**Katarzyna Jakowska-Suwalska**
Politechnika Śląska
Wydział Organizacji i Zarządzania
Instytut Ekonomii i Informatyki
katarzyna.suwalska@polsl.pl

# WIELOKRYTERIALNY MODEL OPTYMALIZACJI WIELKOŚCI ZAKUPÓW W KOPALNI WĘGLA KAMIENNEGO*

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono wielokryterialny model wielkości zamówień materiałów używanych w produkcji. Pokazano na przykładzie zastosowanie modelu dla wyznaczenia wielkości zamówień na klej poliuretanowy, drewno kopalniane oraz stojaki stalowe cierne w jednej z kopalń węgla kamiennego.

**Słowa kluczowe:** zaopatrzenie materiałowe, zagadnienia wielokryterialne.

## Wprowadzenie

W kopalniach węgla kamiennego wchodzących w skład Kompanii Węglowej S.A. wielkość zamówienia podlegającego ustawie o zamówieniach publicznych planuje się około roku wcześniej. Jest to związane z czasem ustalenia planów zakupów dla wszystkich kopalń oraz z czasem postępowania przetargowego. Wielkość zamówienia materiału dla kopalni należy zatem wyznaczyć jednorazowo na podstawie planów finansowych oraz planów wydobycia na następny rok. W przypadku gdy wielkości zużycia (popyt) wykazują trend lub można zbudować model zależności popytu od innych znanych czynników, do ustalenia wielkości jednorazowego zamówienia używa się zazwyczaj modeli trendów lub modeli ekonometrycznych [Axsäter, 2006].

* Praca powstała w ramach realizacji projektu badawczego nr N N524 552038 „Wielokryterialne wspomaganie planowania i kontrolowania potrzeb materiałowych w przedsiębiorstwie górniczym" finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

W pracy zaproponowano wielokryterialny model z dwoma kryteriami dla każdego zamawianego materiału i ograniczeniem całkowitych kosztów zamówienia. W celu ustalenia wielkości zamówienia w modelu wprowadzono zmienne celowe [Konarzewska-Gubała, 1980; Miettinen, 1998] i podejście leksykograficzne [Ogryczak, 1997; Branke, Deb, Miettinen, Słowiński, 2008].

## 1. Konstrukcja modelu wielkości zamówienia

W celu konstrukcji modelu materiały $M_1, M_2, \ldots, M_s$ podzielono na dwie grupy.

Grupa pierwsza to materiały $M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), których zużycie $X_i$ na tonę wydobycia jest zmienną losową o znanej dystrybuancie $F_i$. Należy zamówić taką ilość $z_i$ materiału $M_i$, aby z jak największym prawdopodobieństwem pokryła ona przyszły popyt na ten materiał. Należy zamawiać taką ilość materiału, aby wielkość zamówienia nie odchylała się zbytnio od przeszłych wielkości zapotrzebowania na ten materiał, natomiast koszty zakupu wszystkich materiałów nie przekraczały pewnej zadanej kwoty $K$. W pracy założono, że wielkości $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ zużycia materiału $M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) na tonę wydobycia w $n$ poprzednich okresach nie wykazują trendu ani wahań okresowych. Przyjęto także, że wszystkie wiadomości o warunkach panujących w kopalni, mających wpływ na wielkości zużycia materiałów znajdują się w danych $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ z przeszłych okresów.

Grupa druga to materiały $M_i$ ($i = r + 1, r + 2, \ldots, s$), których zużycie w przeszłych okresach wykazało trend lub wahania okresowe i można wyznaczyć prognozę zużycia na następny rok. Należy zamówić taką ilość $z_i$ materiału $M_i$, aby w możliwe niewielkim stopniu odchylała się od wyznaczonej prognozy $z_i^*$.

Jako funkcje kryteria przyjęto dla każdego materiału:

($a$) prawdopodobieństwo braku materiału $M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$),

($b$) odchylenia wielkości zamówienia $z_i$ od rzeczywistych wielkości zużycia $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ materiału $M_i$ w ostatnich $n$ okresach ($i = 1, 2, \ldots, r$),

($c$) odchylenia wielkości zamówienia $z_i$ materiału $M_i$ (i = $r + 1, r + 2, \ldots, s$) od wyznaczonej prognozy $z_i^*$.

Model można zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
& F_i(z_i) \to \max, i = 1,2,..., r, && (a) \\
& |x_{it} - z_i| \to \min, i = 1,2,...,r, && (b) \\
& t = 1,2,...,n \\
& |z_i^* - z_i| \to \min, i = r+1, r+2,...,s \quad ,(c) \\
& \sum_{i=1}^{s} c_i z_i W \le K, && (1) \\
& z_i^{lower} \le z_i \le z_i^{upper}, \\
& i = 1,2,...,s, \\
& t = 1,2,...,n
\end{aligned}
$$

gdzie:
$c_i$ – cena jednostki materiału $M_i$,
$K$ – kwota przeznaczona na zakup materiałów $M_1, M_2, \ldots, M_s$,
$W$ – planowana wielkość wydobycia,
$z_i$ – wielkość zamówienia materiału $M_i$ na tonę wydobycia,
$z_i^*$ – wielkość prognozy zużycia materiału $M_i$ na tonę wydobycia,

$$
z_i^{lower} \le \begin{cases} \min(z_i^*, \min(x_{it}; t = 1,2,...,n)) & i = r+1, r+2,...,s, \\ \min(x_{it}; t = 1,2,...,n) & i = 1,2,...,r, \end{cases},
$$

$$
z_i^{upper} \ge \begin{cases} \max(z_i^*, \max(x_{it}; t = 1,2,...,n)) & i = r+1, r+1,...,s, \\ \max(x_{it}; t = 1,2,...,n) & i = 1,2,...,r, \end{cases}
$$

Wartości $z_i^{lower}$, $z_i^{upper}$ mogą być wyznaczone przez decydenta na podstawie jego dodatkowych wiadomości o problemie.

W celu możliwości porównania wyników wartości kryteriów w grupie ($b$) należy przeprowadzić normalizację [Miettinen 1998; Kukuła, 2000; Branke, Deb, Miettinen, Słowiński, 2008]:

$$
z_i^u = \frac{z_i - z_i^{lower}}{A_i}, \; x_{it}^u = \frac{x_{it} - z_i^{lower}}{A_i}, \; z_i^{*u} = \frac{z_i^* - z_i^{lower}}{A_i}
$$

gdzie $A_i = z_i^{upper} - z_i^{lower}$.

Niech zmienne $v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z^*-}, v_i^{z^*+} \geq 0$ będą takimi zmiennymi celowymi, że:

$$
\begin{aligned}
& F_i(z_i) + v_i^{F+} = F_i^*, \\
& x_{it}^u - z_i^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = 0, \\
& v_{it}^{Q-} v_{it}^{Q+} = 0, \\
& z_i^{*u} - z_i^u - v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+} = 0, \\
& v_i^{z^*-} v_i^{z^*+} = 0, i = 1, 2, ..., s, \\
& t = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
$$

gdzie $1 - F_i^*$ to zakładana przez decydenta najmniejsza dopuszczalna wartość prawdopodobieństwa braku materiału.

Zagadnienie (1) można wtedy zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
& v_i^{F+} \to \min, \ i = 1, 2, ..., r, \\
& v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} \to \min, \ i = 1, 2, ..., r, \\
& v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+} \to \min, \ i = r+1, r+2, ..., s, \\
& F_i(z_i) + v_i^{F+} = F_i^*, i = 1, 2, ..., r, \\
& x_{it}^u - z_{i_i}^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = 0, \ i = 1, 2, ..., r, \\
& z_i^{*u} - z_i^u - v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+} = 0 \ i = r+1, r+2, ..., s, \\
& \sum_{i=1}^{s} c_i z_i W \leq K, \\
& z_i^{lower} \leq z_i \leq z_i^{upper}, \ i = 1, 2, ...s, \\
& v^{K+}, v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z^*-}, v_i^{z^*+} \geq 0, \\
& v_{it}^{Q-} v_{it}^{Q+} = 0, \ i = 1, 2, ..., r, \\
& v_i^{z^*-} v_i^{z^*+} = 0, \ i = r+1, r+2, ..., s, \\
& t = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

W celu wyznaczenia rozwiązań efektywnych wielokryterialnego problemu najczęściej wprowadza się skalaryzację zagadnienia [Ameljańczyk, 1984; Konarzewska-Gubała,1980; Nowak, 2008; Branke, Deb, Miettinen, Słowiński, 2008; Figueira, Greco, Ehrgott (red.), 2005; Roy, 1990; Roy, Bouyssou, 1993].

Niech $u_i$ będzie wagą nadaną przez decydenta materiałowi $M_i$ na podstawie ważności tego materiału w procesie produkcyjnym, tak aby $u_1, u_2, ..., u_s > 0$ oraz $u_1 + u_2 + ... + u_s = 1$. Można utworzyć wtedy model w postaci:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r} u_i v_i^{F+} \to \min,\\
&\sum_{i=1}^{s} u_i (v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+}) \to \min,\\
&\sum_{i=r+1}^{s} u_i (v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+}) \to \min,\\
&F_i(z_i) + v_i^{F+} = F_i^*,\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&x_{it}^u - z_{i_i}^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = \mathrm{i},\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&z_i^{*u} - z_i^u - v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+} = 0,\ i = r+1, r+2,\ldots,s,\\
&z_i^{lower} \le z_i \le z_i^{upper},\ i = 1,2,\ldots,s,\\
&v^{K+}, v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z^*-}, v_i^{z^*+} \ge 0,\\
&v_{it}^{Q-} v_{it}^{Q+} = 0,\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&v_i^{z^*-} v_i^{z^*+} = 0,\ i = r+1, r+2,\ldots,s,\\
&t = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

W grupie $n$ funkcji celu $\sum_{i=1}^{s} u_i (v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+})$ można przeprowadzić proces postarzania obserwacji poprzez wprowadzenie dla poszczególnych okresów $t$ odpowiednich wag $w_t$.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r} u_i v_i^{F+} + \sum_{i=r+1}^{s} u_i (v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+}) \to \min,\\
&\sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} u_i w_t (v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+}) + \sum_{i=r+1}^{s} u_i (v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+}) \to \min,\\
&F_i(z_i) + v_i^{F+} = F_i^*,\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&x_{it}^u - z_{i_i}^u - v_{it}^{Q-} + v_{it}^{Q+} = 0,\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&z_i^{*u} - z_i^u - v_i^{z^*-} + v_i^{z^*+} = 0,\ i = r+1, r+2,\ldots,s,\\
&z_i^{lower} \le z_i \le z_i^{upper},\ i = 1,2,\ldots,s,\\
&v^{K+}, v_i^{F+}, v_{it}^{Q-}, v_{it}^{Q+}, v_i^{z^*-}, v_i^{z^*+} \ge 0,\\
&v_{it}^{Q-} v_{it}^{Q+} = 0,\ i = 1,2,\ldots,r,\\
&v_i^{z^*-} v_i^{z^*+} = 0\ \ i = r+1, r+1,\ldots,s,\\
&t = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

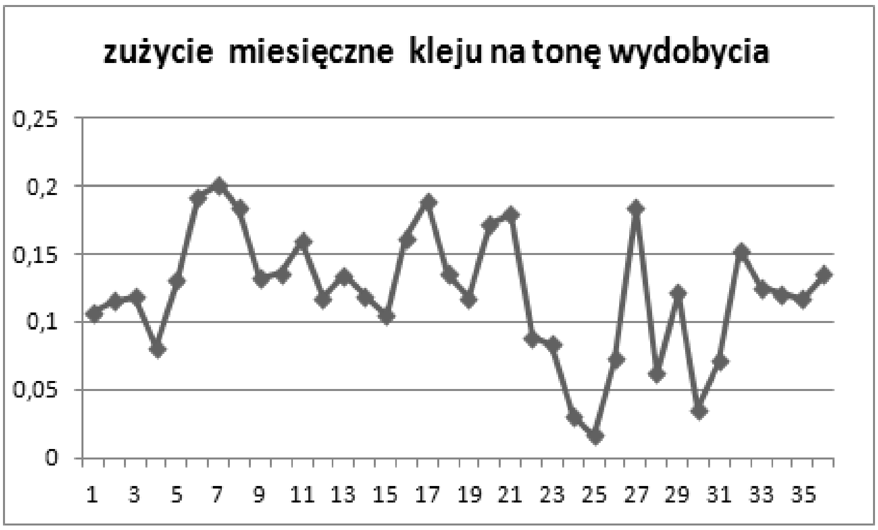
gdzie $w_t = \dfrac{\mathbf{2}t}{n(n+\mathbf{1})}$.

Jest to model z dwoma liniowymi funkcjami celu i grupą nieliniowych ograniczeń. Jeżeli dla poszczególnych kryteriów zostały ustalone przez decydenta priorytety P1, P2, to do znalezienia rozwiązania zagadnienia (4) zaproponowano podejście leksykograficzne [Branke, Deb, Miettinen, Słowiński, 2008; Figueira, Greco, Ehrgott (red.), 2005; Ogryczak 1997]. Zagadnienie można rozwiązać wtedy w dwóch krokach.

## 2. Przykład zastosowania wielokryterialnego modelu dla ustalenia wielkości zamówień na drewno kopalniane, klej poliuretanowy i stojaki stalowe cierne

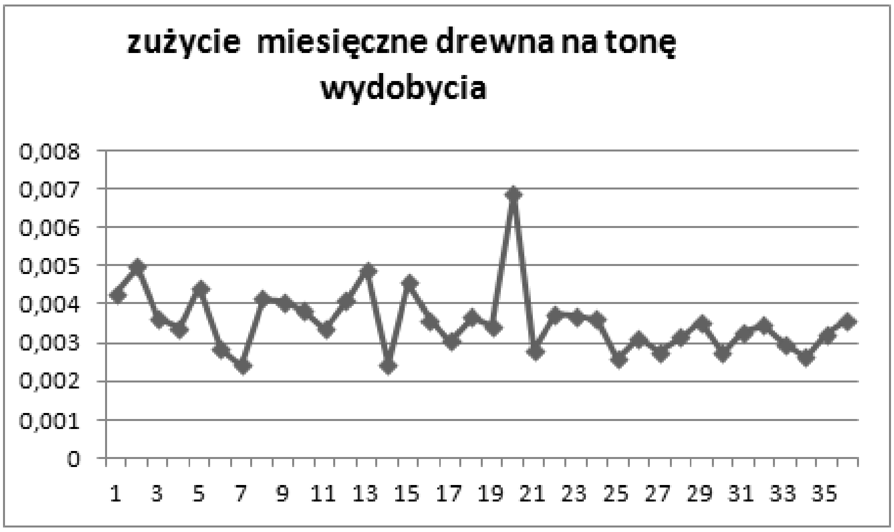
Drewno kopalniane jest zużywane w trakcie robót eksploatacyjnych do tworzenia obudów wyrobisk kopalnianych, klej poliuretanowy natomiast do uszczelniania wyrobisk [Prusek, Stałęga, Stochel, 2005]. Stojaki stalowe cierne podporowe są indywidualnymi elementami obudowy górniczej przeznaczonymi do podtrzymywania stropu w wyrobiskach górniczych i do wzmocnienia obudowy wyrobisk chodnikowych.

Na rys. 1, 2, 3 pokazano miesięczne wielkości zużycia kleju poliuretanowego, drewna kopalnianego i stojaków stalowych ciernych na tonę wydobycia w latach 2008-2010.



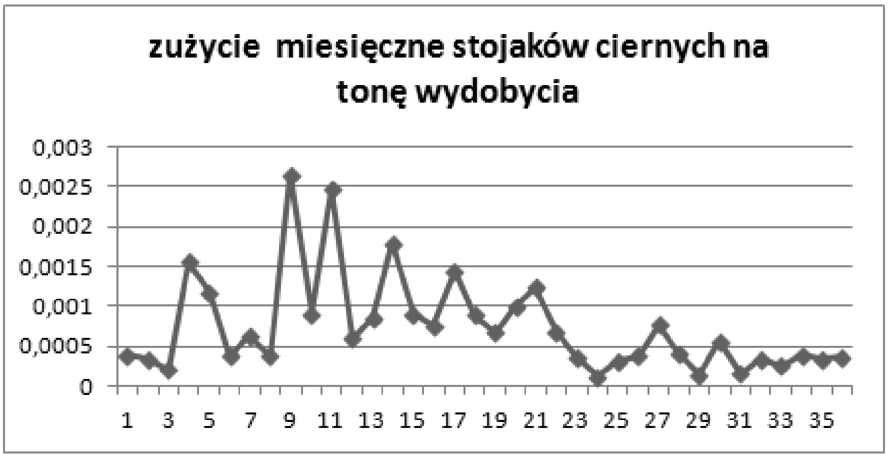

Rys. 1. Miesięczne zużycie kleju (kg/t) w latach 2008-2010

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni.




Rys. 2. Miesięczne zużycie drewna ($m^3$/t) w latach 2008-2010

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni.




Rys. 3. Miesięczne zużycie stojaków (szt./t) w latach 2008-2010

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych.

Na podstawie medianowego testu serii na poziomie istotności 0,05 stwierdzono, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o braku trendu miesięcznych wielkości zużycia drewna kopalnianego w $m^3$ na tonę wydobycia oraz kleju poliuretanowego w kg na tonę wydobycia. Wykazano także, że wielkości zużycia tych materiałów nie wykazują wahań okresowych. W tab. 1 przedstawiono podstawowe parametry opisowe zużycia drewna, kleju poliuretanowego i stojaków stalowych wyznaczone na podstawie miesięcznych danych z lat 2008-2010.

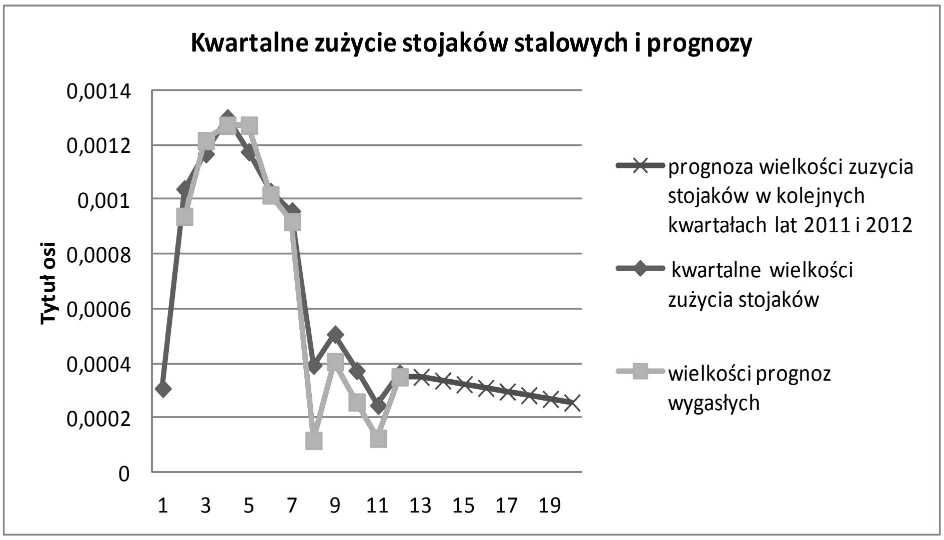
Tabela 1. Podstawowe parametry rozkładu miesięcznego zużycia drewna, kleju i stojaków stalowych

| | Stojaki | Klej | Drewno |
|---|---|---|---|
| Max. | 0,0026 | 0,2011 | 0,0069 |
| Min. | 0,0001 | 0,0168 | 0,0024 |
| Średnia | 0,0007 | 0,1224 | 0,0036 |
| Odchylenie standardowe | 0,0006 | 0,0455 | 0,0009 |
| Współczynnik zmienności | 0,8026 | 0,3716 | 0,2382 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni.

Na podstawie wielkości zużycia drewna (w $m^3/t$) i kleju poliuretanowego w ostatnich trzech latach stwierdzono (testem Kołmogorowa–Smirnowa na poziomie istotności 0,05), że są one zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych odpowiednio *N*(0,0036; 0,0009), *N*(0,1224; 0,0455)

Za pomocą testu medianowego (na poziomie istotności 0,05) wykazano, że wielkości zużycia stojaków stalowych ciernych (w szt./t) wykazują trend. Na rys. 4 pokazano wielkości kwartalnego zużycia stojaków stalowych oraz prognozy zużycia w przyszłych kwartałach.




Rys. 4. Wielkości kwartalnego zużycia stojaków stalowych w latach 2008-2010 oraz prognozy na lata 2011 i 2012

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni będącej oddziałem Kompanii Węglowej S.A.

Za pomocą liniowej metody Holta z parametrami wygładzania alfa = 0,5, beta = 0,45 wyznaczono prognozy kwartalnego zużycia stojaków w latach 2011 i 2012. Na koniec wyznaczono (jako średnią arytmetyczną wielkości kwartalnych prognoz) prognozę $z^* = 0{,}0003$ wielkości zużycia stojaków w 2012 r. (w szt./t).

Dodatkowo stwierdzono na poziomie istotności 0,05, że nie występuje korelacja liniowa pomiędzy wielkościami zużycia drewna, kleju poliuretanowego i stojaków stalowych.

W tab. 2 przedstawiono średnie ceny jednostkowe drewna, kleju, stojaków stalowych, planowane roczne wydobycie oraz przykładową planowaną roczną kwotę wydatków na zakup drewna, kleju poliuretanowego i stojaków stalowych.

Tabela 2. Ceny jednostkowe drewna i kleju, planowane roczne wydobycie oraz planowana roczna kwota wydatków na drewno i klej poliuretanowy

| | |
|---|---|
| Średnia cena kg kleju | 13,75 |
| Średnia cena za $m^3$ drewna | 296 |
| Średnia cena stojaka | 490 |
| Planowane wydobycie | 4 000 000 |
| Maksymalny koszt zakupu materiałów | 13 541 054 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni będącej oddziałem Kompanii Węglowej S.A.

W modelu (4) przyjęto, że wszystkie materiały są jednakowo ważne w procesie wydobycia, a więc przyjęto wagi $u_1 = u_2 = u_3 = 1/3$ oraz $z_i^{lower} = \min(x_{it}; t = 1,2,...,36)$; $z_i^{upper} = \max(x_{it}; t = 1,2,...,36)$ dla $i = 1, 2, 3$; $F_1^* = F_2^* = 0{,}9$.

Dodatkowo założono, że decydent nie ustalił priorytetów poszczególnych kryteriów. W tab. 3 zamieszczono wartości rozwiązań zagadnienia przy różnych ustawieniach priorytetów kryteriów zagadnienia (4).

Tabela 3. Wartości rozwiązań przy różnych priorytetach nadanych funkcjom celu zagadnienia (4)

| | Wielkość zamówienia | | | Prawdopodobieństwo | | Odchylenie od prognozy | Koszty całkowite zakupu | Wartość pierwszej funkcji celu | Wartość drugiej funkcji celu |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | stojaki | klej | drewno | F1 klej | F2 drewno | | | | |
| Rozwiązanie, gdy pierwsza funkcja celu ma priorytet I | 1 489 | 478 995 | 21 031 | 0,363 | 0,900 | 0 | 13 541 054,0 | 0,536952 | 0,509 |
| Rozwiązanie, gdy druga funkcja celu ma priorytet I | 1 489 | 541 910,4 | 18 108,6 | 0,483 | 0,699 | 0 | 13 541 054,0 | 0,6185787 | 0,477 |

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych kopalni będącej oddziałem Kompanii Węglowej S.A.

## Podsumowanie

W pracy zaproponowano wielokryterialny model, który może być pomocny przy wyznaczaniu wielkości zamówień materiałów potrzebnych w kopalni węgla kamiennego. Zastosowanie modelu pokazano na przykładzie ustalenia wielkości zamówienia kleju poliuretanowego, drewna kopalnianego i stojaków stalowych ciernych przy ograniczeniach kosztów zakupu tych materiałów. Zaproponowano podejście leksykograficzne i wobec braku określenia preferencji decydenta znaleziono skończony zbiór rozwiązań sprawnych. Wykorzystana metoda powinna być stosowana w postaci interaktywnej, w której decydent będzie miał możliwość określania priorytetów oraz wielkości parametrów sterujących, porównując koszty zamówień, wartości prawdopodobieństw oraz wielkość odchyleń od wyznaczonych prognoz.

## Literatura

Ameljańczyk A. (1984), *Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania*, Ossolineum, Wrocław.

Axsäter S. (2006), *Inventory Control*, Springer Science+Business Media, LLC, New York.

Branke J., Deb K., Miettinen K., Słowiński R. (2008), *Multiobjective Optimalization – Interactive and Evolutionary Approaches.* Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Figueira J., Greco S., Ehrgott M. (red.), 2005, *Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art Surveys*, Springer Science, New York.

Konarzewska-Gubała E. (1980), *Programowanie przy wielorakości celów*, PWN, Warszawa.

Kukuła K. (2000), *Metoda unitaryzacji zerowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Miettinen K. (1999), *Nonlinear Multiobjective Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Nowak M. (2008), *Interaktywne wielokryterialne wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka. Metody i zastosowania*, Wydawnictwo AE, Katowice.

Ogryczak W. (1997), *Wielokryterialna optymalizacja liniowa i dyskretna*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.

Prusek S., Stałęga S., Stochel D. (2005), *Metody i środki przeznaczone do uszczelniania i wzmacniania górotworu oraz obudowy wyrobisk*, Prace Naukowe Głównego Instytutu Górnictwa nr 863.

Roy B. (1990), *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, WNT, Warszawa.

Roy, B., Bouyssou, D. (1993), *Aide Multicritere a la Decision: Methodes et Cas*. Economica, Paris.

## MULTI-CRITERIA MODEL OF ORDER SIZE IN THE HARD-COAL MINES

**Summary:** This paper presents a multi-criteria model of order size of materials used in production. It is shown on an example how to use the model to determine the order sizes for polyurethane adhesive, wood and steel upright in a hard-coal mine.

**Keywords:** multicriteria decision support;; material requirements planning.