation. „European Economic Review”, Vol. 42(6).
- Barczak A.S., Biolik J. (2002): Podstawy ekonometrii. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Bikker J.A. (1993): Interdependence between Germany and the Netherlands: Forecasting with VAR models. „De Economist”, 141.
- Bikker J.A. (1999): Macro-economic Forecasting for the Major Four EU Countries: A Two-step Bayesian VAR Approach. „Cahiers Economiques de Bruxelles”, 162.
- Canova F. (1995): The Economics of VAR Models. In: K. Hoover (ed.): Macroeconometrics: Tensions and Prospects. Kluwer Press, NY.
- Canova F., Pina J. (2005): Monetary Policy Misspecification in VAR Models. In: C. Diebolt, C. Krystou (eds.): New Trends In Macroeconomics. Springer Verlag.
- Charemza W.W., Deadman D.F. (1997): Nowa Ekonometria. PWE, Warszawa.
- Doman M., Doman R. (2004): Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań.
- Doornik J.A., Hansen H. (2008): An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality. „Oxford Bulletin of Economics and Statistics”, Vol. 70.
- Dudek A. (2008): Analiza współzależności kursów akcji spółek branży cukrowniczej. W: D. Kopycińska (red.): Konkurencyjność podmiotów rynkowych. Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Engle R.F., Granger C.W.J. (1987): Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. „Econometrica”, Vol. 55.
- Geweke J. (1984): Inference and Causality in Economic Time Series Models. W: Z. Griliches, M.D. Intriligator: Handbook of Econometrics. Vol. 2. North-Holland, Amsterdam.
- Harvey A.C. (1989): Forecasting Structural Time Series and the Kalman Filter. Cambridge University Press, Cambridge.
- Jadamus-Hacura M., Melich-Iwanek K. (2009): Prognozowanie rynku pracy na podstawie modeli VAR. W: A.S. Barczak (red.): Zmiany struktury zjawisk społeczno-gospodarczych na Górnym Śląsku. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Jarque C.M., Bera A.K. (1987): A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. „International Statistical Review”, 55.
- Johansen S. (1988): Statistical Analysis of Cointegration Vectors. „Journal of Economic Dynamics and Control”, 12.
- Kusideł E. (2000): Modele wektorowo-autoregresyjne VAR. Metodologia i zastosowanie. Absolwent, Łódź.



- Kusideł E (2002): Badanie ryzyka rynkowego na podstawie instrumentów polskiego rynku transakcji terminowych futures. [z:] M. Rychter. W: T. Trzaskalik (red.): Modelowanie Preferencji a Ryzyko '02. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. (1992): Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root. „Journal of Econometrics”, Vol. 54.
- Ljung G.M., Box G.E.P. (1978): On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models. „Biometrika”, Vol. 65.
- Lütkepohl H. (1991): Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer Verlag, Berlin.
- Majsterek M. (2008): Wielowymiarowa analiza kointegracyjna w ekonomii. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Miczka M., Szulc W. (2011): Analiza reakcji na bodźce pomiędzy wybranymi rynkami z wykorzystaniem modelu VAR dla szeregów czasowych cen wyrobów stalowych w latach 1998-2011. Instytut Metalurgii Żelaza, Gliwice.
- Osińska M., red. (2007): Ekonometria współczesna. Wydawnictwo Dom Organizatora, Toruń.
- Phillips P.C.B. (1986): Understanding Spurious Regressions in Econometrics. „Journal of Econometrics”, Vol. 33.
- Sims C.A. (1980): Macroeconomics and Reality. „Econometrica”, Vol. 48.
- Sturm J.E., de Haan J. (1995): Is Public Expenditure Really Productive? New Evidence for the US and the Netherlands. „Economic Modelling”, (12).
- Welfe A. (2003): Ekonometria. PWE, Warszawa.
- [www1] <http://ajae.oxfordjournals.org/content/71/2/495.extract> [dostęp: 15.01.2013].

## **VECTOR AUTOREGRESSION MODELS (VAR) – RESPONSE TO CRITICISM STRUCTURAL ECONOMETRIC MODELS**

### **Summary**

In seventies, structural models were subjected to the criticism more and more. In the article the author presented reasons of the criticism of structural models and theoretical bases of vector autoregression models which was introduced in article C. A. Sims in 1980. An example of using VAR models was also expressed for the modelling of macroeconomic variables. In the summary the author described defects and virtues of VAR models in the context of the structural attempt at the econometric modelling.