

Damian Mitrenga

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

METODYCZNE PODSTAWY SYMULACJI STOCHASTYCZNEJ MONTE CARLO

Wprowadzenie

Wiele zjawisk będących przedmiotem analiz, w tym również te odnoszące się do dziedziny finansów, cechuje się stochastyczną naturą. Charakterystyka ta oznacza, że jednoznaczne wskazanie ostatecznego wyniku rozpatrywanego zagadnienia jest niemożliwe. Znany jest tylko rozkład prawdopodobieństwa możliwych stanów końcowych, co w konsekwencji powoduje, że każdemu wynikowi towarzyszy odpowiednia szansa jego realizacji. W tym kontekście, by odpowiedzieć na pytanie o możliwy rezultat zjawiska, konieczne staje się poszukiwanie najbardziej prawdopodobnego rezultatu.

Jedną z metod pozwalających na częściowe skwantyfikowanie inkorporowanej w istotę zjawisk ekonomicznych stochastyczności jest symulacja Monte Carlo, która stanowi przedmiot rozważań w niniejszym artykule. W literaturze przedmiotu występuje wiele definicji tej metody, a wybrane ujęcia zostały przedstawione w poniższej tabeli.

Tabela 1

Definicje symulacji stochastycznej Monte Carlo występujące w wybranych pozycjach literatury

Autor	Definicja symulacji Monte Carlo
J. Halton	Metoda, która przedstawia rozwiązanie problemu jako parametr hipotetycznej populacji. Stosując sekwencję liczb losowych, tworzy próbkę populacji, na podstawie której można uzyskać szacunkowe wartości szukanym parametrów
P. Jäckel	Metoda polegająca na wielokrotnym powtarzaniu pewnych procedur oraz sumowaniu indywidualnych wyników, w celu uzyskania przybliżonego rozwiązania problemu
N. Metropolis, S. Ulam	Metoda ta jest w istocie statystycznym podejściem do badania równań różniczkowych [...], występujących w różnych gałęziach nauk przyrodniczych
I. Sobol	Numeryczna metoda rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą losowego pobierania próbek

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: J. Halton, A Retrospective and Prospective Survey of the Monte Carlo Method, „SIAM Review” 1970, Vol. 12, No. 1, s. 2; P. Jäckel, Monte Carlo Methods in Finance, John Wiley & Sons, West Sussex 2002; N. Metropolis, S. Ulam, The Monte Carlo Method, „Journal of the American Statistical Association” 1949, Vol. 44, No. 247, s. 335; I. Sobol, The Monte Carlo Method, Mir Publisher, Moskwa 1975, s. 8.

W przytoczonych definicjach symulacja stochastyczna Monte Carlo posiada dwie istotne cechy. Po pierwsze, pozwala na kwantyfikowanie wpływu na analizowane zagadnienie wybranej grupy czynników, cechujących się określonym rozkładem prawdopodobieństwa. Cecha ta została w sposób szczególny zaakcentowana w artykule Metropolisa i Ulama, uznawanym za pierwszą pracę konstytuującą omawianą symulację, w którym podkreśla się jej zastosowanie do obliczania równań różniczkowych (funkcji zależnych od wielu zmiennych parametrów). Po drugie, oszacowanie wpływu poszczególnych zmiennych na rozpatrywane zjawisko, a w konsekwencji uzyskanie jego wartości oczekiwanej, możliwe jest dzięki wielokrotnemu próbkowaniu liczb losowych¹. Innymi słowy, dokonuje się ciągnięć wartości zmiennych z przyporządkowanych im rozkładów, by tym sposobem uzyskać szereg wyników końcowych, które po agregacji uznaje się za przybliżony zbiór rozwiązań analizowanego problemu.

W konsekwencji często stwierdza się, że zastosowanie symulacji stochastycznej Monte Carlo prowadzi do odejścia od postrzegania zmiennych w kategoriach deterministycznych, na rzecz indeterminizmu. Okazuje się jednak, że ujęcie to nie jest do końca właściwe, bowiem pojęcia te nie są całkowicie rozbieżne. W celu wyjaśnienia tej kwestii należy bliżej zapoznać się z typologią powyższych terminów.

1. Relacja koncepcji determinizmu i indeterminizmu

U podstaw koncepcji determinizmu leży założenie, że „fakt, moment i miejsce zajścia każdego zdarzenia oraz jego przebieg określone są jednoznacznie przez zdarzenia, które je poprzedziły w czasie i które z nimi współwystępują”². Jak łatwo zauważyć, pogląd ten uzależnia przyszły przebieg zdarzeń od ich stanu początkowego. W konsekwencji uwidacznia się w nim powiązanie przyczynowo-skutkowe, prowadzące finalnie do możliwości jednoznacznego i precyzyjnego przewidywania stanu końcowego analizowanego procesu. W swojej najbardziej rygorystycznej postaci, koncepcja determinizmu jest zbiorem trzech postulatów:

¹ Komputerowe generowanie liczb zawsze musi zostać opisane pewnym algorytmem, nie można mówić więc o liczbach całkowicie losowych, bowiem da się w nich wyróżnić pewne regularności. W przypadku dobrych generatorów regularności te są jednak tak małe, że wylosowane liczby dostatecznie imitują zachowanie prawdziwych liczb losowych i z powodzeniem można je wykorzystać na potrzeby symulacji. Formalnie jednak wielkości uzyskane za pomocą tych generatorów nazywa się pseudolosowymi.

² Powszechna Encyklopedia Filozofii, t. 2, red. A. Maryniarczyk, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2001, s. 511. Uznaje się, że za przyjęciem naukowego determinizmu po raz pierwszy opowiedział się Pierre Simon de Laplace, który stwierdził, że w danym stanie Wszechświata kompletny zbiór praw określa jego przeszłość i przyszłość. Więcej w: S. Hawking, L. Mlodinow, Wielki projekt, Wyd. Albatros, Warszawa 2011, s. 37-38.

1. Prawidłowości.
2. Przyczynowości.
3. Jednoznaczności.

Pierwsza z wymienionych zasad zakłada istnienie obiektywnych praw, rządzących zachodzącymi procesami. Druga postuluje występowanie pierwotnej przyczyny, leżącej u podstaw każdego zjawiska. Ostatni punkt implikuje jasną i precyzyjną ścieżkę ewolucji, od stanu początkowego do końcowego.

Okazuje się jednak, że tak rozumiany determinizm to tylko jeden z kilku typów tego pojęcia (determinizm jednoznaczny). Stanowisko to można uznać za bardzo rygorystyczne i stojące w opozycji do stochastyczności zjawisk. Jeśli jednak odrzuci się zasadę jednoznaczności, wówczas uzyska się typ determinizmu, nazywany statystycznym³. W tym ujęciu zakłada się probabilistyczny charakter rozpatrywanych praw, co w konsekwencji powoduje, że w determinizmie statystycznym nie można precyzyjnie przewidzieć stanów końcowych rozpatrywanych układów, a jedynie ich prawdopodobieństwa. W konsekwencji powyższe rozumienie omawianego pojęcia nie stoi już w tak silnej opozycji do stochastyczności zjawisk, jak determinizm jednoznaczny.

Indeterminizm z kolei neguje jednoznaczność przewidywalność zjawisk, bowiem jak zauważył Hans Reichenbach, pełna przyczynowość jest tylko idealistycznym postulatem, a kompletne określenie wszystkich czynników determinujących dane zjawisko jest niemożliwe⁴. W tym miejscu uwidacznia się ostra granica pomiędzy indeterminizmem a determinizmem jednoznacznym, jednak wzajemna sprzeczność ze statystyczną wersją drugiej koncepcji nie jest już tak oczywista. W celu dokładniejszego poznania relacji tych pojęć należy przytoczyć dwa rozumienia indeterminizmu: absolutystyczne oraz umiarkowane⁵.

W konwencji absolutystycznej indeterminizm odrzuca przyczynowość zjawisk – żadne zdarzenie nie jest koniecznościowo uwarunkowane, a czynnikiem zmian jest przypadek, rozumiany jako zdarzenie bez przyczyny⁶. W konsekwencji nie istnieją żadne umocowania, by móc stawiać jakiegokolwiek prognozy odnośnie przyszłości. Umiarkowana wersja indeterminizmu dopuszcza z kolei w ograniczonym stopniu zdeterminowanie określonych zjawisk – u podstaw otrzymanego efektu mogą leżeć obiektywne prawa.

³ Powszechna Encyklopedia Filozofii, t. 2, op. cit., s. 515-516.

⁴ H. Reichenbach, *The Direction of Time*, University of California Press, Berkeley 1999, s. 157 i n.

⁵ Powszechna Encyklopedia Filozofii, t. 4, op. cit., s. 792.

⁶ Warto zauważyć, jak bardzo zmieniło się w przeciągu wieków naukowe podejście do kategorii przypadku. Obecnie pojęcie to leży u podstaw filozoficznej koncepcji indeterminizmu, a początkowo w starożytności sądzono, że nie może stanowić punktu wyjścia dla jakichkolwiek badań. Zdaniem Arystotelesa „wszelka wiedza naukowa dotyczy tego, co istnieje zawsze albo najczęściej, a przypadek nie jest ani jednym, ani drugim”. Więcej w: Arystoteles, *Metafizyka*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2009, s. 201.

Rozpatrując wzajemną relację przytoczonych pojęć, nie można bezkrytycznie zaakceptować stanowiska, głoszącego wzajemne wykluczanie się determinizmu i indeterminizmu. Taka zależność zachodzi tylko i wyłącznie w przypadku skrajnych wersji tych koncepcji, czyli determinizmu jednoznacznego oraz indeterminizmu absolutystycznego. Statystyczny typ determinizmu i umiarkowany indeterminizm wykazują określone cechy wspólne – oba ujęcia dopuszczają probabilistyczny charakter rozpatrywanych praw. Różnica między tymi koncepcjami tkwi w możliwości określenia obiektywnych prawidłowości, rządzących rozpatrywanymi procesami. W pierwszym przypadku zakłada się każdorazową możliwość poznania tych zależności, a w drugim zdobycie tej wiedzy zostaje tylko częściowo dopuszczone, bowiem niektóre skutki mogą zachodzić bez wyraźnej przyczyny.

Konkludując, należy stwierdzić, że stochastyczność zjawisk nie musi od razu oznaczać konieczności odrzucenia koncepcji determinizmu. Zakładając posiadanie pełnej wiedzy o przebiegu rozpatrywanych procesów, stochastyczność można uznać za przejaw determinizmu statystycznego. Z drugiej strony, jeśli zaneguje się znajomość wszystkich praw rządzących danym zjawiskiem, co w konsekwencji związane jest z dopuszczeniem pewnej nieokreśloności ewolucji zdarzeń, można uznać ją za przykład umiarkowanego indeterminizmu. Nie należy więc przyjmować za jednoznacznie poprawne stwierdzenie, jakoby zastosowanie symulacji Monte Carlo pozwalało na odejście od deterministycznego postrzegania zmiennych, ponieważ oznaczałoby to automatyczne zaakceptowanie założenia o braku wiedzy na temat prawidłowości rządzących analizowanym zagadnieniem i jego całkowitą przypadkowość. Precyzyjne umiejscowienie tej techniki w ramach omawianych koncepcji nie jest możliwe, ponieważ w zależności od subiektywnej oceny zakresu posiadanej wiedzy oraz przejawianego podejścia do losowości zdarzeń, można ją przyporządkować do determinizmu statystycznego lub umiarkowanego indeterminizmu.

2. Geneza symulacji Monte Carlo

Omówiwszy kwestię wzajemnego powiązania symulacji Monte Carlo i opisanych powyżej koncepcji filozoficznych, warto w tym miejscu określić genezę tej techniki. Jak wspomniano wcześniej, za pierwszą pracę dotyczącą symulacji stochastycznej Monte Carlo uznaje się artykuł Metropolis i Ulama z 1949 r. Koncepcyjne podstawy tej metody sięgają jednak znacznie wcześniej, bowiem aż do XVIII w.

Za ich twórcę uznaje się Louisa Leclerca, hrabię z Buffon, który w wydanej w 1777 r. pracy⁷ rozważał kwestię wnioskowania w warunkach ograniczonej wiedzy o zachodzących zjawiskach. Zdaniem tego autora, jeśli istnieje fizyczna pewność odnośnie do analizowanych procesów, tzn. ich przyczyny są jasne i zrozumiałe, wówczas w celu stawiania wniosków można posłużyć się analogią lub powtarzalnością zjawisk.

W kontekście symulacji Monte Carlo szczególnie istotny jest drugi z wymienionych aspektów, bowiem niewiedza może w nim zostać zredukowana poprzez wielokrotną powtarzalność wyniku w drodze eksperymentu – dokonuje się założenia, że jeśli coś zdarza się regularnie, to z dużym prawdopodobieństwem będzie zachodzić zawsze. Warto w tym miejscu również wspomnieć, że Leclerca uznaje się za autora pierwszego eksperymentu, podobnego do współcześnie rozumianej symulacji Monte Carlo.

Wspomniane doświadczenie nosi nazwę „igły Buffona” i ma na celu oszacowanie liczby π . Dokonuje się w nim wielokrotnych rzutów igły na poziomą powierzchnię, z zaznaczoną siatką równoległych linii o równych odstępach. Jeśli długość igły jest mniejsza niż odległość między liniami, wówczas powyższe oszacowanie może zostać dokonane na podstawie następującej zależności⁸:

$$\pi = \frac{2l}{ap}$$

gdzie:

p – ilość rzutów, w których igła przecięła jedną z linii,

l – długość igły,

a – odległość między liniami.

Doświadczenie to było wielokrotnie powtarzane przez wielu autorów, a uzyskane wyniki cechowały się różną dokładnością, jednak największą jego zaletą było udowodnienie, że przybliżone rozwiązania niektórych problemów analitycznych można osiągnąć poprzez wielokrotne powtarzanie określonego doświadczenia.

Jak wspomniano wcześniej, formalnie za czas powstania symulacji Monte Carlo w obecnej formie uznaje się rok 1949, w którym został opublikowany artykuł Metropolisa i Ulama *The Monte Carlo Method*. Tłumacząc istotę tej techniki, autorzy odwołali się do obrazowego przykładu stawiania pasjansa – wyznaczenie szansy pomyślnego ułożenia jest niemożliwe bez rozegrania wielu partii i oszacowania na tej podstawie prawdopodobieństwa sukcesu. Pierwotnie symulację tę wykorzy-

⁷ G.L. Leclerc, *Essays on Moral Arithmetic*, LSF Research Working Paper Series No. 10-06, Luksemburg 2010, s. 18 i n.

⁸ Ibid.

stano po raz pierwszy do szacowania tempa dyfuzji neutronów, w procesie konstrukcji bomby atomowej⁹.

Wspomniana powyżej data ma oczywiście charakter umowny, ponieważ za formalny pierwowzór symulacji można uznać próbkowanie statystyczne, wykorzystywane już przed publikacją wymienionego artykułu. Jest ona jednak istotna z innego punktu widzenia – w tym okresie powstały pierwsze komputery, których moc obliczeniowa umożliwiła szybkie przeprowadzenie symulacji. Wcześniej, z powodu dużej prędkości, wykorzystanie tej techniki było silnie ograniczone¹⁰.

3. Formalne podstawy symulacji Monte Carlo

Formalnie symulacja stochastyczna Monte Carlo jest ściśle związana z pojęciem całkowania, ponieważ jej istotą jest oszacowanie wielkości, będącej funkcją zmiennych losowych, które możemy oznaczyć jako X_1, X_2, \dots, X_n . Zakładając, że zmienne te pochodzą z rozkładu jednostajnego od 0 do 1, wynik symulacji można zinterpretować jako nieobciążony estymator całki wielowymiarowej¹¹:

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n$$

Uzyskany estymator uznaje się za nieobciążony, ponieważ u podstaw symulacji Monte Carlo leży prawo wielkich liczb. Własność ta ma zastosowanie w zakresie badania zbieżności ciągów zmiennych losowych i może być rozpatrywana w dwóch wersjach – zbieżności według prawdopodobieństwa (słabe prawa wielkich liczb) lub zbieżności z prawdopodobieństwem 1 (mocne prawa wielkich liczb).

Za podstawę wszystkich powyższych koncepcji matematycznych uznaje się nierówność Czebyszewa, która przyjmuje następującą postać¹²:

$$P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

⁹ Warto również wspomnieć, że w artykule tym użyto po raz pierwszy nazwy „Monte Carlo”. Tłumaczy się ją odwołaniem do dzielnicy Monako, znanej z dużej ilości kasyn, bowiem pierwsze rozważania teoretyczne związane z aparaturą narzędziową wykorzystywaną w tej metodzie mają swoje źródło w analizie gier losowych. Koncepcję tę potwierdza Metropolis, czyli twórca nazwy, dla którego inspiracją były opowieści Ulama o swoim wujku, zmuszonym do pożyczania pieniędzy w celu odwiedzenia kasyn w wspomnianej dzielnicy. Więcej w: N. Metropolis, *The Beginning of the Monte Carlo Method*, „Los Alamos Science” 1987, Special Issue No. 15, s. 127.

¹⁰ Idem: *Monte Carlo and the MANIAC*, „Los Alamos Science” 1986, No. 14, s. 98-99.

¹¹ F. James, *Monte Carlo Theory and Practice*, „Reports on Progress in Physics” 1980, Vol. 43, s. 1148.

¹² S. Jermakow, *Metoda Monte Carlo i zagadnienia pokrewne*, PWN, Warszawa 1976, s. 19.

gdzie:

\bar{X}_n – wartość średnia zmiennej losowej z próby $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$,

μ – wartość oczekiwana zmiennej losowej,

ε – dowolna dodatnia liczba,

σ^2 – wariancja zmiennej losowej,

n – ilość zmiennych losowych w próbie.

Z powyższej zależności wynika, że dla dowolnego, większego od zera ε średnia arytmetyczna zmiennej losowej będzie z prawdopodobieństwem mniejszym niż $1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ różniła się od wartości oczekiwanej μ o nie więcej niż ε .

W zbieżności według prawdopodobieństwa rozpatruje się słabe prawa wielkich liczb. Dysponując ciągiem zmiennych losowych (X_n) , własność ta może zostać przedstawiona w sposób ogólny następująco¹³:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - EX_n| < \varepsilon) = 1$$

W konsekwencji, jeśli n rośnie, wówczas prawdopodobieństwo tego, że wartość zmiennej losowej będzie zawarta w ustalonym, dowolnie małym otoczeniu jej wartości oczekiwanej, również wzrasta.

Szczególnym przypadkiem słabego prawa wielkich liczb jest prawo Chinczyzna, które opiera się na najmniej rygorystycznych założeniach – zależność ta dotyczy niezależnych¹⁴ zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Zgodnie z nią ciąg średnich arytmetycznych zmiennej losowej będzie zbieżny według prawdopodobieństwa do μ , co w sposób formalny przedstawiono poniżej¹⁵:

$$E\bar{X}_n = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

W konsekwencji średnia arytmetyczna analizowanych zmiennych losowych będzie z bardzo dużym prawdopodobieństwem przyjmowała wartości nieróżniące się istotnie od μ (zbieżność stochastyczna).

¹³ M. Cieciora, J. Zacharski, Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym, Vizja Press & IT, Warszawa 2007, s. 221.

¹⁴ Dla jasności wyводу warto zaznaczyć, że niezależność pociąga za sobą brak skorelowania, ale stwierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Zerowa wartość najpopularniejszej miary wzajemnego powiązania, jakim jest współczynnik korelacji liniowej Pearsona, nie oznacza niezależności, a jedynie brak powiązania liniowego między zmiennymi. Oczywiście może między nimi występować korelacja nieliniowa, co wyklucza ich niezależność.

¹⁵ Ibid., s. 222.

W trakcie dalszych badań nad tym zagadnieniem sformułowano mocne wersje praw wielkich liczb, dotyczące prawie pewnej zbieżności (z prawdopodobieństwem bliskim jedności). Przykładem powyższej zależności jest prawo wielkich liczb Kołmogorowa, które może zostać przedstawione następująco¹⁶:

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n - EX_n) = 0\right] = 1$$

Powyższą własność można wyjaśnić w sposób bardziej intuicyjny, zakładając, że dysponuje się zbiorem n zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym, w przedziale od a do b (liczby rzeczywiste). Wówczas, zgodnie z mocnym prawem wielkich liczb, iloraz sumy wartości dowolnej funkcji $f(X_i)$, gdzie $i = 1, \dots, n$ oraz liczby zmiennych losowych (liczebność próby), będzie zbieżny do wartości oczekiwanej funkcji f , czyli¹⁷:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(X) dX$$

Lewa strona powyższej zależności to zgodny¹⁸ estymator całki znajdującej się po stronie prawej – wraz ze wzrostem liczebności próby uzyskana wartość będzie zbieżna do wartości rzeczywistej. Właśnie ta własność leży u podstaw symulacji Monte Carlo i stanowi jej merytoryczne uzasadnienie, bowiem implikuje, że dokonując dużej ilości ciągnięć zmiennej losowej, uzyskane oszacowanie będzie zbieżne do rzeczywistej wartości szukanego parametru.

Poza prawem wielkich liczb często uznaje się, że u podstaw symulacji Monte Carlo leżą również zależności nazywane ogólnie centralnymi twierdzeniami granicznymi. Warto jednak zauważyć, że nie są one niezbędne z punktu widzenia samej symulacji, a pozwalają jedynie na poznanie dodatkowych charakterystyk potencjalnego wyniku, przy spełnieniu określonych założeń.

Początkowa koncepcja centralnego twierdzenia granicznego została udowodniona przez Laplace'a, a następnie własność ta była rozwijana i rozszerzana przez innych autorów. Najczęściej przytaczana wersja tej zależności, autorstwa Lindeberga i Levy'ego¹⁹, zakłada, że dysponuje się ciągiem niezależnych zmiennych losowych

¹⁶ W. Kryszicki, J. Bartos, W. Dyczka et al., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część I*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1999, s. 236.

¹⁷ F. James, op. cit., s. 1150.

¹⁸ Jak wspomniano wcześniej, zgodność estymatora oznacza, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji, jego wartość będzie zmierzała do wartości rzeczywistej szacowanego parametru. Wynik uzyskany dzięki symulacji Monte Carlo jest jeszcze nieobciążony, co oznacza, że jego wartość oczekiwana jest równa wartości parametru.

¹⁹ M. Cieciora, J. Zacharski, op. cit., s. 216.

o jednakowym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej oraz wariancji. Następnie tworzy się ciąg, będący sumą powyższych zmiennych:

$$Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Wartość oczekiwana powyższego wyrażenia wynosi $n\mu$, a jego wariancja przyjmuje postać $n\sigma^2$. Po wystandaryzowaniu otrzymuje się:

$$V_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Zgodnie z twierdzeniem Lindeberga – Levy’ego ciąg wystandaryzowanych zmiennych (Y_n) jest zbieżny do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym $N(0,1)$.

Konkludując, można zauważyć, że zgodnie z powyższym twierdzeniem, jeśli wykorzystane w symulacji Monte Carlo zmienne losowe będą spełniały określone założenia, wówczas zwiększenie liczby iteracji będzie skutkowało asymptotyczną zbieżnością uzyskanych wyników do rozkładu normalnego. Własność ta, jak już wspomniano, nie jest niezbędna dla prawidłowości samej symulacji, lecz pozwala jedynie na uzyskanie w ściśle określonych warunkach dodatkowych informacji o potencjalnym wyniku.

4. Określenie i redukcja błędu symulacji

Stosując symulację stochastyczną Monte Carlo, nigdy nie uzyska się pewności co do otrzymanego wyniku, bowiem dokonując nawet bardzo dużej liczby iteracji, otrzymane wyniki zawsze będą stanowiły próbę wszystkich możliwości. Każdą przeprowadzoną symulację cechuje w związku z tym określony błąd. Co więcej, jego wartość nie może zostać wyliczona *ex ante*, ponieważ nie można z góry obliczyć odchylenia standardowego otrzymanych liczb losowych, które zostaną wykorzystane w symulacji. Oszacowanie to odbywa się w związku z tym *ex post*, już po przeprowadzeniu całej kalkulacji. Tym samym zakłada się automatycznie, że przybliżony błąd można obliczyć na podstawie uzyskanych rezultatów symulacji. W takim ujęciu powyższa kwestia sprowadza się do wyznaczenia wariancji \bar{X}_n , czyli wartości średniej zmiennej losowej z próby, będącej rezultatem n ciągnięć określonego doświadczenia. Formalnie można to zapisać jako²⁰:

$$\sigma = \frac{\hat{\sigma}}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \text{cov}(X_i, X_j)$$

²⁰ W. Nadie, D. Drijard, F. James et al., Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej, PWN, Warszawa 1989, s. 40-41.

gdzie:

$\hat{\sigma}$ – odchylenie standardowe zmiennej losowej obliczone na podstawie wyników symulacji.

Zakładając, że otrzymane w wyniku ciągnięć zmienne losowe są niezależne, kowariancja między każdą parą zmiennych jest równa zero, a powyższe wyrażenie upraszcza się do następującej postaci²¹:

$$\sigma = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

W konsekwencji błąd standardowy symulacji zależy od dwóch czynników: odchylenia standardowego zmiennej losowej z próby oraz ilości dokonanych ciągnięć.

Rozważając dalej kwestię precyzyjności oszacowania uzyskanego w ramach symulacji, można zauważyć, że redukcję wielkości błędu uzyskuje się dwójako – albo poprzez zmniejszenie wariancji zmiennej losowej, albo zwiększając liczbę iteracji. Sposoby te nie są jednak ekwiwalentne, bowiem za jedną z wytycznych związanych z przeprowadzeniem symulacji można uznać ograniczenie jej pracochłonności, co jest bezpośrednio związane z minimalizacją liczby koniecznych do wykonania iteracji.

W konsekwencji nic nie stoi na przeszkodzie, by poprawę jakości oszacowania uzyskać poprzez wzrost liczby dokonanych ciągnięć zmiennej losowej, jednak w tym przypadku zwiększenie zbieżności następuje w tempie pierwiastka kwadratowego z tej wielkości. Zależność ta powoduje, że dopiero znaczne wielokrotnienie ilości iteracji skutkuje istotną poprawą zbieżności symulacji. W związku z tym ten sposób obniżania błędu standardowego uznaje się za wolny i mało efektywny, a dodatkowo sprzeczny z opisanym powyżej postulatem zachowania jak najmniejszej pracochłonności całej procedury.

Drugim sposobem na obniżenie błędu symulacji jest redukcja odchylenia standardowego zmiennej losowej. W tym celu można posłużyć się szeregiem metod, które modyfikują sposób próbkowania, tym samym przyczyniając się do bardziej regularnego pokrycia rozkładu prawdopodobieństwa analizowanego zjawiska. To z kolei automatycznie skutkuje redukcją wariancji. Do najpopularniejszych metod w tym zakresie zalicza się omówione poniżej próbkowanie obszarowe, według ważności i metodę zmiennych przeciwstawnych²².

Pierwszy z wymienionych sposobów redukcji wariancji zmiennej losowej polega na podzieleniu przyjętego rozkładu prawdopodobieństwa na mniejsze obszary

²¹ P. Jäckel, *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons, West Sussex 2002, s. 20.

²² Przedstawione zestawienie nie ma charakteru wyczerpującego. Po dokładniejsze opracowanie tej kwestii warto sięgnąć do F. James, *op. cit.*, s. 1155-1158 i P. Jäckel, *op. cit.*, s. 111-120.

i dokonywanie z nich indywidualnych ciągnień. Matematyczną podstawę tej techniki stanowi pojęcie całki Reimanna, które może zostać przedstawione jako:

$$I = \int_0^1 f(X)dX = \int_0^a f(X)dX + \int_a^1 f(X)dX, \text{ dla } 0 < a < 1$$

Próbkowanie wartości losowych z określonych podobszarów sprawia, że każda z wyodrębnionych przestrzeni będzie w większym stopniu uwzględniona w symulacji, niż w przypadku ciągnień z jednolitego obszaru. Tym samym zsumowany z wyników cząstkowych rozkład będzie równomierniej odwzorowany, a co z tym związane, wariancja zmiennej losowej powinna być mniejsza.

Głównym problemem dotyczącym zastosowania tej metody jest sposób stratyfikacji rozkładu prawdopodobieństwa analizowanego zjawiska na określone podobszary i ustalenie ich długości²³. Ważną kwestią jest również określenie ilości dokonywanych z każdego strefy ciągnień. Badania pokazują jednak, że nawet podział rozkładu na równe obszary i próbkowanie z nich takiej samej ilości zmiennych pozwala na zredukowanie błędu symulacji²⁴. Warto zauważyć, że stosowanie tej techniki implikuje poprawę dokładności oszacowania dzięki dokładniejszej reprezentacji określonego rozkładu zjawiska – zwiększanie w tym momencie liczby iteracji niekoniecznie musi prowadzić do poprawy zbieżności wyniku.

Druga z wymienionych metod, czyli próbkowanie według ważności, również polega na podziale rozkładu analizowanego zjawiska na obszary, jednak narzuca pewne ograniczenia na sposób dokonywania stratyfikacji. Zakłada ona, że próbkowanie zmiennych losowych powinno być szczególnie intensywne w obszarach, o których wiadomo, że mają decydujący wpływ na rozpatrywane zjawisko, a tym samym wynik symulacji. W związku z tym podział rozkładu zależy w tej technice każdorazowo od charakteru problemu badawczego i nie ma jednego ogólnego schematu pozwalającego dokonać jego dekompozycji.

Istotnym mankamentem opisywanej techniki jest wymóg dysponowania szczegółową wiedzą o analizowanym zagadnieniu – w celu wyodrębnienia określonych obszarów konieczna jest znajomość przedziałów wartości, kluczowych dla wyniku symulacji. Kwestia ta w znacznym stopniu ogranicza możliwą aplikacyjność tego sposobu redukcji wariancji zmiennej losowej.

Trzecia z wymienionych technik nie implikuje podziału rozkładu prawdopodobieństwa na mniejsze obszary, a ingeruje w sposób próbkowania zmiennych losowych. Jej punktem wyjścia jest spostrzeżenie, że na wariancję zmiennych nie-

²³ Kwestia ta nabiera szczególnego znaczenia w momencie sumowania wyników cząstkowych, bowiem decyduje o przypisanej obszarowi wadze na etapie uzyskiwania ogólnego rozkładu zjawiska.

²⁴ F. James, op. cit., s. 1156.

zależnych wpływa współczynnik korelacji pomiędzy nimi. Jeśli zależność ta jest negatywna (ujemny współczynnik korelacji), wówczas wartość wariancji spada.

Powyższą kwestię można wykorzystać w celu zredukowania błędu w symulacji Monte Carlo. W tym celu należy podzielić proces próbkowania zmiennych na dwa etapy – w pierwszym dokonuje się standardowych ciągnięć zmiennych losowych, a w drugim powiększa się otrzymany zbiór poprzez odpowiednie przekształcenie wcześniej uzyskanych wielkości. Przykładem może być wylosowanie w pierwszym etapie zmiennych X_1, X_2, \dots, X_n , a następnie odjęcie ich od jedności. W konsekwencji pozostałe wielkości będą postaci $1 - X_1, 1 - X_2, \dots, 1 - X_n$. Tym sposobem każdej małej wartości towarzyszy wartość duża i *vice versa*. Innym przekształceniem, które można zastosować na drugim etapie próbkowania, jest przyjęcie zmiennych o przeciwnym znaku do wcześniej wylosowanych.

Stosując tę technikę, należy pamiętać, że jej skutkiem ubocznym jest brak niezależności zmiennych, co z kolei ma negatywny wpływ na przeprowadzaną symulację – uzyskana redukcja wariancji może okazać się bezużyteczna w obliczu braku wiarygodności wyniku symulacji. Kwestia ta nie oznacza, że opisana powyżej metoda nie powinna być stosowana, bowiem istnieją sposoby pozwalające zachować niezależność zmiennych. Przykładowo w pierwszym opisanym algorytmie można zastosować jako wynik próbkowania średnią arytmetyczną dwóch zmiennych losowych – w ten sposób uzyskany zbiór wielkości w dalszym ciągu będzie posiadał korzystne własności, a jego niezależność zostanie zachowana.

Opisane powyżej techniki redukcji wariancji zmiennej losowej, a przez to błędu całej symulacji, nie stanowią zamkniętego katalogu. W literaturze przedmiotu zawarto wiele innych metod, jednak przedstawione sposoby można uznać za najbardziej popularne. Techniki te są bardzo istotne, ponieważ pozwalają na zwiększenie precyzji symulacji, bez konieczności drastycznego podnoszenia liczby iteracji, a tym samym jej pracochłonności.

5. Zastosowanie symulacji Monte Carlo w finansach

Symulacja stochastyczna Monte Carlo ma zastosowanie m.in. w obliczaniu układów równań liniowych, całek oraz cząstkowych równań różniczkowych. W dziedzinie finansów wykorzystuje się ją w ramach wyceny instrumentów pochodnych oraz oceny efektywności projektów inwestycyjnych. Kończąc rozważania o podstawach metodycznych wspomnianej techniki, warto podać ogólny schemat zastosowania symulacji Monte Carlo w analizach finansowych.

Kwestię tę, w odniesieniu do oceny efektywności projektów inwestycyjnych, podjął Waldemar Rogowski, przedstawiając następujące etapy symulacji:

1. Konstruowanie modelu finansowego przedsięwzięcia (określenie zmiennych zdeterminowanych i losowych oraz wzajemnych powiązań pomiędzy nimi).
2. Ustalenie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych.
3. Próbkowanie wielkości z rozkładu i szacowanie zmiennej objaśnianej.
4. Przeprowadzenie określonej liczby powtórzeń powyższych kroków.
5. Agregacja wyników w postaci rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej objaśnianej²⁵.

Powyższy schemat dobrze odwzorowuje algorytm przeprowadzania symulacji w ramach kalkulacji opłacalności przedsięwzięć inwestycyjnych, jednak jak wspomniano wcześniej, to nie jedyny obszar finansów, w którym technika ta znalazła zastosowanie. W związku z tym warto przedstawić bardziej ogólny algorytm, który będzie zawierał wszystkie niezbędne kroki konieczne do przeprowadzenia symulacji, niezależnie od tego, czy analiza będzie dotyczyła oceny projektów inwestycyjnych, czy generowania ścieżek cenowych przy pomocy odpowiednich procesów stochastycznych. Taki schemat powinien składać się z trzech części: wstępnej analizy problemu badawczego oraz przeprowadzenia operacji czysto technicznych, związanych z przygotowaniem danych wejściowych, wielokrotnego powtarzania symulacji i finalnie – agregacji wyników cząstkowych.

W pierwszym etapie punktem wyjścia jest analiza problemu badawczego w celu zidentyfikowania kluczowych zmiennych, które będą stanowiły przedmiot symulacji (ceny produktów lub instrumentów finansowych, koszty jednostkowe, przepływy finansowe). Następnie należy ustalić ogólne charakterystyki tych wielkości, takie jak wartość średnia, odchylenie standardowe czy korelacja z innymi zmiennymi. Charakterystyki te mogą być wyznaczone w sposób subiektywny, z uwzględnieniem opinii ekspertów oraz przewidywań odnośnie do rozwoju analizowanego zjawiska lub przy pomocy danych historycznych, co automatycznie pociąga za sobą założenie o stabilności oraz powtarzalności oszacowanych wielkości w czasie. Na koniec tego procesu powinno się otrzymać rozkład prawdopodobieństwa, który będzie reprezentowany przez próbkowane liczby losowe.

Dalszym krokiem jest generowanie liczb losowych. Wielkości te mogą być ciągnięte od razu z ustalonego wcześniej rozkładu prawdopodobieństwa lub początkowo z rozkładu jednostajnego w przedziale od 0 do 1, z wyłączeniem wartości skrajnych²⁶. Następnie przekształca się je za pomocą funkcji odwrotnej dystrybuanty w wielkości o żądanych właściwościach.

²⁵ W. Rogowski, *Rachunek efektywności przedsięwzięć inwestycyjnych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2006, s. 222.

²⁶ Wyłączenie to jest konieczne, ponieważ nie wszystkie rozkłady muszą posiadać jednostronne granice (mogą dążyć do nieskończoności).

Po tym kroku należy uwzględnić w analizie wzajemne powiązania zmiennych objaśniających, bowiem w przeciwnym wypadku relacje zachodzące pomiędzy poszczególnymi wielkościami zostałyby zaburzone w trakcie symulacji, prowadząc do zniekształcenia jej wyniku. Za najefektywniejszy sposób pozwalający na nadanie liczbom losowym odpowiedniej korelacji uznaje się metodę dekompozycji Choleskiego, omówioną szczegółowo w literaturze przedmiotu²⁷.

Przedstawione powyżej kroki należy przeprowadzić zawsze, niezależnie od rozważanego problemu. Drugi etap symulacji przybiera z kolei różną postać, w zależności od rozpatrywanego zagadnienia. Każdorazowo konieczne jest ustalenie w nim odpowiedniego algorytmu, przetwarzającego zmienne losowe na wynik końcowy. Uwzględniając możliwe problemy badawcze w dziedzinie finansów, może to być model finansowy, generujący przepływy środków pieniężnych dla analizowanego projektu inwestycyjnego, lub proces stochastyczny, za pomocą którego generowane są ścieżki cenowe instrumentów finansowych. Otrzymane wcześniej zmienne losowe są podstawiane w odpowiednie miejsca takiej konstrukcji, co pozwala w konsekwencji na uzyskanie jednego z potencjalnych wyników. Cały proces powtarzany jest odpowiednio dużą ilość razy, tak by zbiór rezultatów stanowił dobre przybliżenie rozkładu poddawanego symulacji problemu.

Ostatnim etapem stosowania tej metody jest zbiorcza analiza otrzymanych wyników – tutaj ujawnia się największa zaleta symulacji Monte Carlo, jaką jest probabilistyczny charakter danych wyjściowych. Wynikiem końcowym badania jest empiryczny rozkład wartości zmiennej objaśnianej, co pozwala na jej wielowymiarową analizę – poza wartością średnią i odchyleniem standardowym, stanowiącym miarę ryzyka, można również wyznaczyć prawdopodobieństwa przyjęcia przez zmienną określonych wartości. W konsekwencji uzyskuje się bardzo szeroką próbkę przyszłych możliwych stanów analizowanego zagadnienia.

Podsumowanie

Symulacja stochastyczna Monte Carlo jest jedną z technik, które pozwalają uwzględnić w analizie stochastyczną naturę badanych zjawisk. Jej istotą jest próbkowanie zmiennych losowych z określonego rozkładu, które następnie stosowane są w celu uzyskania dużej liczby rozwiązań rozpatrywanego problemu. Tym sposobem otrzymuje się empiryczny rozkład prawdopodobieństwa, który dostarcza wielu informacji o badanym zjawisku.

²⁷ D. Gątarek, R. Maksymiuk, M. Krysiak, Ł. Witkowski, *Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem finansowym*, WIG-Press, Warszawa 2001, s. 41.

Matematyczną podstawę symulacji stanowią prawa wielkich liczb, które zakładają, że wartości otrzymane dzięki liczbom losowym, poprzez wielokrotne powtarzanie doświadczenia, będą zbieżne z rzeczywistym poziomem szukanej zmiennej, co w konsekwencji pozwala uznać estymator uzyskany tą metodą za nieobciążony. Poza tym poznanie dodatkowych charakterystyk potencjalnego wyniku umożliwiają centralne twierdzenia graniczne, zgodnie z którymi, po spełnieniu określonych założeń, wraz ze wzrostem iteracji rezultat symulacji będzie przybierał postać rozkładu normalnego.

Początkowo symulacja Monte Carlo znajdowała zastosowanie w obliczaniu układów równań liniowych, całek oraz cząstkowych równań różniczkowych. Podczas dalszych badań zaczęto ją wykorzystywać również na gruncie finansów, głównie w wycenie instrumentów pochodnych oraz szacowaniu efektywności projektów inwestycyjnych.

Ogólny schemat aplikacji tej metody w zakresie finansów można podzielić na trzy etapy: część wstępną, związaną z analizą problemu badawczego oraz kwestiami technicznymi, dokonywanie symulacji i agregację uzyskanych wyników. O ile pierwszy i końcowy etap należy przeprowadzić zawsze, o tyle część środkowa jest zależna od poddanego analizie zjawisku – można w niej wykorzystać model finansowy, generujący przepływy pieniężne dla analizowanego projektu inwestycyjnego, lub proces stochastyczny, za pomocą którego następuje tworzenie ścieżek cenowych wybranych instrumentów finansowych.

Zastosowanie w analizie symulacji Monte Carlo często jest utożsamiane z odejściem od determinizmu, jednak postępowanie to nie jest do końca właściwe. Okazuje się, że niemożność określenia stanu końcowego rozpatrywanego procesu, przy założeniu posiadania pełnej wiedzy o jego przebiegu, można uznać za przejaw determinizmu statystycznego. Wspomniane wcześniej zerwanie z determinizmem sugerowałoby natomiast przejście w stronę skrajnego indeterminizmu, co automatycznie jest związane z dopuszczeniem całkowitej nieokreśloności ewolucji zdarzeń.

W konsekwencji metodę Monte Carlo nie można jednoznacznie zaklasyfikować do skrajnych koncepcji determinizmu i indeterminizmu. Indywidualne przyporządkowanie zależy od subiektywnej oceny posiadanej wiedzy w zakresie praw rządzących analizowanym zjawiskiem oraz skali akceptacji losowości zdarzeń. Kombinacja tych dwóch elementów pozwala uplasować symulację Monte Carlo albo w ramach determinizmu statystycznego, albo umiarkowanego indeterminizmu.

Literatura

- Arystoteles, *Metafizyka*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- Cieciura M., Zacharski J., *Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym*, Vizja Press & IT, Warszawa 2007.
- Gątarek D., Maksymiuk R., Krysiak M., Witkowski Ł., *Nowoczesne metody zarządzania ryzykiem finansowym*, WIG-Press, Warszawa 2001.
- Halton J., *A Retrospective and Prospective Survey of the Monte Carlo Method*, „SIAM Review” 1970, Vol. 12, No. 1.
- Hawking S., Mlodinow L., *Wielki projekt*, Wyd. Albatros, Warszawa 2011.
- Jäckel P., *Monte Carlo Methods in Finance*, John Wiley & Sons, West Sussex 2002.
- James F., *Monte Carlo Theory and Practice*, „Reports on Progress in Physics” 1980, Vol. 43.
- Jermakow S., *Metoda Monte Carlo i zagadnienia pokrewne*, PWN, Warszawa 1976.
- Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część I*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1999.
- Leclerc G.L., *Essays on Moral Arithmetic*, LSF Research Working Paper Series No. 10-06, Luksemburg 2010.
- Metropolis N., *The Beginning of the Monte Carlo Method*, „Los Alamos Science” 1987, Special Issue No. 15.
- Metropolis N., Ulam S., *The Monte Carlo Method*, „Journal of the American Statistical Association” 1949, Vol. 44, No. 247.
- Nadie W., Drijard D., James F., Roos M., Sadoulet B., *Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej*, PWN, Warszawa 1989.
- Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 2, red. A. Maryniarczyk, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2001.
- Powszechna Encyklopedia Filozofii*, t. 4, red. A. Maryniarczyk, Polskie Towarzystwo Tomasza z Akwinu, Lublin 2001.
- Reichenbach H., *The Direction of Time*, University of California Press, Berkeley 1999.
- Rogowski W., *Rachunek efektywności przedsięwzięć inwestycyjnych*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2006.
- Sobol I., *The Monte Carlo Method*, Mir Publisher, Moskwa 1975.

METHODOLOGICAL BASIS OF THE MONTE CARLO STOCHASTIC SIMULATION

Summary

The aim of these paper is to present the genesis and methodical basis of the Monte Carlo simulation, which allows to incorporate in studies the stochastic nature of economic variables. Additionally this article considers the connection between the mentioned method and the concepts of determinism and indeterminism.