

Agnieszka Orwat-Acedańska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZASTOSOWANIE MODELU BLACKA-LITTERMANA DO WYBORU PORTFELA INWESTYCYJNEGO

Wprowadzenie

Statystyczne metody i narzędzia nowoczesnej teorii portfela, podlegającej ciągłemu rozwojowi, skupiają się przede wszystkim na zagadnieniach ograniczania skutków ryzyka estymacji (ang. *estimation risk*). Ryzyko to jest związane z możliwością poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów modeli. W przypadku wyboru portfela inwestycyjnego źródłem tego ryzyka jest wrażliwość optymalizowanej funkcji klasycznej alokacji¹ na nieznanne wartości parametrów składowych portfela. W klasycznej teorii Markowitza parametrami tymi są najczęściej oczekiwane stopy zwrotu i macierz kowariancji aktywów będących składowymi portfela. Wśród metod służących ograniczeniu skutków ryzyka estymacji w wyborze portfela optymalnego prężnie rozwijają się m.in. ścieżki oparte na technikach statystycznej symulacji oraz wykorzystujące metodologię bayesowską. Przykładem może być podejście alokacji bayesowskiej oraz odpornej alokacji bayesowskiej². Uwzględnienie oprócz informacji z próby również wiedzy *a priori* dotyczącej wartości parametrów może zmniejszać błędy spowo-

¹ Alokacja aktywów jest rozumiana w niniejszym opracowaniu jako dobór aktywów w różnych proporcjach (poprzez proces optymalizacji) w celu osiągnięcia możliwie najwyższej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka.

² Implementacje oraz weryfikacje tych metod w obszarze portfela inwestycyjnego aktywów polskiego rynku można znaleźć m.in. w pracach: A. Orwat-Acedańska: *Weryfikacja odporno-bayesowskiego modelu alokacji dla różnych typów rozkładów – podejście symulacyjne*. „Studia Ekonomiczne” *Analiza i wspomaganie decyzji*, UE, Katowice 2013, 102-120; A. Orwat-Acedańska: *Ocena ryzyka portfela w alokacji odpornej przy różnych typach rozkładów – podejście symulacyjne*. „Studia Ekonomiczne” *Analiza szeregów czasowych a statystyczny pomiar ryzyka*, nr 91, UE, Katowice 2012, 49-66; A. Orwat-Acedańska: *Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji*. „Studia Ekonomiczne” *Modelowanie preferencji a ryzyko* '11, nr 96, UE, Katowice 2011, 97-114.

dowane szacowaniem oczekiwanej stopy zwrotu portfela, a więc ograniczać ryzyko estymacji związane z szacowaniem tego parametru. Jest to niezmiernie pożądanym skutkiem, biorąc pod uwagę fakt, że w procesach alokacji aktywów i statystycznych metodach wyboru portfela inwestycyjnego powinny być wykorzystywane nie tylko przeszłe obserwacje stóp zwrotu (a więc informacje z próby), ale również fachowa wiedza ekspercka (wnosząca informacje spoza próby).

Podjęciem ujmującym ten fakt i służącym ograniczeniu możliwych skutków ryzyka estymacji związanych z wrażliwością klasycznej funkcji optymalnej alokacji na nieznanne rzeczywiste wartości oczekiwanej stopy zwrotu portfela oraz miar ryzyka portfela jest metodologia zaproponowana przez Blacka i Littermana³. Idea tego podejścia jest zbliżona do metodologii alokacji bayesowskiej. Jednak w przypadku modelu Blacka-Littermana wyboru portfela, wiedza ekspercka *a priori* dotyczy nie tylko wartości parametrów składowych portfela, lecz również samego rozkładu stóp zwrotu oraz innych wariantów związanych z rozkładem i dotyczących postawy inwestora wobec ryzyka estymacji. Metodologia zapoczątkowana przez Blacka i Littermana podlega ciągłemu rozwojowi. Świadczą o tym opublikowane w ostatnich latach zagraniczne prace naukowe zawierające propozycje pewnych modyfikacji oryginalnego modelu Blacka-Littermana lub będące ich rozszerzeniami. Model Blacka-Littermana (BL) wykorzystuje teorię równowagi⁴ w celu określania oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela. Wśród pewnych rozszerzeń modelu BL istnieje również propozycja estymacji oczekiwanych stóp zwrotu bez odniesienia do teorii równowagi.

Celem badania jest implementacja oryginalnego modelu Blacka-Littermana oraz pewnej jego modyfikacji do wyboru portfela inwestycyjnego oraz weryfikacja ich użyteczności na przykładzie danych dotyczących indeksów sektorych GPW. Realizacji celu służy analiza porównawcza charakterystyk portfeli nieklasycznych: BL oraz jego modyfikacji z klasycznym portfelem Markowitza.

Rozdział pierwszy zawiera opis metodologii Blacka-Littermana. W szczególności pierwszy podrozdział jest poświęcony ogólnej idei modelu BL, drugi podrozdział – ogólnym założeniom tego modelu z wyszczególnionymi etapami procedury. Ostatnie dwa podrozdziały zawierają odpowiednio: założenia o opinii eksperckiej wykorzystywanej przez inwestora, czyli o rozkładzie *a priori*, oraz postaci parametrów rozkładu *a posteriori* Blacka-Littermana. W rozdziale drugim opisano, na czym polega zastosowana w badaniu modyfikacja w modelu BL.

³ F. Black, R. Litterman: *Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*. „Goldman Sachs Fixed Income Research” 1990.

⁴ W.F. Sharpe: *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. „Journal of Finance” 1964, Vol. XIX, 3, 425-442.

Przyjęte dodatkowe założenia teoretyczne dla modelu BL oraz zmodyfikowanego modelu BL_St opisano w rozdziale trzecim. Czwarty rozdział poświęcono przyjętym założeniom badawczym i najważniejszym wynikom analizy empirycznej.

1. Metodologia Blacka-Littermana (BL)

1.1. Idea modelu BL

Rozważamy wektor losowy \mathbf{R} stóp zwrotu N klas aktywów będących składowymi portfela⁵, którego rozkład jest charakteryzowany funkcją gęstości $f_{\mathbf{R}}$. Parametry tego rozkładu mogą być szacowane za pomocą tradycyjnych technik estymacji opartych na obserwacjach z przeszłości lub wykorzystujących teorię równowagi. Aby ograniczyć skutki ryzyka estymacji związanego z szacowaniem parametrów rozkładu $f_{\mathbf{R}}$, jest wykorzystywana wiedza ekspercka reprezentowana przez opinię eksperta \mathbf{V} . Możliwe odchylenia ocen eksperta od rzeczywistego stanu rynku wyraża warunkowy rozkład $\mathbf{V}|\mathbf{r}$ reprezentowany przez funkcję gęstości $f_{\mathbf{V}|\mathbf{r}}$ i odzwierciedlający stopień ufności analityka wobec wiedzy eksperckiej. Ponieważ wiedza eksperta może się odnosić do wielu aspektów rynku, a nie tylko do rozkładu wektora \mathbf{R} , rozważamy wielowymiarową funkcję $g(\mathbf{r})$, taką, że $\mathbf{V}|\mathbf{r} \equiv \mathbf{V}|g(\mathbf{r})$. Rozkład *a priori* oraz informacje z próby są przekształcane zgodnie z regułą Bayesa w rozkład *a posteriori*. Warunkowy rozkład rynku ma następującą ogólną postać:

$$f_{\mathbf{V}|\mathbf{r}}(\mathbf{r}|\mathbf{v}) = \frac{f_{\mathbf{V}|g(\mathbf{r})}(\mathbf{v}|\mathbf{r})f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})}{\int f_{\mathbf{V}|g(\mathbf{r})}(\mathbf{v}|\mathbf{r})f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})d\mathbf{r}} \quad (1)$$

1.2. Ogólne założenia modelu BL

Rozważmy wektor stóp zwrotu $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_N)'$ dla N klas aktywów o rozkładzie normalnym $\mathbf{R} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wektor wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ składowych portfela jest traktowany jako wektor losowy, którego dyspersja re-

⁵ W ogólności wektor ten reprezentuje wybrany aspekt rynku, np. ceny, stopy zwrotu wybranych walorów lub instrumentów finansowych.

prezentuje możliwy błąd estymacji. O wektorze tym zakładamy, że ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\pi}$ i macierzą kowariancji $\tau\boldsymbol{\Sigma}$, co zapisujemy:

$$\boldsymbol{\mu} \sim N_N(\boldsymbol{\pi}, \tau\boldsymbol{\Sigma}) \quad (2)$$

gdzie τ reprezentuje błąd estymacji związany z szacowaniem parametru $\boldsymbol{\mu}$.

W pierwszym etapie procedury BL przy określeniu wektora wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\pi}$ metodologia BL odwołuje się do teorii równowagi. W tym aspekcie zakłada się, że inwestorzy, mając określone oczekiwania wobec przyszłych stóp zwrotu, dokonują wyboru portfela inwestycyjnego o wektorze udziałów \mathbf{w} na podstawie rozwiązania dwukryterialnego problemu optymalizacyjnego w postaci⁶:

$$\max_{\mathbf{w}} \{ \mathbf{w}'\boldsymbol{\pi} - \lambda \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \} \quad (3)$$

gdzie λ jest współczynnikiem awersji do ryzyka inwestycyjnego⁷. Rozwiązaniem tego zadania jest relacja w postaci (4):

$$\boldsymbol{\pi} \equiv 2\lambda\boldsymbol{\Sigma}\tilde{\mathbf{w}} \quad (4)$$

gdzie macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ jest szacowana na podstawie przeszłych obserwacji; $\tilde{\mathbf{w}}$ jest wektorem udziałów portfela określanym na podstawie kapitalizacji poszczególnych aktywów składowych w stosunku do łącznej kapitalizacji wszystkich aktywów.

Wartości wektora $\boldsymbol{\pi}$ oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela mogą być również oszacowane na podstawie przeszłych obserwacji. Oprócz standardowych technik metod estymacji, w literaturze istnieje wiele propozycji nowoczesnych technik szacowania tego parametru. Jest on bardzo wrażliwy na występowanie obserwacji odstających, stąd istotną kwestią jest stosowanie nieklasycznych technik estymacji, m.in. opartych na teorii statystyki odpornej (ang. *robust*)⁸ lub teorii estymatorów uciętych typu shrinkage⁹. Te propozycje są ścieżką rozwoju pewnych modyfikacji modelu BL.

Natomiast poziom niepewności τ w zależności (2) dotyczący rzeczywistych wartości parametru $\boldsymbol{\mu}$ i będący źródłem błędu estymacji można kalibrować

⁶ A. Meucci: *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*. The Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley, 2010.

⁷ W swojej pracy Black i Litterman przyjęli $\tilde{\lambda} = 1,2$.

⁸ Y. Zuo: *Robust Location and Scatter Estimators in Multivariate Analysis*. „The Frontiers in Statistics” 2005, 467-490; P.J. Rousseeuw, A. Leroy: *Robust Regression and Outlier Detection*. Wiley Interscience, 2003.

⁹ C. Stein: *Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution*. Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Probability and Statistics, 1995.

uwzględniając przykładowo rozkład estymatora tego parametru oraz przyjmując za estymator średnią z próby. Wówczas:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad (5)$$

gdzie T jest długością szeregu czasowych stóp zwrotu rozważanych aktywów portfela¹⁰.

Drugi etap procedury BL dotyczy określenia parametrów rozkładu *a priori* oceny eksperckiej (opis tej części zawarto w podrozdziale 1.3).

W kolejnym kroku są wyznaczane (zgodnie z zasadą Bayesa) parametry rozkładu *a posteriori* stóp zwrotu (opis tej części zawarto w podrozdziale 1.4).

W ostatnim etapie jest dokonywana optymalizacja portfela.

W niniejszym badaniu analizowano portfele BL maksymalnej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka, czyli będące wynikiem rozwiązania następującego zadania optymalizacyjnego:

$$\max_{\mathbf{x}_{BL} \in \mathcal{C}} \{ \mathbf{x}_{BL}' \boldsymbol{\mu}_{BL} \} \quad \text{p.w.} \quad \sqrt{\mathbf{x}_{BL}' \boldsymbol{\Sigma}_{BL} \mathbf{x}_{BL}} \leq s \quad (6)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\mu}_{BL}$ – wektor oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela BL rozkładu *a posteriori* BL,

$\boldsymbol{\Sigma}_{BL}$ – macierz kowariancji stóp zwrotu składowych portfela rozkładu *a posteriori* BL,

$\mathbf{x}_{BL} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)'$ – udziały portfela BL będące elementem zbioru dopuszczalnego $\mathcal{C} = \{ \mathbf{x}_{BL} : \mathbf{x}_{BL} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_{BL} \mathbf{1} = 1 \}$,

s – maksymalne dopuszczalne ryzyko portfela BL.

1.3. Założenia opinii eksperckiej wykorzystywanej przez inwestora

Zakładamy, że opinia ekspercka (ocena) jest formułowana w odniesieniu do wartości oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela $\boldsymbol{\mu}$. Jest ona reprezentowana przez $(k \times N)$ -wymiarową macierz \mathbf{P} , nazywaną w metodologii BL macierzą wskaźnikową. Każda k -ta kolumna tej macierzy określa zero-jedynkowe wagi odpowiadające opiniom dotyczącym poszczególnych składowych wektora

¹⁰ Satchell and Scowcroft proponują kalibrację τ opartą na założeniu o jego stochastycznej naturze. S. Satchell, A. Scowcroft: *A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction*. „Journal of Asset Management” 2000, 1, 138-150.

oczekiwanych stóp zwrotu. Oczywiście ocena ekspercka dotycząca oczekiwanych stóp zwrotu jest obciążona ryzykiem estymacji. Podejście BL zakłada, że ma ona następujący rozkład¹¹:

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \sim N_N(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (7)$$

gdzie metaparametry \mathbf{v} oraz $\boldsymbol{\Omega}$ kwantyfikują odpowiednio oczekiwaną ocenę ekspercką oraz niepewność związaną z opiniami ekspertów.

1.4. Rozkład *a posteriori*

Przy oznaczeniach i założeniach opisanych w poprzednich podrozdziałach rozkład *a posteriori* wartości oczekiwanej $\boldsymbol{\mu}$ ma postać¹²:

$$\boldsymbol{\mu} | \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_{BL}, \boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu}) \quad (8)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\mu}_{BL} \equiv \left((\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \left((\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + \mathbf{P}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{v} \right) \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} \equiv \left((\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \mathbf{P}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \quad (10)$$

W celu odniesienia tego rozkładu bezpośrednio do wektora \mathbf{R} stóp zwrotu składowych portfela konieczne jest przedstawienie tego wektora w postaci:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z} \quad (11)$$

gdzie $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wówczas $\mathbf{R} | \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\mu} | \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{Z}$ oraz:

$$\mathbf{R} | \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega} \sim N_N(\boldsymbol{\mu}_{BL}, \boldsymbol{\Sigma}_{BL}) \quad (12)$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_{BL}$ jest wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* modelu BL i ma postać (9), natomiast postać parametru $\boldsymbol{\Sigma}_{BL}$ wynika z (10), przy założeniu, że wektory losowe $\boldsymbol{\mu}$ i \mathbf{Z} są niezależne i wówczas:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{BL} \equiv \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}_{BL}^{\mu} \quad (13)$$

¹¹ A. Meucci: *The Black-Litterman Approach...*, op. cit.

¹² Ibid.

2. Modyfikacja modelu BL

Oprócz oryginalnego modelu BL opisanego w pierwszym rozdziale, zastosowano w badaniu pewną jego modyfikację, polegającą na odstępianiu od wykorzystania teorii równowagi do określenia wektora wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\pi}$ w zależności (4). Zamiast niej wykorzystano estymator zwężający (ang. *shrinkage*) – ważony estymator Steina¹³ wektora wartości oczekiwanej. Wartość tego estymatora ma postać:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(S)} \equiv (1 - \alpha)\hat{\boldsymbol{\mu}} + \alpha\boldsymbol{\pi}_0 \quad (14)$$

gdzie wektor $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ jest klasyczną średnią z próby, $\boldsymbol{\pi}_0$ jest wektorem – stałą, która może być określona następująco:

$$\boldsymbol{\pi}_0 \equiv \frac{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\mu}}}{N}\mathbf{1} \quad (15)$$

Natomiast optymalną wartość wagi α określono zgodnie z propozycją Meucciego¹⁴:

$$\alpha \equiv \frac{1}{T} \frac{N\bar{\lambda} - 2\lambda_1}{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{b})'(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{b})} \quad (16)$$

gdzie λ_1 jest największą wśród N wartości własnych macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$, natomiast $\bar{\lambda}$ oznacza średnią z wszystkich wartości własnych tej macierzy.

Portfele wykorzystujące estymator Steina oznaczono w pracy symbolem BL_St.

3. Przyjęte dodatkowe założenia teoretyczne dla modelu BL oraz zmodyfikowanego modelu BL_ST

Określenie parametrów rozkładu wiedzy eksperckiej *a priori*

W badaniu implementacja modelu BL oraz jego modyfikacji wymagała określenia przykładowej opinii eksperckiej na temat wartości oczekiwanych stóp zwrotu składowych portfela $\boldsymbol{\mu}$. W niniejszym przypadku ma ona charakter „symboliczny”. W rzeczywistości praktyki finansowej wiedza ta ma oczywiście bardziej złożony charakter.

¹³ C. Stein: Op. cit.

¹⁴ A. Meucci: *Risk and Asset Allocation*. Springer, Berlin 2005, s. 202.

Do zdefiniowania oceny eksperckiej *a priori* na temat oczekiwanych stóp składowych portfela BL wykorzystano zależność liniową stóp zwrotu każdego z rozważanych indeksów sektorowych od wskaźnika koniunktury w danym sektorze. W tym celu w kwantyfikacji parametrów \mathbf{v} oraz $\mathbf{\Omega}$ rozkładu wiedzy eksperckiej *a priori* (zależność 7) zastosowano estymację wartości prognoz $\hat{\mathbf{y}}_{Tp}^i$ modelu regresji dla każdego i -tego indeksu sektorowego WIG:

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{X}^i \boldsymbol{\beta}^i + \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (17)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\varepsilon}^i = (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_T^i)'$ – wektor składników losowych modelu,

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$ – wektor obserwacji stóp zwrotu i -tego indeksu sektorowego,

\mathbf{X}^i – $(T \times 2)$ -wymiarowa macierz obserwacji wskaźnika koniunktury w i -tym sektorze,

$\boldsymbol{\beta}^i$ – wektor parametrów modelu.

Za pomocą modelu regresji liniowej zaprognozowano wartości stóp zwrotu indeksów sektorowych. Utożsamiają one ocenę ekspercką zdefiniowaną symbolem \mathbf{v} . Mianowicie estymacja wartości oczekiwanej prognozy $\hat{\mathbf{y}}_{Tp}^i$ stanowiła podstawę do określenia elementów wektora \mathbf{v} , natomiast wartość estymatora wariancji tej prognozy dla każdego i -tego modelu była elementem diagonalnym macierzy kowariancji $\mathbf{\Omega}$ rozkładu wiedzy eksperckiej *a priori*.

Estymacja macierzy kowariancji Σ

Do oszacowania wariancji Σ z próby składników portfela wykorzystano odporny na heteroskedastyczność i autokorelację estymator Neweya-Westa¹⁵. Postać tego estymatora można znaleźć także w pracy Andrewsa¹⁶.

4. Analiza empiryczna

4.1. Założenia analizy empirycznej

W opracowaniu rozważono i zastosowano trzy typy portfeli inwestycyjnych: klasyczny portfel Markowitza oraz portfele nieklasyczne, oparte na oryginalnym

¹⁵ W. Newey, K. West: *A Simple, Positive-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*. „Econometrica” 1987, 55, 703-708.

¹⁶ D.W. Andrews: *Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation*. „Econometrica” 1991, 59, 817-858.

modelu BL oraz jego modyfikacji BL_St, wykorzystującej estymację wartości oczekiwanej składowych portfeli na podstawie obserwacji z próby. Dodatkowo analizowano portfele będące uśrednieniem udziałów portfela BL oraz Markowitza.

Zadania optymalizacyjne służące do wyznaczenia ostatecznych charakterystyk wszystkich rozważanych rodzajów portfeli i ich udziałów polegają na maksymalizacji stopy zwrotu portfela przy ograniczeniu na ryzyko portfela.

Podstawowym przedmiotem analizy empirycznej były stopy zwrotu z indeksów sektorowych WIG: WIG-banki, WIG-budownictwo, WIG-chemia, WIG-deweloperzy, WIG-informatyka, WIG-media, WIG-paliwa, WIG-spożywczy oraz WIG-telekomunikacja. Dane te pochodziły ze strony internetowej Giełdy Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie. Zbiór danych liczył 1590 obserwacji dziennych stóp zwrotu obejmujących okres badawczy 02.07.2007-30.10.2013.

Estymacji portfeli złożonych z powyższych indeksów sektorowych dokonywano na podstawie półtorarocznych oraz dwuletnich podokresów powyższego okresu. W celu oceny działania prezentowanych metod weryfikowano uzyskane wyniki portfeli. Przyjęto następujące długości okresu weryfikacji: 1 miesiąc, 3 miesiące oraz 6 miesięcy. Proces weryfikacji portfeli polegał na wyznaczeniu udziałów portfeli na podstawie danych z „okresu estymacji”, a następnie na wyznaczaniu w „okresie weryfikacji” charakterystyk portfeli uzyskanych w poprzednim etapie. W ten sposób uzyskano 52 portfele dla wariantu półtorarocznego „okresu estymacji” oraz 46 portfeli dla dwuletniego wariantu „okresu estymacji”. Następnie w każdym wariancie uśredniono otrzymane charakterystyki oraz przyjęte wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela każdego z czterech typów portfeli.

Wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli wyznaczano w następujący sposób: W pierwszym etapie wyznaczono portfel minimalnego ryzyka, które stanowiło dolną granicę wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli. Natomiast górną granicą wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli była wartość ryzyka aktywa o największej stopie zwrotu. Następnie rozstęp między górną i dolną wartością maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli podzielono na 10 równych części, uzyskując kolejne wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfeli (prezentowane na wykresach w następnym podrozdziale).

W przypadku portfeli BL oraz BL_St, wyznaczając wartość zależności (4), przyjęto $\tilde{\lambda} = 0,05$, natomiast macierz kowariancji Σ szacowano za pomocą estymatora odpornego na heteroskedastyczność i autokorelację Neweya-Westa. Do wyznaczenia w modelu BL wartości wag $\tilde{\mathbf{w}}$ w zależności (4) wykorzystano in-

formacje o wielkości kapitalizacji poszczególnych indeksów sektorowych w stosunku do łącznej kapitalizacji wszystkich rozważanych indeksów sektorowych, które pochodziły ze strony internetowej GPW.

Do wyznaczenia ocen parametrów rozkładu *a priori* w nieklasycznych portfelach wykorzystano zależność liniową miesięcznych stóp zwrotu każdego z rozważanych indeksów sektorowych od wskaźnika koniunktury danego sektora w ujęciu miesięcznym. Dane służące do oszacowania parametrów tych modelu pochodziły ze strony internetowej Głównego Urzędu Statystycznego (GUS).

Uzyskane wyniki analizy empirycznej są rezultatem zastosowania procedur programu MATLAB stworzonych na potrzeby niniejszego badania.

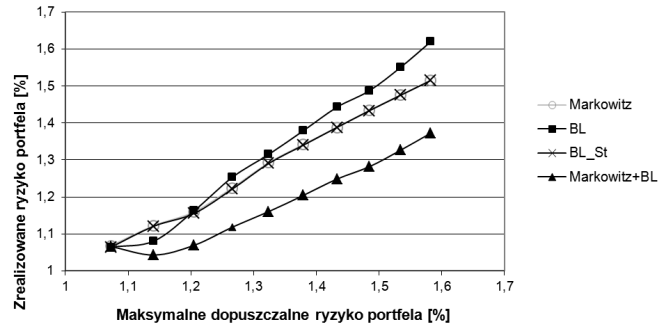
4.2. Wyniki analizy empirycznej

Wyniki analizy empirycznej zamieszczono na rysunkach 1-12. Przedstawiają one kształtowanie się głównych charakterystyk portfeli: BL, BL_St, Markowitza oraz portfele będące uśrednieniem udziałów portfeli BL oraz Markowitza (przyjęto oznaczenie: Markowitz + BL) w przyjętych „okresach weryfikacji”.

Rysunki 1-3 przedstawiają kształtowanie się średniego zrealizowanego¹⁷ ryzyka portfela w zależności od przyjętych wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela dla półtorarocznego „okresu estymacji” i kolejnych „okresów weryfikacji” (1 miesiąc, 3 miesiące, 6 miesięcy). Identyczne dla wszystkich portfeli wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela pozwalają na porównywanie portfeli ze względu na pozostałe charakterystyki.

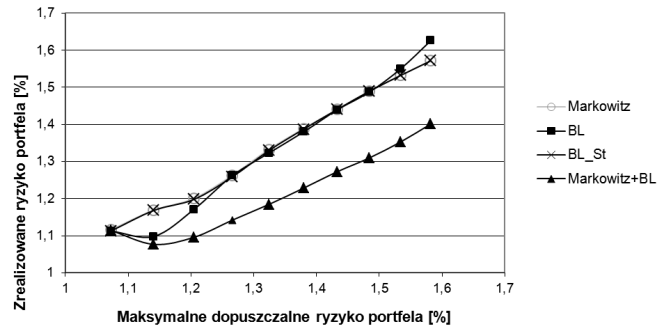
Dla wszystkich „okresów weryfikacji” w przypadku półtorarocznego „okresu estymacji” średnie zrealizowane ryzyko portfeli Markowitza oraz BL_St ma prawie identyczne wartości (krzywe tych portfeli na wykresach pokrywają się). „Okres weryfikacji” portfeli wpływa na kształtowanie się poziomu zrealizowanego ryzyka portfela BL w odniesieniu do portfela Markowitza. Mianowicie dla miesięcznego okresu weryfikacji średnie zrealizowane ryzyko portfela BL jest wyższe niż w przypadku portfeli Markowitza (rysunek 1), dla 3-miesięcznego „okresu weryfikacji” wartości te są zbliżone (rysunek 2), natomiast już w przypadku półrocznego „okresu weryfikacji” średnie zrealizowane ryzyko portfela BL jest wyraźnie niższe niż dla portfela Markowitza (rysunek 3). Portfele będące uśrednieniem udziałów portfeli BL oraz Markowitza (Markowitz + BL) charakteryzują się najmniejszym ryzykiem spośród rozważanych portfeli, niezależnie od przyjętego „okresu weryfikacji”.

¹⁷ Określenia „zrealizowane” użyto celem zaakcentowania przeprowadzonej respecyfikacji portfeli w ramach przeprowadzonego procesu ich weryfikacji.



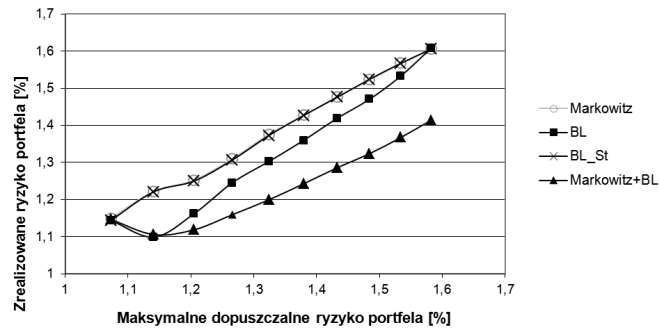
Rys. 1. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 2. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.

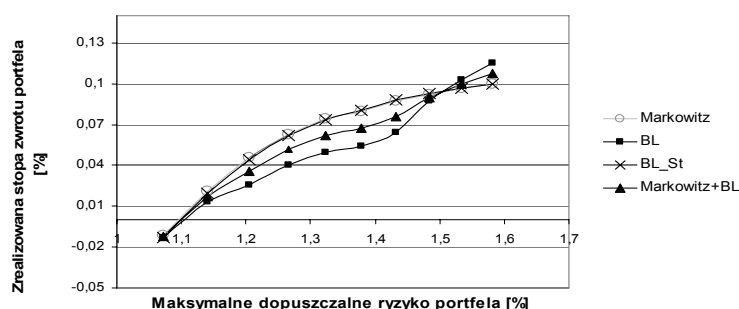


Rys. 3. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i 6-miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.

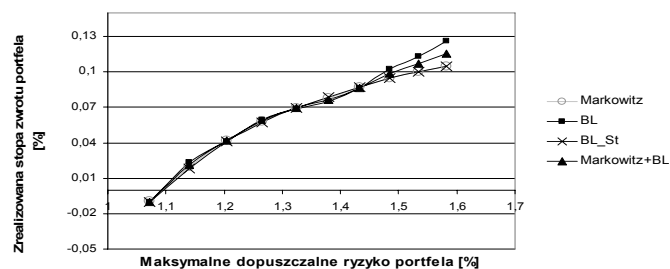
Porównując portfele pod względem średniej zrealizowanej stopy zwrotu (względem maksymalnego dopuszczalnego ryzyka) dla „okresu estymacji” oraz „okresów weryfikacji” jak powyżej, należy stwierdzić, że portfele Markowitza oraz BL_St mają prawie identyczne wartości średnich zrealizowanych stóp zwrotu (rysunki 4-6). Generalnie wszystkie rozpatrywane portfele nie różnią się znacząco ze względu na średnie zrealizowane stopy zwrotu. Niemniej jednak w przypadku miesięcznego „okresu weryfikacji” większość portfeli Markowitza (oraz BL_St) ma nieco wyższe średnie zrealizowane stopy zwrotu od portfeli Markowitz + BL, a te od portfeli BL (rysunek 4). Dla trzymiesięcznego „okresu weryfikacji” różnice między poszczególnymi portfelami ze względu na tę charakterystykę są najbardziej znikome (rysunek 5). Natomiast w przypadku półrocznego „okresu weryfikacji” sytuacja jest odwrotna niż w przypadku miesięcznego „okresu weryfikacji” (rysunek 6). Najwyższymi średnimi zrealizowanymi stopami zwrotu cechują się portfele BL, nieco niższymi – portfele Markowitz + BL, a najniższymi – portfele Markowitza.

Analizę porównawczą portfeli ze względu na rozważane charakterystyki przeprowadzono również dla dwuletnich „okresów estymacji”. Tak jak w poprzedniej części analizy, rozpatrzono trzy „okresy weryfikacji” portfeli: 1 miesiąc, 3 miesiące, 6 miesięcy.



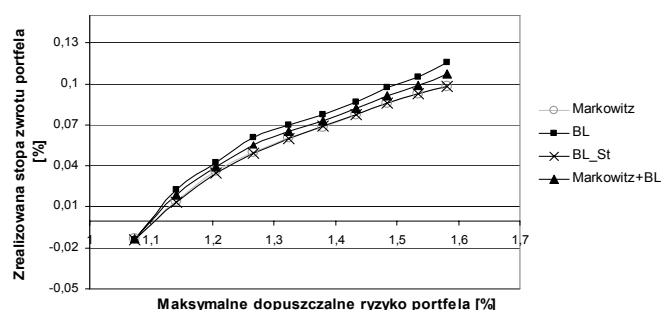
Rys. 4. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 5. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

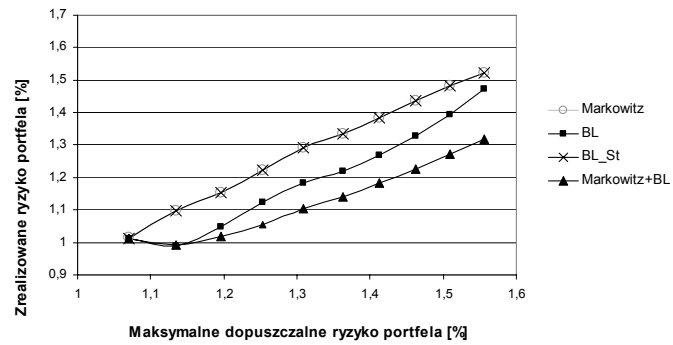
Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 6. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla półtorarocznych okresów estymacji i 6-miesięcznych okresów weryfikacji

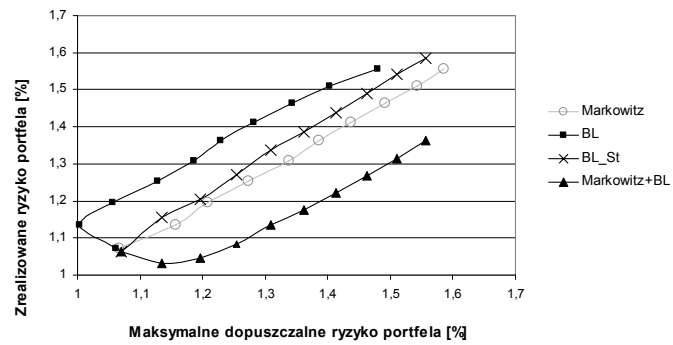
Źródło: Obliczenia własne.

Przy tych założeniach rysunki 7-9 przedstawiają kształtowanie się średniego zrealizowanego ryzyka portfela w zależności od przyjętych wartości maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela. Zastosowany dłuższy „okres estymacji” skutkuje w przypadku wszystkich „okresów weryfikacji” większymi różnicami między wartościami średnich zrealizowanych ryzyk portfeli. Z wyjątkiem 3-miesięcznego „okresu weryfikacji” średnie zrealizowane ryzyko portfeli Markowitza oraz BL_ST ma prawie identyczne wartości (krzywe tych portfeli na wykresach pokrywają się). Ponadto, z wyjątkiem 3-miesięcznego „okresu weryfikacji”, średnie zrealizowane ryzyka portfeli BL są niższe niż portfeli Markowitza (rysunki 7 i 9). W każdym z trzech przypadków ta charakterystyka portfela jest najniższa dla portfeli będących uśrednieniem udziałów portfeli BL oraz Markowitza (Markowitz + BL).



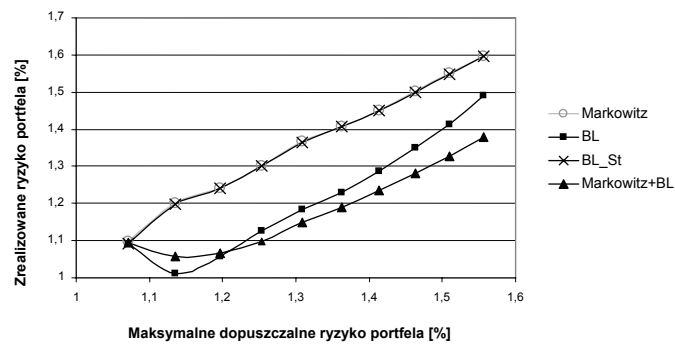
Rys. 7. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 8. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

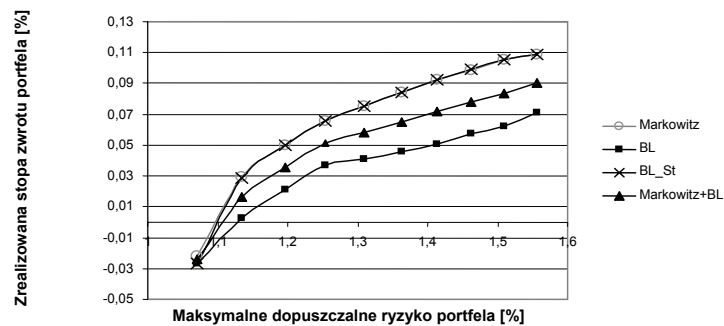
Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 9. Średnie zrealizowane ryzyko portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i 6-miesięcznych okresów weryfikacji

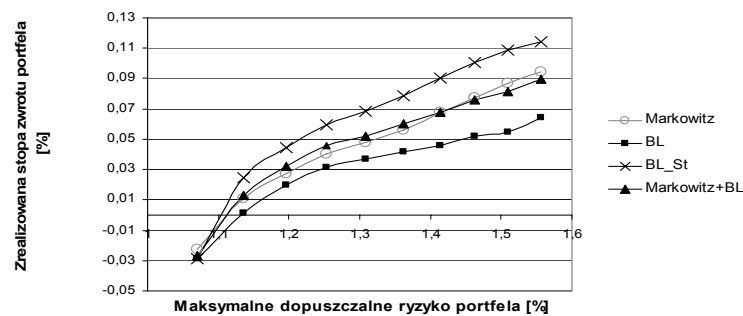
Źródło: Obliczenia własne.

Ostatnią część analizy empirycznej stanowiło porównanie portfeli (przy wyższych założeniach) ze względu na średnie zrealizowane stopy zwrotu (względem maksymalnego dopuszczalnego ryzyka). Podobnie jak dla ryzyka portfeli, dwuletni „okres estymacji” skutkuje większymi różnicami między wartościami średnich zrealizowanych stóp zwrotu różnych typów portfeli (rysunki 10-12) w odniesieniu do analizy tej charakterystyki dla półtorarocznego „okresu estymacji”. Portfele Markowitza oraz BL_ST mają prawie identyczne wartości średnich zrealizowanych stóp zwrotu. W przypadku wszystkich wariantów długości „okresów weryfikacji” średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli o uśrednionych udziałach portfeli BL oraz Markowitza (Markowitz + BL) kształtują się na poziomie pomiędzy portfelami BL i Markowitza.



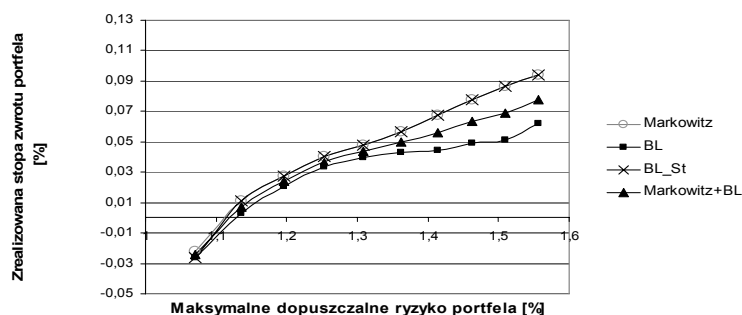
Rys. 10. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 11. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i 3-miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 12. Średnie zrealizowane stopy zwrotu portfeli dla dwuletnich okresów estymacji i 6-miesięcznych okresów weryfikacji

Źródło: Obliczenia własne.

Podsumowanie

W opracowaniu dokonano implementacji oryginalnego modelu Blacka-Littermana oraz jego modyfikacji (polegającej na wykorzystaniu estymatora Steina) do wyboru portfela inwestycyjnego. Cel realizowano poprzez analizę porównawczą charakterystyk portfeli: Blacka-Littermana (BL), jego modyfikacji (BL_ST), Markowitza oraz portfeli o uśrednionych udziałach portfeli BL oraz Markowitza (Markowitz + BL). Do oceny portfeli konstruowanych różnymi metodami zastosowano weryfikację tych portfeli w ujęciu dynamicznym. Polegała ona na ich respecyfikacji przy różnych wariantach podokresów badawczych – 1 miesiąc, 3 miesiące oraz 6 miesięcy. Zastosowano również dwa warianty okresu estymacji: półtoraroczny i dwuletni. Analizowane portfele składały się z wybranych indeksów sektorych WIG.

Uzyskane wnioski o kształtowaniu się charakterystyk rozważanych portfeli nie są dokładnie takie same w przypadku obydwóch „okresów estymacji” oraz rozpatrywanych „okresów weryfikacji”. Na kształtowanie się charakterystyk portfeli, a tym samym na różnice między ich wartościami dla różnych typów portfeli ma wpływ długość szeregów czasowych stóp zwrotu wykorzystywanych do procesu estymacji oraz długość „okresu weryfikacji”.

W zdecydowanej większości rozważanych przypadków portfele Markowitza oraz zmodyfikowane portfele Blacka-Littermana nie różniły się pod względem rozważanych charakterystyk. Wynika to głównie z dwóch faktów. Po pierwsze, estymator zwięzający Steina (postaci 19) wartości oczekiwanej jest definiowany za pomocą średniej z „pierwotnego” estymatora wartości oczekiwanej oraz wektora-stałej. Stąd wartości oczekiwane są więc jedynie przeskalowane.

Po drugie, prognozy modeli liniowych zastosowanych do określenia parametrów rozkładu *a priori* cechują się dużymi błędami. Sprawiają one, że dla przyjętych parametrów tego rozkładu jego wpływ na oceny portfela jest niewielki. Otwartym zagadnieniem może być w tej kwestii zastosowanie innego rodzaju wielowymiarowego estymatora wartości oczekiwanej, np. estymatorów odpornych (ang. *robust*).

Przeprowadzona analiza portfeli BL nie daje jednoznacznych przesłanek do stwierdzenia, że zawsze portfele te dają lepsze wyniki (w sensie charakterystyk) od portfeli Markowitza – przykładowo charakteryzują się zawsze wyższą stopą zwrotu lub mniejszym ryzykiem. Niemniej jednak należy podkreślić, że podejście to pozwala otrzymać portfele znacznie różniące się od klasycznych ze względu na analizowane charakterystyki i jest to niewątpliwie jego zaletą. Istotną kwestią przy stosowaniu tej metody, warunkującą w dużej mierze użyteczność stosowania portfeli BL, jest określenie wartości parametrów rozkładu *a priori*. Fachowa wiedza ekspercka powinna sprawiać, że oczekiwane charakterystyki portfeli będą bliskie zrealizowanym. Swoistą wadą podejścia Blacka-Littermana jest założenie, że rozkład stóp zwrotu jest zgodny z rozkładem normalnym. Jednak mając na względzie fakt, że charakter współczesnych rynków finansowych w coraz większym stopniu wymaga korzystania w procesach wyboru portfela nie tylko z przeszłych informacji z próby, podejścia oparte na teorii Blacka-Littermana powinny być godne uwagi analityków i praktyków. Z tego punktu widzenia wydaje się uzasadnione zastosowanie modyfikacji tego podejścia opartej na funkcji copula celem uodpornienia metody na założenie o rozkładzie normalnym. Jest to przedmiotem dalszych badań Autorki.

Istotnym wnioskiem płynącym z przeprowadzonej analizy jest również fakt, że zastosowanie portfeli o uśrednionych udziałach portfeli BL oraz Markowitza (Markowitz + BL) pozwala osiągnąć dobry efekt. Mianowicie w zdecydowanej większości rozpatrywanych przypadków portfele te charakteryzowały się niższym średnim zrealizowanym ryzykiem. Natomiast ich średnie zrealizowane stopy zwrotu kształtowały się na poziomie pomiędzy tymi wartościami dla portfeli Markowitza i BL. Fakt ten pozwala traktować podejście Blacka-Littermana jako użyteczne narzędzie wyboru portfela na polskim rynku kapitałowym.

Literatura

Andrews D.W.: *Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation*. „Econometrica” 1991, 59, 817-858.

Black F., Litterman R.: *Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium*. „Goldman Sachs Fixed Income Research” 1990.

- Meucci A.: *Risk and Asset Allocation*. Springer, Berlin 2005.
- Meucci A.: *The Black-Litterman Approach: Original Model and Extensions*. The Encyclopedia of Quantitative Finance, Wiley, 2010.
- Newey W., West K.: *A Simple, Positive-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*. „Econometrica” 1987, 55, 703-708.
- Orwat-Acedańska A.: *Weryfikacja odporno-bayesowskiego modelu alokacji dla różnych typów rozkładów – podejście symulacyjne*. „Studia Ekonomiczne” *Analiza i wspomaganie decyzji*, UE, Katowice 2013, 102-120.
- Orwat-Acedańska A.: *Ocena ryzyka portfela w alokacji odpornej przy różnych typach rozkładów – podejście symulacyjne*. „Studia Ekonomiczne” *Analiza szeregów czasowych a statystyczny pomiar ryzyka*, nr 91, UE, Katowice 2012, 49-66.
- Orwat-Acedańska A.: *Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji*. „Studia Ekonomiczne” *Modelowanie preferencji a ryzyko '11*, nr 96, UE, Katowice 2011, 97-114.
- Rousseeuw P.J., Leroy A.: *Robust Regression and Outlier Detection*. Wiley Interscience, 2003.
- Satchell S., Scowcroft A.: *A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction*. „Journal of Asset Management” 2000, 1, 138-150.
- Sharpe W.F.: *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. „Journal of Finance” 1964, Vol. XIX, 3, 425-442.
- Stein C.: *Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution*. Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Probability and Statistics, 1995.
- www.gpwinfostrefa.pl
- www.stat.gov.pl
- Zuo Y.: *Robust Location and Scatter Estimators in Multivariate Analysis*. „The Frontiers in Statistics” 2005, 467-490.

USING THE BLACK-LITTERMAN MODEL IN PORTFOLIO SELECTION

Summary

The paper aims at implementing the original Black-Litterman model and its slight modification to portfolio selection problem using data on sector indices from Polish stock market. The resulted portfolios' characteristics are dynamically compared with characteristics of classical Markowitz portfolio obtained from different estimation and verification sample lengths. The results clearly suggest that the portfolios that averaged shares from Black-Litterman and Markowitz procedure offered reasonable trade-off between returns and risk. Namely in most cases they exhibited the lowest realized risk whereas their returns were between the returns for BL and Markowitz portfolios.