Grażyna Trzpiot
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

MIARY RYZYKA A POMIAR EFEKTYWNOŚCI INWESTYCJI

Wprowadzenie

Przedstawiamy zbiór miar ryzyka, określając zbiór aksjomatów, które powinny takie miary spełniać. Miary, które będą spełniać omówiony zbiór aksjomatów będziemy nazywać indeksami akceptowalności (ang. *indexes of acceptability)*, a korzystając z odpowiednich twierdzeń o reprezentatywności zapiszemy charakterystyki tych indeksów.

Indeks akceptowalności jest nieujemną liczbą rzeczywistą. Z każdym poziomem indeksu jest skojarzony odpowiedni przepływ pieniężny, który jest akceptowaną wartością pewnej zmiennej losowej. W zadaniu wielookresowym są rozważane wszystkie strategie jako samofinansujące się przepływy pieniężne o zerowych kosztach. Mamy zatem przestrzeń zdarzeń i przestrzeń przepływów pieniężnych, powiązanych z inwestycjami lub strategiami inwestycyjnymi, które są zmiennymi losowymi w pewnej przestrzeni probabilistycznej. Zakładamy, że przestrzeń zdarzeń jest skończona i przestrzeń zmiennych losowych skończenie wymiarowa.

Dla dowolnego poziomu akceptowalności zmienne losowe, o nieujemnych wartościach są przypisane do operacji o zerowych kosztach, reprezentują arbitraż oraz są akceptowalne na wszystkich poziomach. Przepływy pieniężne są akceptowalne na ustalonym poziomie, to w konsekwencji odnosi się do wartości zmiennych losowych o nieujemnych lub dodatnich wartościach w przestrzeni zmiennych losowych. Bardziej ogólnie przepływy pieniężne są akceptowalne jako konsekwencja aksjomatów i wpisują się w pewne wypukłe stożki. To oznacza, że liniowa kombinacja zmiennych losowych akceptowalna na ustalonym poziomie jest również akceptowalna na tym samym poziomie jako dodatni iloczyn skalarów. Ten zbiór akceptowalnych przepływów jest zatem nawiązaniem do prac Artznera et al. [1999] oraz Carra, Gemana i Madana [2000].

1. Zbiory akceptowalnego ryzyka

Zbiór ryzyk zapiszemy jako G, jest to zbiór wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych zdefiniowanych na przestrzeni probabilistycznej Ω[1] (zmiennych losowych). Zakładamy, że zbiór Ω jest skończony, dlatego można przyjąć, że $G = R^n$, gdzie $n = card(\Omega)$. Stożek dodatnich elementów G zapiszemy jako L_+, natomiast ujemnych $L\_$.

Zapiszemy jako $A_{i,j}$ zbiór przyszłych wartości netto wyrażonych w *i*-tej walucie, która w kraju *i* jest akceptowana przez regulatorów *j*, oraz $A = \bigcap_j A_{i,j}$.

Przedstawimy poniżej zbiór aksjomatów dla **podzbioru akceptowalnego ryzyka** [Artzner 1999].

Aksjomat A. Zbiór akceptowalnego ryzyka A zawiera L_+.

Aksjomat B. Zbiór akceptowalnego ryzyka A nie ma części wspólnej z $L\_$ określonego jako:

$$L\_ = \{X: X(\omega) < 0, \omega \in \Omega\}.$$

Często ten aksjomat jest zastępowany mocniejszym założeniem.

Aksjomat B2. Zbiór akceptowalnego ryzyka A spełnia warunek $A \cap L\_ = \{0\}$.

Kolejny aksjomat odnosi się do awersji do ryzyka części decydentów, a następny ma charakter najmniej intuicyjny.

Aksjomat C. Zbiór akceptowalnego ryzyka A jest wypukły.

Aksjomat D. Zbiór akceptowalnego ryzyka A jest homogenicznie dodatnio określonym stożkiem.

Zbiór akceptowalnego ryzyka jest punktem wyjścia do opisu obszaru akceptacji lub odrzucenia ryzyka. Przejdziemy do zdefiniowana w sposób naturalny miary ryzyka poprzez określenie położenia zajmowanej pozycji (ryzyka posiadanego instrumentu) w stosunku do zbioru akceptowanego ryzyka.

Definicja 1. Miara ryzyka jest odwzorowaniem ρ określonym z G w R.

Mówimy o miarach ryzyka zależnych od modelu (ang. *model-dependent*), w przypadku znanego rozkładu prawdopodobieństwa lub o miarach niezależnych od modelu (ang. *model-free*). Jeżeli wartość $\rho(X)$ jest dodatnia, to jest interpretowana jako minimalna dodatkowa wpłata, która musi być wykonana, aby utrzymać pozycję (zrekompensuje straty do pozycji rynkowej). Jeżeli wartość

[1] (Ω, F, P).

ρ(X) jest ujemna, jest to poziom możliwej wypłaty, która może być alokowana w dodatkowe instrumenty [Trzpiot 2004a].

Definicja 2. *Miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka*. Jeżeli stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka wynosi r, miara ryzyka związana ze zbiorem akceptowalnego ryzyka A jest odwzorowaniem z G w R określona jako:

$$\rho(\mathrm{X}) = \inf\{k: k \cdot r + \mathrm{X} \in \mathrm{A}\}.$$

Definicja 3. *Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka.* Zbiór akceptowalnego ryzyka związany z miarą ryzyka ρ jest określony jako:

$$\mathrm{A}_\rho = \{\mathrm{X} \in \mathrm{G}: \rho(\mathrm{X}) \le 0\}.$$

Z każdym zbiorem (stożkiem) akceptowalnego ryzyka jest powiązany wspomagający zbiór wycen. Przepływ pieniężny ma akceptowalny poziom ryzyka jedynie, jeżeli ma dodatnią oczekiwaną wycenę w zbiorze wycen. Im wyższy poziom akceptowalnego ryzyka, tym wyższa wycena, co pociąga za sobą mniejszy stożek akceptowalnych ryzyka. Jeżeli poziom akceptowalności przesuniemy do nieskończoności, wówczas stożek akceptowalnego ryzyka zamienia się w nieujemną zmienną losową lub w arbitraż.

Najszerszy stożek akceptowalnego ryzyka uzyskujemy, jeżeli zbiór wycen jest jednoelementowy. W tym przypadku mamy akceptowalną podprzestrzeń zmiennych losowych z dodatnią wartością oczekiwaną na zbiorze wycen.

Ważnym zadaniem jest zdefiniowanie poziomu akceptowalności ryzyka usytuowanego w pomiarze efektywności inwestycji. Efektywne ekonomie charakteryzują się tym, że przepływy pieniężne z wysokim poziomem akceptowalności ryzyka są ograniczane. Aby sformalizować oceny wprowadzamy indeks akceptowalności (lub akceptowalnego ryzyka), wykorzystując zmienne losowe i ich rozkłady, w szczególności rozkłady przepływów pieniężnych. To oznacza, że losowe przepływy pieniężne mają wyższy poziom akceptowalnego ryzyka, jeżeli mają rozkład z wyższym poziomem przekroczeń ustalonego progu ryzyka lub równoważnie poziom przekroczeń z próby o dodatnim oczekiwanym poziomie akceptowalności jest wówczas proporcjonalny do poziomu przekroczeń.

2. Aksjomaty miar wykonania przypływu pieniężnego

Zapiszemy zbiór aksjomatów dla miar wykonania przypływu pieniężnego. Finansowy model stopy zwrotu z inwestycji o kosztach zerowych w terminach przepływów pieniężnych jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P).

Skupimy uwagę na klasie ograniczonych zmiennych losowych z przestrzeni $L^\infty = L^\infty(\Omega, F, P)$. Miarą wykonania przypływu pieniężnego jest odwzorowanie α z L^∞ w $[0,\infty]$. Dla zmiennej losowej $X \in L^\infty$, która jest poziomem finansowania lub w bankowych terminach przepływem pieniężnym dla przyjętej strategii (zakładamy stopę zwrotu wolną od ryzyka). Wartość $\alpha(X)$ mierzy poziom, stopień jakości X. Indeks akceptowalności ma na celu wskazanie zbioru potencjalnych wycen, których krańcowa wartość jest dodatnia.

Quasi-wypukłość

Dla miar wykonania przypływu pieniężnego α, określamy zbiór przepływów A_x akceptowalny na poziomie x jako:

$$A_x = \{X : \alpha(X) \geq x\},\ x \in R_+.\ (1).$$

Własność quasi-wypukłości stanowi, że ten zbiór ma być wypukły. W połączeniu z własnością kolejną dodatniej homogeniczności, to oznacza, że A_x jest wypukłym stożkiem.
Jeżeli funkcja α jest quasi-wypukła, to oznacza, że:

gdy $\alpha(X) \geq x$ i $\alpha(Y) \geq x$, wówczas $\alpha(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq x$ dla każdego $\lambda \in [0, 1]$.

Monotoniczność

Jeżeli X jest akceptowalne na ustalonym poziomie oraz Y dominuje X jako zmienna losowa, wówczas Y jest akceptowalne na tym samym ustalonym poziomie.
Możemy zapisać to jako układ warunków:

$$\text{jeżeli } X \leq Y \text{ p.w., wówczas } \alpha(X) \leq \alpha(Y).$$

Niezmienniczość względem skali

Znamy dyskusje czy zbiór akceptowalnego ryzyka powinien być wypukły i niezmienniczy względem skali.

Niezmienniczość względem skali oznacza, że $\alpha(X)$ nie zależy od wartości współczynnika skali:

$$\alpha(\lambda X) = \alpha(X) \text{ dla } \lambda > 0.\ (4).$$

Własność Fatou

Celem wykorzystania twierdzeń niezbędne jest zachowanie szczególnych własności ciągłości. Zapiszemy lemat Fatou.

Jeżeli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych, takich, że $|X_n| \leq 1$, $\alpha(X_n) \geq x$, i X_n jest zbieżne do X względem prawdopodobieństwa, wówczas $\alpha(X) \geq x$.

Prawo niezmienniczości

Ta własność nakłada warunek zgodności rozkładów na przepływy pieniężne. Rozkłady mają takie same dystrybuanty, powinny mieć ten sam poziom akceptowalności, formalnie:

jeżeli $\mathrm{F}(X) = \mathrm{F}(Y)$ prawie wszędzie, wówczas $\alpha(X) = \alpha(Y)$.

Zgodność z SSD

Z punktu widzenia teorii użyteczności racjonalne jest następujące wymaganie: jeżeli pewna inwestycja jest preferowana bardziej niż inna, to powinna mieć wyższy poziom jakości. Jeżeli inwestorzy wykorzystują opis zachowań rynkowych poprzez funkcje użyteczności, wówczas mamy następującą własność:

jeżeli Y SSD X, wówczas $\alpha(X) \leq \alpha(Y)$,

gdzie SSD oznacza, że $E[U(X)] \leq E[U(Y)]$ dla dowolnej rosnącej wypukłej funkcji U.

Zgodność z arbitrażem

Arbitraż to zmienna losowa X taka, że $P(X > 0) > 0$. Arbitraż jest akceptowany oraz pożądany na poziomie akceptowalności dla takich nieograniczonych stóp zwrotu, oznacza to, że:

$X \geq 0$ p.w. wtedy i tylko wtedy $\alpha(X)=\infty$.

Pomijając warunek $P(X > 0) > 0$, ponieważ formalnie $\alpha(0) = \infty$, dla każdego przepływu pieniężnego miara jest monotoniczna, niezmiennicza względem skali i ma własność Fatom.

Uzasadnimy powyższą rozbieżność: rozważając monotoniczność wraz z niezmienniczością względem skali oraz nieograniczonością otrzymujemy $\alpha(1) = \infty$; oczywiście z niezmienniczości względem skali wynika, że $\alpha(\varepsilon) = \infty$ dla każdego $\varepsilon > 0$; ostatecznie z własności Fatou mamy $\alpha(0) = \infty$.

Zgodność wartości oczekiwanych

Zgodność arbitrażowa odnosi się do najwyższych wartości wyznaczanych miar. Zgodność wartości oczekiwanych odnosi się do najmniejszych wartości i wymaga, aby zachodziły warunki:

jeżeli $E[X] < 0$, wówczas $\alpha(X) = 0$;

jeżeli $E[X] > 0$, wówczas $\alpha(X) > 0$.

3. Charakterystyka miar wykonania przypływu pieniężnego

Zapiszemy równoważne podejścia do sposobu definiowania ryzyka poprzez indeks akceptowalnego ryzyka oraz miary koherentne.

Koherentne miary ryzyka

Teoria powiązana z określeniem indeksu akceptowalnego ryzyka wykorzystuje koherentne miary ryzyka.

Definicja 4. Miara ryzyka ρ jest nazywana koherentną, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące aksjomaty [Artzner et al. 1997; Trzpiot 2004a, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b]:
1. Subaddytywność:
   dla dowolnych $X, Y \in L^\infty$, wówczas $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
2. Dodatnia homogeniczność:
   dla dowolnych $X \in L^\infty$ oraz $\lambda \geq 0$, wówczas $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.
3. Translacja inwariantna:
   dla ustalonego $X \in L^\infty$ oraz dowolnych $a \in$ R, wówczas $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.
4. Monotoniczność:
   dla $X, Y \in L^\infty$ takich , że $X \leq Y$, wówczas $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

Indeks akceptowalnego ryzyka

Indeks akceptowalnego ryzyka jest powiązany z koherentnymi miarami ryzyka.

Każdy funkcjonał postaci:

$$\rho_x(X) = -\inf_{Q \in D_x} E^Q[X], \ x \in \mathrm{R}_+$$

jest koherentną miara ryzyka. Jeżeli α jest indeksem akceptowalności, wówczas może być reprezentowany jako:

$$\alpha(X) = \sup\{x \in R_+ : \rho_x(X) \le 0\},$$

z rodziną $(\rho_x)_{x \in R+}$ rosnących w x koherentnych miar ryzyka (tzn. odwzorowanie $x \rightarrow \rho_x(X)$ jest rosnące dla każdego $X \in L^\infty$).

Tak określone α jest indeksem akceptowalności, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jednoparametryczna rosnąca rodzina koherentnych miar ryzyka, posiadająca następującą własność:

α(X) jest największą wartością x taką, że X jest akceptowalna (na ustalonym poziomie) przy wartości miary ryzyka wynoszącej x.

Indeks akceptowalnego ryzyka jest odwzorowaniem quasi-wypukłym, monotonicznym, niezmienniczym względem skali i ma własność Fatou. Każdy indeks akceptowalności jest powiązany z rosnącą jednoparametrową rodziną miar probabilistycznych tak, że wartość α(X) jest największą wartością x taką, że X ma dodatnią wartość oczekiwaną dla każdej miary z rozważanego zbioru na poziomie x. Akceptowalność na poziomie x oznacza, że wszystkie miary z odpowiadającej rodziny wyceniają X dodatnio. Indeks α(X) jest wówczas najwyższym uzyskiwanym poziomem akceptowalności.

Spojrzymy z dodatkowej perspektywy na indeks akceptowalnego ryzyka. Zbiór dopuszczalnych przepływów wyznaczany przez indeks α jest zdefiniowany jako:

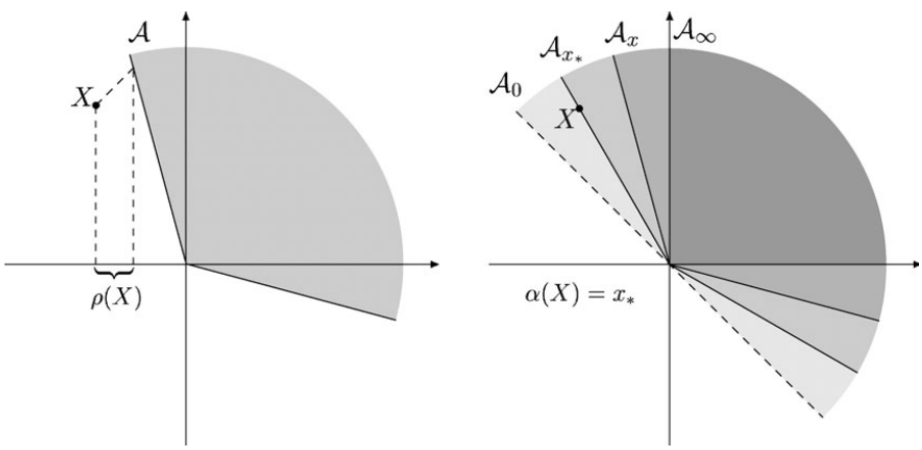
$$A_x = \{X \in L^\infty : \rho x\,(X) \le 0\},\ x \in R_+.$$

To jest rodzina wypukłych stożków zmiennych losowych $L^{\infty+}$ i malejących w x. Wartość α(X) jest największą wartością x taką, że X należy dla przyjętego progu akceptowalności x do zbioru:

$$\alpha(X) = \sup\{x \in R_+ : X \in A_x\}.$$

Otrzymaliśmy dyskryminację zbioru decyzji dla wybranej miary ryzyka. Wszystkie zajęte pozycje są podzielone na dwie klasy: akceptowalne i nieakceptowalne. Dla indeksu akceptowalności mamy continuum poziomów akceptowalności zdefiniowane poprzez system akceptowalności (A_x), $x \in R_+$, dodatkowo indeks mierzy poziom akceptowalności dla przepływu pieniężnego.

Aby przedstawić graficzną ilustrację zależności pomiędzy koherentnymi miarami ryzyka, indeksem akceptowalności, zbiorem akceptowalności oraz systemem akceptowalności na rysunku 1 przedstawiamy przykład: dwa punkty ω_1, ω_2. Dowolna zmienna losowa X jest reprezentowana jako punkt $(X(\omega_1), X(\omega_2))$. Lewy rysunek to zbiór akceptowalnego ryzyka, stożek A dla koherentnej miary ρ. Na prawym rysunku mamy zbiór akceptowalnych stożków A_x dla indeksu akceptowalności α.



Rys. 1. Akceptowalne stożki powiązane z koherentnymi miarami ryzyka i indeksami akceptowalności.

Źródło: Na podstawie: [Cherny 2007].

4. Miary wykonania przepływu pieniężnego i indeks akceptowalności

Zapiszemy kilka miar wykonania przepływu pieniężnego. Prześledzimy własności celem ustalenia, które są indeksem akceptowalności.

Sharpe ratio – SR(X)

Pierwszą rozważaną miarą będzie Sharpe Ratio dla przepływu pieniężnego X zdefiniowana jako proporcja wartości oczekiwanej do odchylenia standardowego $\sigma(X)$:

$$SR(X) = \begin{cases} \dfrac{E(X)}{\sigma(X)}, E(X) > 0 \\ 0, E(X) \le 0 \end{cases}.$$

To jest miara quasi-wypukła, niezależna względem skali, niezmiennicza, zgodna, co do wartości oczekiwanych. Posiada własność Fatou. Wiadomo, że Sharpe Ratio nie jest miarą monotoniczną i dlatego nie jest indeksem akceptowalności. Sharpe Ratio nie spełnia warunku zgodności z SSD [Bernardo i Ledoit 2000]. Bernardo i Ledoit rozpatrywali zmienne losowe o dodatnich wartościach z nieskończoną wariancją, które dają dodatni przepływ finansowy z Sharpe Ratio wynoszącym zero. Zaproponowali Gain-Loss Ratio jako miarę ryzyka.

Gain-Loss ratio GLR(X)

Gain-Loss Ratio jest zdefiniowane jako stosunek wartości oczekiwanej do wartości oczekiwanej z ujemnych wartości (ang. *the negative tail*):

$$GLR(X) = \begin{cases} \dfrac{E(X)}{E(X^-)}, E(X) > 0 \\ 0, E(X) \le 0 \end{cases},$$

gdzie $X^- = \max\{-X, 0\}$. Ta miara jest monotoniczna, niezmiennicza względem przesunięcia i skali, zgodna z arbitrażem i względem wartości oczekiwanych. Spełnia również lemat Fatou oraz jest quasi-wypukła, zatem jest indeksem akceptowalności.

Dla sprawdzenia quasi-wypukłości załóżmy, że $GLR(X) \ge x$ oraz $\mathrm{GLR}(Y) \ge x$, gdzie $x > 0$. Wówczas mamy równoważnie, że $E[X] \ge xE[X^-]$ oraz $E[Y] \ge xE[Y^-]$. Z wypukłości funkcji x^-, otrzymujemy:

$$xE[(\lambda X + (1-\lambda)Y)^-] \le x(\lambda E[X^-] + (1-\lambda)E[Y^-]) \le E[\lambda X + (1-\lambda)Y],$$

zatem $GLR(\lambda X + (1-\lambda)Y) \ge x$.

Gain-Loss Ratio jest zgodna z SSD. Aby to uzasadnić, rozważmy X, Y, takie, że Y *SSD* X. Załóżmy, że $GLR(X) = x > 0$, wówczas $E[X] = xE[X^-]$. Funkcja x^- jest rosnąca i wypukła, dlatego wnioskujemy, że $E[Y^-] \le E[X^-]$, wówczas: $E[Y] \ge E[X] = xE[X^-] \ge xE[Y-]$ lub równoważnie $GLR(Y) \ge x$.

Współczynnik tempa – TC**(X)**

Współczynnik tempa (ang. *the tilt coefficient*) przepływu pieniężnego X może być postrzegany jako najwyższy poziom absolutnej awersji do ryzyka dla wykładniczej funkcji użyteczności taki, że przepływ pieniężny jest dalej atrakcyjny dla krańcowej użyteczności:

$$TC(X) = \sup\{\lambda \in R_+ : E[Xe^{-\lambda X}] \geq 0\},$$

gdzie sup Ø = 0. Możemy interpretować wartość oczekiwaną $E[Xe^{-\lambda X}]$ jako krańcową użyteczność ważoną wartością przepływu pieniężnego z wykładniczą funkcją użyteczności i współczynnikiem awersji do ryzyka λ. Jeżeli TC(X) jest dodatnie, wówczas wszystkie wartości poziomu awersji do ryzyka poniżej TC(X) akceptują wymianę (handel) względem brzegowego rozkładu (krańcowego kierunku) X.

TC jest monotoniczna, niezmiennicza i ma własność Fatou. Zgodna jest arbitrażowo i względem wartości oczekiwanych. Nie jest quasi-wypukła i niezmiennicza względem skali, nie jest indeksem akceptowalności.

Koherentny skorygowany ryzykiem zwrot z kapitału – RAROC(*X*)

Koherentny skorygowany ryzykiem zwrot z kapitału (ang. *coherent risk-adjusted return on capital*) jest zdefiniowany jako proporcja wartości oczekiwanej do ryzyka, które jest mierzone koherentną miarą ryzyka ρ:

$$RAROC(X) = \begin{cases} \dfrac{E(X)}{\rho(X)}, \; E(X) > 0 \\ 0, \; E(X) \leq 0 \end{cases}.$$

Wykorzystamy zapis RAROC(X) = +∞, jeżeli ρ(X) ≤ 0. W szczególności, własności są automatycznie spełnione, jeżeli ρ jest niezmiennicza [Kusuoka 2001].

Oczywiście RAROC spełnia wszystkie własności indeksu akceptowalności. Jest miarą niezmienniczą, wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest niezmiennicza. Dodatkowo RAROC spełnia zgodność względem wartości oczekiwanych. Nie jest arbitrażowo zgodna, co można zauważyć rozważając zmienną losową X taką, że $P(X < 0) > 0$ i $\rho(X) < 0$.

TVAR indeks akceptowalności AIT(X)

Podstawowa koherentna miara ryzyka jest miarą związaną z rozkładem (ang. *the tail value at risk*) i jest zdefiniowana jako:

$$TVAR_\lambda(X) = -\inf_{Q \in T_\lambda} E^Q[X],$$

gdzie λ jest parametrem z (0, 1] oraz T_λ jest zbiorem miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem *P*, takich że $dQ/dP \leq \lambda - 1$. Jeżeli *X* ma ciągłą dystrybuantę, wówczas [Föllmer i Schied 2004] powyższe zadanie może być zapisane jako:

$$TVAR_\lambda(X) = -E[X \mid X \leq q_\lambda(X)],$$

gdzie *TVAR* pojawia się jako ujemna wartość oczekiwana przepływu pieniężnego warunkowanego zdarzeniami o wartościach niższych niż kwanty rzędu λ. To w szczególności uzasadnia nazwę [Rockafellar i Uryasev 2002].

Ważną własnością *TVAR* jest fakt, że to nie jest pojedyncza miara ryzyka, ale raczej jednoparametryczna rodzina miar ryzyka malejąca względem λ.

Możemy zdefiniować dla *TVAR* indeks akceptowalności: $AIT(X) = \sup\{x \in R_+ : TVAR_{\frac{1}{1+x}}(X) \leq 0\}$.

WVAR indeks akceptowalności AIW(X)

Uogólnieniem TVAR jest ważone VAR definiowane jako mieszanka $TVAR_\lambda$ dla różnych poziomów ryzyka λ względem miary probabilistycznej μ na (0, 1]:

$$WVAR_\mu(X) = \int_{(0,1)} TVAR_\lambda(X)\mu(d\lambda).$$

Można sprawdzić, że jest to koherentna miara ryzyka.

Podsumowanie

Przełomową pracą w opisie ryzyka finansowego był artykuł opublikowany przez grupę naukowców Artznera et al. [1997,1999]. Autorzy sformułowali pytania: jakie własności powinna posiadać miara ryzyka dla różnych ryzyk, w skończenie wymiarowej przestrzeni probabilistycznej? Autorzy zaproponowali zbiór własności dla miar ryzyka tak, aby miara była koherentną miarą ryzyka: subaddytywność, translacja inwariantna, dodatnia homogeniczność i monotoniczność. W pracy zostało przedstawione rozwinięcie zaproponowanego aksjomatycznego podejścia do opisu i oceny ryzyka. Poziom efektywności inwestycji był mierzony poziomem akceptowalności przepływu pieniężnego, a arbitraż traktowany jako pozom akceptowalności o wartości wynoszącej nieskończoność. Uogólniając, poziom akceptowalności rośnie wraz ze zwiększaniem się zbioru miar, które oceniają pozytywnie stopę zwrotu przepływu pieniężnego.

Literatura

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1997): *Thinking Coherently*. „Risk", No. 10.

Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999): *Coherent measures of Risk*. „Math Financ", No. 9(3).

Bernardo A., Ledoit O. (2000): *Grain, Loss and Asset Pricing*. „Journal of Political Economy", No. 108.

Carr P., German M., Madan D. (2000): *Pricing and Hedging in Incomplete Markets*. „Journal of Financial Economics", No. 62.

Cherny A. (2007): P*ricing with Coherent Risk*. „Theory of Probability and Its Applications", No. 52.

Föllmer H., Shied A. (2002): *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*. „Finance Stoch", No. 6(4).

Kusuoka S. (2001): *On Law Invariant Coherent Risk Measure*. „Advances in Mathematical Economics", No. 3.

Kusuoka S., Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000): *Optimization of Conditional Value-at-risk*. „J. Risk", 2(3).

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002): *Conditional Value at Risk for General Loss Distributions*. „Journal of Banking and Finance", No. 26.

Trzpiot G. (2004a): *O wybranych własnościach miar ryzyka*. „Badania operacyjne i decyzje", nr 3-4.

Trzpiot G. (2006a): *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*. AE Katowice.

Trzpiot G. (2006b): *Pomiar ryzyka finansowego w warunkach niepewności*. „Badania Operacyjne i Decyzje", nr 2.

Trzpiot G. (2008a): *Wybrane modele oceny ryzyka, podejście nieklasyczne*. AE Katowice.

Trzpiot G. (2008b): *Zastosowanie uogólnionej miary odchylenia w analizie portfelowej*. W: *Modelowanie preferencji a ryzyko'07*. Red. T. Trzaskalik. AE Katowice.

RISK MEASURES VERSUS MARKET PERFORMANCE

Summary

This paper characterizes performance measures satisfying a set of proposed axioms. We develop four new measures consistent with the axioms and show that they improve on the economic properties of the Sharpe Ratio and the Gain-Loss Ratio. In our treatment, the performance measures, or the indexes of acceptability, are linked to positive expectations resulting from a stressed sampling of the cash-flow distribution.