

Monika Miśkiewicz-Nawrocka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

WPŁYW REDUKCJI SZUMU LOSOWEGO METODĄ NAJBLIŻSZYCH SĄSIADÓW NA STABILNOŚĆ NAJWIĘKSZEGO WYKŁADNIKA LAPUNOWA W EKONOMICZNYCH SZEREGACH CZASOWYCH

Wprowadzenie

Największy wykładnik Lapunowa, obok wymiaru korelacyjnego, jest jednym z głównych narzędzi służących do identyfikacji chaosu w układach dynamicznych. Niektórzy autorzy uznają dodatnią wartość największego wykładnika Lapunowa za warunek konieczny i wystarczający obecności chaosu w układzie (Frank, Stengos, 1988, s. 103-133). Wykładniki Lapunowa dostarczają informacji na temat niestabilności trajektorii układu, ponieważ mierzą średnie tempo wykładniczej rozbieżności i zbieżności trajektorii dwóch początkowo bliskich sobie punktów przestrzeni stanów układu w kolejnych iteracjach, tzw. wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych.

Z twierdzenia Oseledeca (1968) oraz z twierdzeń podanych w pracy Eckmann, Ruelle (1985) wynika, że wykładniki Lapunowa istnieją dla prawie wszystkich punktów należących do przestrzeni stanów układu dynamicznego oraz że są stałe dla prawie wszystkich punktów należących do basenu przyciągania atraktora rozważanego układu (Keliher, 2002, s. 7; Zawadzki, 1996, s. 161). Jednakże wspomniane wyżej twierdzenia dotyczą tylko układów deterministycznych. Dla szeregu czasowego generowanego przez deterministyczny układ chaotyczny twierdzenie Oseledeca gwarantuje stabilność największego wykładnika Lapunowa niezależnie od liczby obserwacji szeregu. Natomiast dla szeregu czasowego generowanego przez układ stochastyczny, wzrost liczby obserwacji w szeregu będzie powodował zmienność wartości największego wykładnika Lapunowa.

W opracowaniu zbadano wpływ liczby obserwacji w szeregach czasowych na wartości największego wykładnika Lapunowa. Dodatkowo stabilność największego wykładnika Lapunowa zbadano w szeregach poddanych procedurze redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów. Badania empiryczne przeprowadzono z wykorzystaniem rzeczywistych danych natury ekonomicznej. Do przeprowadzenia niezbędnych obliczeń wykorzystano program napisany przez autora w języku Delhi oraz arkusz kalkulacyjny Excel.

1. Największy wykładnik Lapunowa

Dla układu dynamicznego (X, f) , w którym $X \subset \mathbf{R}^m$, $f: X \rightarrow X$ ($m \geq 1$), wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice (Zawadzki, 1996, s. 161):

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mu_i(n, x_0)|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

gdzie:

$\mu_i(n, x_0)$ – wartości własne macierzy $Df^n(x_0)$,

$Df^n(x_0)$ – macierz Jacobiego odwzorowania f^n równa

$$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1) Df(x_0),$$

f^n – n -krotne złożenie funkcji f ,

$$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right], \quad f_i - \text{składowe odwzorowania } f,$$

$i, j = 1, 2, \dots, m$.

Zgodnie z twierdzeniem Oseledeca, dla m -wymiarowego układu dynamicznego (\mathbf{R}^m, f) istnieje m wykładników Lapunowa spełniających warunek $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, dla $i = 1, \dots, m-1$. Największy z nich $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ mierzy średnie tempo zmian odległości początkowo bliskich sobie trajektorii, czyli tzw. wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych.

W praktyce, dla rzeczywistych szeregów czasowych, gdy nie jest znana postać funkcji generującej f , wartość największego wykładnika Lapunowa szacuje się na podstawie zależności:

$$\Delta_n = \Delta_0 \cdot e^{n\lambda_{\max}}, \quad (2)$$

gdzie:

Δ_0 – początkowa odległość pomiędzy dwoma początkowo bliskimi (w sensie metryki euklidesowej) punktami zrekonstruowanej przestrzeni stanów,

Δ_n – odległość pomiędzy tymi punktami po n iteracjach,

λ_{\max} – największy wykładnik Lapunowa.

Zaproponowany niezależnie przez Rosensteina i in. (1993, s. 117-134) oraz Kantza (1994, s. 77) algorytm szacowania wartości największego wykładnika Lapunowa jest następujący (Kantz, Schreiber, 2005, s. 69-70):

1. W zrekonstruowanej przestrzeni stanów¹ wyznaczamy najbliższych (w sensie metryki euklidesowej) sąsiadów $x_{i_j}^d$ punktu x_i^d , znajdujących się od niego w odległości mniejszej niż ustalona wartość ε oraz spełniających warunek $|i - i_j| > t$, gdzie t jest liczbą naturalną².
2. Obliczamy średnie odległości wszystkich najbliższych sąsiadów od kolejnych punktów trajektorii jako funkcję upływu czasu. Uśrednioną wartość logarytmu odległości między trajektoriami można wyrazić wzorem:

$$d_{\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{n(O_\varepsilon)} \sum_{x_{i_j}^d \in O_\varepsilon(x_i^d)} |x_{i+\Delta t} - x_{i_j+\Delta t}| \right), \quad (3)$$

gdzie:

$O_\varepsilon(x_i)$ – otoczenie o promieniu ε wektora początkowego x_i^d ,

$n(O_\varepsilon)$ – liczba wektorów w otoczeniu O_ε (liczba najbliższych sąsiadów).

3. Największy wykładnik Lapunowa szacuje się jako współczynnik regresji równania:

$$\ln(d_{\Delta t}) = \ln(d_0) + \lambda \Delta t \quad (4)$$

na podstawie wykresu zależności $d_{\Delta t}$ od t .

Dla szeregów chaotycznych nachylenie prostej regresji wykresu ilustrującego zależność $\ln \Delta_n$ od numeru iteracji n w początkowej fazie powinno być dodatnie.

λ_{\max} szacuje się na podstawie zbiorów punktów należących do tego obszaru. Zatem oszacowana wartość λ_{\max} zależy nie tylko od wyboru metryki, liczby najbliższych sąsiadów, wymiaru zanurzenia, ale także od ustalonej wartości n_{\max} , dla której współczynnik regresji jest dodatni (Orzeszko, 2007, s. 131).

¹ Wymiar zanurzenia można oszacować metodą najbliższych fałszywych sąsiadów. Zob. Kennel, Brown, Abarbanel (1992, A. 45); Cao (2001).

² Powyższy warunek stosuje się, aby zwiększyć prawdopodobieństwo, że najbliższy sąsiad nie będzie należał do trajektorii wektora x_i^d . W praktyce zazwyczaj przyjmuje się $t = 10$.

Dla układów stochastycznych powyższy algorytm jest w stanie oszacować tylko lokalny największy wykładnik Lapunowa, który mierzy lokalną stabilność układu i może być zależny od długości szeregu czasowego (ilości obserwacji) i warunków początkowych. Z badań przeprowadzonych przez Fernández-Rodríguez i in. (2004) wynika, że istnienie dodatniej wartości największego wykładnika Lapunowa nie implikuje obecności chaosu w badanym szeregu czasowym. Autorzy pokazali interesującą zależność pomiędzy chaotycznymi a stochastycznymi szeregami czasowymi. Dla szeregów czasowych generowanych przez układy deterministyczne największy wykładnik Lapunowa stabilizuje się, a w niektórych przypadkach nieznacznie wzrasta, wraz ze wzrostem długości szeregu czasowego. Natomiast dla szeregów czasowych generowanych przez układy stochastyczne wartość największego wykładnika Lapunowa zawsze wzrasta wraz ze zwiększającą się liczbą obserwacji w szeregu.

2. Redukcja szumu losowego – metoda najbliższych sąsiadów

Rzeczywisty szereg czasowy opisany za pomocą zależności (Nowiński, 2007, s. 24):

$$x_{t+1} = f(x_t + \eta_t), \quad (5)$$

$$s_{t+1} = h(x_{t+1}) + \xi_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

można zapisać w skrócie w postaci addytywnej jako:

$$s_t = y_t + \varepsilon_t, \quad (7)$$

gdzie:

$f: X \rightarrow X$ – odwzorowanie opisujące rzeczywistą dynamikę układu,
 $X \subset \mathbf{R}^m$, X – przestrzeń stanów, $x_t, x_{t+1} \in X$,

$h: X \rightarrow \mathbf{R}$ – funkcja pomiarowa generująca szereg czasowy obserwacji s_t
układu dynamicznego,

s_{t+1} – obserwacja szeregu czasowego w chwili $t + 1$,

η_t – szum dynamiczny wewnątrz układu,

ξ_t – szum pomiarowy,

(y_t) – część deterministyczna szeregu czasowego,

(ε_t) – część stochastyczna szeregu.

Redukcja szumu losowego pozwala na podstawie analizy szeregu obserwacji (s_t) poznać własności szeregu (y_t) . Metoda najbliższych sąsiadów (NS) wywodzi się z teorii nieliniowych układów dynamicznych i została stworzona do prognozowania przyszłych wartości szeregów czasowych (Lorenz, 1969, s. 636-646), ale może być również stosowana do redukcji szumu losowego w szeregach czasowych. W metodzie NS redukcji szumu losowego część deterministyczną (y_t) szeregu czasowego buduje się na podstawie najbliższych sąsiadów (w sensie metryki euklidesowej d -wymiarowej) wektorów s_t^d zrekonstruowanej przestrzeni stanów układu dynamicznego opisanego szeregiem (s_t) .

Algorytm wyznaczania wartości y_n , $1 < n < N$ szeregu czasowego (s_1, s_2, \dots, s_N) metodą najbliższych sąsiadów jest następujący (Kantz, Schreiber, 2004):

1. Dla oszacowanego wymiaru zanurzenia d oraz opóźnienia czasowego $\tau = 1$ tworzymy wektor opóźnień w postaci:

$$s_t^d = (s_t, s_{t+1}, \dots, s_{t+(d-1)}), \quad (8)$$

tak aby filtrowana obserwacja s_n była jedną ze środkowych współrzędnych wektora s_t^d .

2. Wyznaczamy k najbliższych sąsiadów (w sensie odległości euklidesowej) wektora s_t^d w postaci:

$$s_{l(1)}^d, s_{l(2)}^d, \dots, s_{l(k)}^d.$$

Często spotykanym w literaturze postulatem jest, aby liczba najbliższych sąsiadów spełniała warunek $2(d+1) \leq k < N - (d-1)\tau$ (Casdagli, 1989, s. 340; Cao, Sofio, 1999, s. 425).

3. Na podstawie wyznaczonych sąsiadów obliczamy wartość y_n jako średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych k najbliższych sąsiadów:

$$y_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_{l(i)}. \quad (9)$$

3. Badania empiryczne

Przedmiotem badania były logarytmy dziennych stóp zwrotu: kursu euro (EUR) wobec złotego, cen Żywca (ZWC) oraz indeksu giełdowego WIG20 w postaci:

$$x_t = \ln s_t - \ln s_{t-1}, \quad (10)$$

gdzie s_t – obserwacja szeregu, notowane w okresie 7.01.1992-28.12.2012. W celu zbadania stabilności największego wykładnika Lapunowa w układach dynamicznych opisanych za pomocą wyżej wymienionych szeregów czasowych pod uwagę wzięto różne długości badanych szeregów. Szczegółowe informacje dotyczące zakresu szeregów czasowych zawiera tabela 1. W ten sposób dla każdego z szeregów EUR, ZWC i WIG20 zbudowano po 21 szeregów o mniejszej liczbie obserwacji, ale tym samym warunkiem początkowym, tj. pierwszej obserwacji. Symbolem *NazwaSzeregu_BS_k* oznaczono szeregi poddane dodatkowo procedurze redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów.

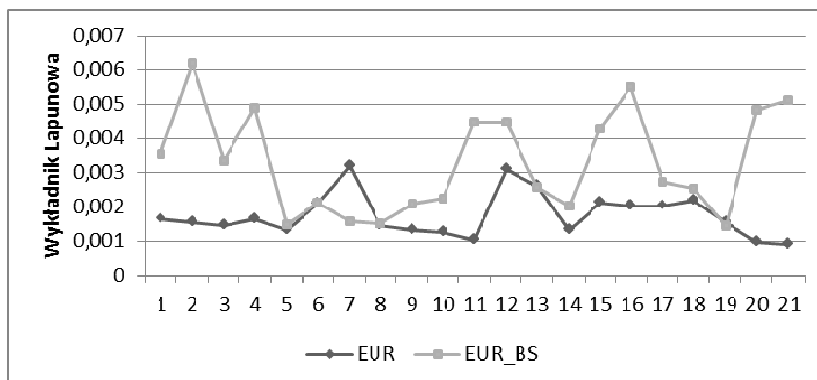
Tabela 1

Charakterystyka badanych szeregów czasowych

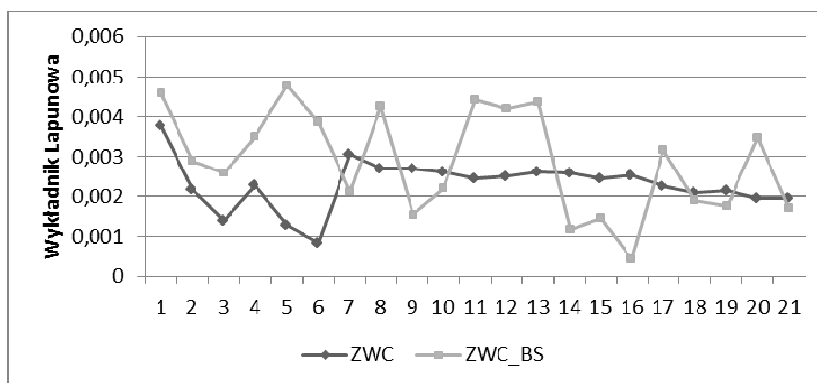
Nazwa szeregu	Zakres czasowy	Nazwa szeregu	Zakres czasowy	Nazwa szeregu	Zakres czasowy
EUR_1 ZWC_1 WIG20_1	7.01.1992- 28.12.2007	EUR_8 ZWC_8 WIG20_8	7.01.1992- 30.09.2009	EUR_15 ZWC_15 WIG20_15	7.01.1992- 30.06.2011
EUR_2 ZWC_2 WIG20_2	7.01.1992- 30.06.2008	EUR_9 ZWC_9 WIG20_9	7.01.1992- 30.12.2009	EUR_16 ZWC_16 WIG20_16	7.01.1992- 30.09.2011
EUR_3 ZWC_3 WIG20_3	7.01.1992- 30.06.2008	EUR_10 ZWC_10 WIG20_10	7.01.1992- 30.03.2010	EUR_17 ZWC_17 WIG20_17	7.01.1992- 30.12.2011
EUR_4 ZWC_4 WIG20_4	7.01.1992- 30.09.2008	EUR_11 ZWC_11 WIG20_11	7.01.1992- 30.06.2010	EUR_18 ZWC_18 WIG20_18	7.01.1992- 30.03.2012
EUR_5 ZWC_5 WIG20_5	7.01.1992- 30.12.2008	EUR_12 ZWC_12 WIG20_12	7.01.1992- 30.09.2010	EUR_19 ZWC_19 WIG20_19	7.01.1992- 30.06.2012
EUR_6 ZWC_6 WIG20_6	7.01.1992- 30.03.2009	EUR_13 ZWC_13 WIG20_13	7.01.1992- 30.12.2010	EUR_20 ZWC_20 WIG20_20	7.01.1992- 30.9.2012
EUR_7 ZWC_7 WIG20_7	7.01.1992- 30.06.2009	EUR_14 ZWC_14 WIG20_14	7.01.1992- 30.03.2011	EUR_21 ZWC_21 WIG20_21	7.01.1992- 28.12.2012

W tabelach 2-4 zamieszczonych w załączniku przedstawiono szczegółowe wyniki szacowania największego wykładnika Lapunowa dla badanych szeregów czasowych. Znakiem „-” oznaczono sytuację, w której oszacowanego współczynnika regresji nie powinno się traktować jako największego wykładnika Lapunowa.

Na poniższych wykresach (rysunki 1-3) zilustrowano zmiany wartości największego wykładnika Lapunowa wobec zwiększającej się liczby obserwacji w badanych szeregach czasowych EUR, ZWC i WIG 20.

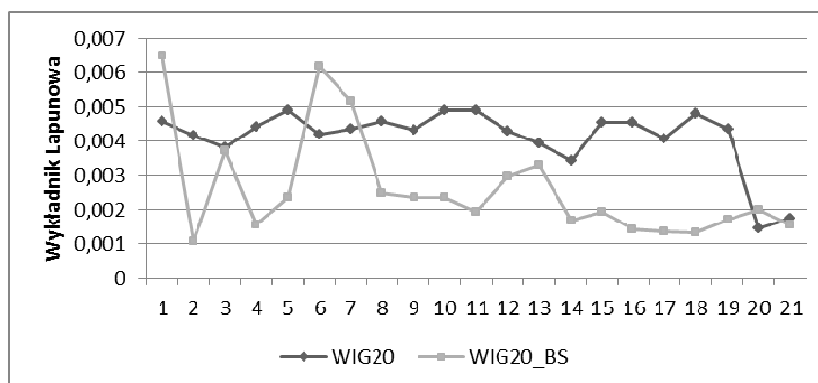


Rys. 1. Stabilność największego wykładnika Lapunowa dla szeregów EUR i EUR_BS



Rys. 2. Stabilność największego wykładnika Lapunowa dla szeregów ZWC i ZWC_BS

Obliczone wartości największego wykładnika Lapunowa λ_{\max} dla analizowanych szeregów czasowych są dodatnie, jednak są one niewielkie. Może to świadczyć o obecności chaosu w badanych szeregach, lecz jego poziom jest nieznaczny. Podobne wyniki otrzymano dla szeregów przefiltrowanych metodą najbliższych sąsiadów NS. Dla szeregów EUR oraz ZWC szeregi przefiltrowane metodą najbliższych sąsiadów wykazały cechy chaotyczne w większym stopniu niż szeregi nieprzefiltrowane. Po przefiltrowaniu oszacowane wykładniki Lapunowa dla tych szeregów są większe, jednak ich wartości nadal są nieznacznie większe od zera. Dla szeregu WIG_20 redukcja szumu losowego metodą NS w większości nie spowodowała zwiększenia wartości największego wykładnika Lapunowa.



Rys. 3. Stabilność największego wykładnika Lapunowa dla szeregów WIG20 i WIG20_BS

Na podstawie danych zamieszczonych na rysunku 2 można zauważyć stabilizowanie się (zbieżność) wartości największego wykładnika Lapunowa wraz ze wzrostem liczby obserwacji w badanym szeregu czasowym. Niestety po zastosowaniu procedury redukcji szumu losowego stabilność ta została wyraźnie zaburzona. Dla szeregów EUR i WIG20 wartości największego wykładnika Lapunowa charakteryzują się już większą zmiennością spowodowaną zwiększeniem liczby obserwacji szeregu. Jedynie dla szeregu WIG20_BS można się spodziewać stabilizacji wartości największego wykładnika Lapunowa.

Podsumowanie

W opracowaniu zbadano wpływ redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów na wartości oraz stabilność największego wykładnika Lapunowa w ekonomicznych szeregach czasowych.

Obliczone wartości największego wykładnika Lapunowa λ_{\max} dla analizowanych szeregów czasowych są dodatnie, nieznacznie większe od zera. Mogłoby to świadczyć o obecności chaosu w badanych szeregach, jednak zwiększenie liczby obserwacji w szeregach nie powoduje stabilizacji wartości największego wykładnika Lapunowa. Wyjątkiem wydaje się być szereg ZWC, gdzie zwiększając długość szeregu obserwacji, można zaobserwować, że wykładniki Lapunowa zaczynają się stabilizować i są zbieżne do pewnej wartości. Przefiltrowanie badanych szeregów metodą NS spowodowało zwiększenie zmienności największych wykładników Lapunowa.

Podsumowując otrzymane rezultaty, należy stwierdzić, że nie wskazują one na istnienie wykładniczej wrażliwości na zmianę warunków początkowych w badanych szeregach finansowych. Nie można zatem wnioskować o ich chaotycznym charakterze.

Literatura

- Cao L. (2001): *Method of False Nearest Neighbors*. W: *Modeling and Forecasting Financial Data*. Eds. A.S. Soofi, L. Cao. Kluwer, Boston.
- Cao L., Soofi A. (1999): *Nonlinear Deterministic Forecasting of Daily Dollar Exchange Rates*. „International Journal of Forecasting”, Vol. 15, s. 421-430.
- Casdagli M. (1989): *Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series*. „Physica D”, Vol. 53, s. 335-356.
- Eckmann J.P., Ruelle D. (1985): *Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors*. „Reviews of Modern Physics”, Vol. 57, No. 3.
- Fernández-Rodríguez F., Sosvilla-Rivero S., Andrada-Félix J. (2004): *A New Test for Chaotic Dynamics Using Lyapunov Exponents*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (maszynopis).
- Frank M., Stengos T. (1988): *Chaotic Dynamics in Economics Time Series*. „Journal of Economic Surveys”, 2, s. 103-133.
- Kantz H. (1994): *A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series*. „Physical Letters A”, Vol. 185, s. 77.
- Kantz H., Schreiber T. (2004): *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press (second edition).
- Kelliher J. (2002): *Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem*. <http://math.ucr.edu/~kelliher/Geometry/Lecturenotes.pdf> (maszynopis).
- Kelliher J. (2003): *Lyapunov Exponents and Oseledec's Multiplicative Theorem*. Working Dynamical Systems Seminar, UT Austin (maszynopis).
- Kennel M.B., Brown P., Abarbanel H.D.I. (1992): *Detecting Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction*. „Physical Review”, A. 45.
- Nowiński M. (2007): *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.
- Orzeszko W. (2005): *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*. Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Orzeszko W. (2007): *Redukcja szumu losowego w chaotycznych szeregach czasowych i jej zastosowanie do analizy procesów ekonomicznych*. W: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*. Red. A. Welfe. Siódme Warsztaty Doktorskie z Zakresu Ekonometrii i Statystyki, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa.
- Oseledec V.I. (1968): *A Multiplicative Ergodic Theorem. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical System*. „Trans. Moscow Math. Soc.”, 19, s. 197-231.
- Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. (1993): *A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets*. „Physica D”, Vol. 65, s. 117-134.
- Zawadzki H. (1996): *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.

Załącznik

Tabela 2

Szacowanie największego wykładnika Lapunowa dla szeregów EUR i EUR_BS

Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}	Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}
EUR_1	$y = 0,0016x - 5,1045$ $R^2 = 0,5381$	0,001642	EUR_BS_1	$y = 0,0035x - 5,9731$ $R^2 = 0,5223$	0,003525
EUR_2	$y = 0,0015x - 5,1119$ $R^2 = 0,5289$	0,001549	EUR_BS_2	$y = 0,0062x - 6,0019$ $R^2 = 0,444$	0,006173
EUR_3	$y = 0,0014x - 5,1198$ $R^2 = 0,5032$	0,001429	EUR_BS_3	$y = 0,0034x - 5,9919$ $R^2 = 0,4142$	0,003335
EUR_4	$y = 0,0016x - 5,1563$ $R^2 = 0,4658$	0,001644	EUR_BS_4	$y = 0,0049x - 6,1615$ $R^2 = 0,5792$	0,004891
EUR_5	$y = 0,0013x - 5,1455$ $R^2 = 0,2835$	0,001304	EUR_BS_5	$y = 0,0015x - 6,0206$ $R^2 = 0,3932$	0,001464
EUR_6	$y = 0,0021x - 5,1478$ $R^2 = 0,5403$	0,002028	EUR_BS_6	$y = 0,0021x - 5,9858$ $R^2 = 0,638$	0,002133
EUR_7	$y = 0,0032x - 5,1298$ $R^2 = 0,7008$	0,003175	EUR_BS_7	$y = 0,0016x - 6,0037$ $R^2 = 0,2982$	0,001564
EUR_8	$y = 0,0014x - 5,2115$ $R^2 = 0,3894$	0,001441	EUR_BS_8	$y = 0,0015x - 6,247$ $R^2 = 0,383$	0,001501
EUR_9	$y = 0,0013x - 5,2188$ $R^2 = 0,3306$	0,001321	EUR_BS_9	$y = 0,0021x - 6,2881$ $R^2 = 0,6549$	0,002070
EUR_10	$y = 0,0013x - 5,2278$ $R^2 = 0,312$	0,001252	EUR_BS_10	$y = 0,0022x - 6,2728$ $R^2 = 0,5831$	0,002234
EUR_11	$y = 0,001x - 5,2356$ $R^2 = 0,265$	0,001031	EUR_BS_11	$y = 0,0045x - 6,2079$ $R^2 = 0,4739$	0,004484
EUR_12	$y = 0,0031x - 5,2261$ $R^2 = 0,7613$	0,003095	EUR_BS_12	$y = 0,0045x - 6,2079$ $R^2 = 0,4739$	0,004484
EUR_13	$y = 0,0026x - 5,1915$ $R^2 = 0,6702$	0,002613	EUR_BS_13	$y = 0,0026x - 6,1955$ $R^2 = 0,2168$	0,002562
EUR_14	$y = 0,0013x - 5,1184$ $R^2 = 0,4681$	0,001301	EUR_BS_14	$y = 0,002x - 6,0619$ $R^2 = 0,4403$	0,002033
EUR_15	$y = 0,0021x - 5,1528$ $R^2 = 0,6176$	0,002112	EUR_BS_15	$y = 0,0043x - 6,1844$ $R^2 = 0,489$	0,004268
EUR_16	$y = 0,002x - 5,1478$ $R^2 = 0,6018$	0,002023	EUR_BS_16	$y = 0,0055x - 6,1806$ $R^2 = 0,6984$	0,005489
EUR_17	$y = 0,002x - 5,1437$ $R^2 = 0,5766$	0,002010	EUR_BS_17	$y = 0,0027x - 6,1952$ $R^2 = 0,6835$	0,002739
EUR_18	$y = 0,0022x - 5,144$ $R^2 = 0,6303$	0,002198	EUR_BS_18	$y = 0,0025x - 6,1741$ $R^2 = 0,2903$	0,002526
EUR_19	$y = 0,0015x - 5,1047$ $R^2 = 0,5342$	0,001545	EUR_BS_19	$y = 0,0014x - 6,0295$ $R^2 = 0,4747$	0,001433
EUR_20	$y = 0,001x - 5,0873$ $R^2 = 0,4206$	0,00096	EUR_BS_20	$y = 0,0048x - 6,1237$ $R^2 = 0,6758$	0,004828
EUR_21	$y = 0,0009x - 5,0837$ $R^2 = 0,4349$	0,000895	EUR_BS_21	$y = 0,0051x - 6,1172$ $R^2 = 0,662$	0,005120

Tabela 3

Szacowanie największego wykładnika Lapunowa dla szeregów ZWC i ZWC_BS

Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}	Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}
ZWC_1	$y = 0,0038x - 3,8486$ $R^2 = 0,6098$	0,003786	ZWC_BS_1	$y = 0,0046x - 4,9127$ $R^2 = 0,3775$	0,004569
ZWC_2	$y = 0,0022x - 3,8401$ $R^2 = 0,4337$	0,002186	ZWC_BS_2	$y = 0,0029x - 4,9095$ $R^2 = 0,3625$	0,002899
ZWC_3	$y = 0,0029x - 3,8378$ $R^2 = 0,4104$	0,001387	ZWC_BS_3	$y = 0,0006x - 4,9133$ $R^2 = 0,0905$	-
ZWC_4	$y = 0,0023x - 3,8377$ $R^2 = 0,3463$	0,002284	ZWC_BS_4	$y = 0,0035x - 4,9205$ $R^2 = 0,6247$	0,003488
ZWC_5	$y = 0,0013x - 3,8685$ $R^2 = 0,6514$	0,001290	ZWC_BS_5	$y = 0,002x - 5,0888$ $R^2 = 0,2397$	0,00196
ZWC_6	$y = 0,00009x - 3,862$ $R^2 = 0,6177$	0,000854	ZWC_BS_6	$y = 0,0039x - 5,0759$ $R^2 = 0,2972$	0,003868
ZWC_7	$y = 0,0031x - 3,8523$ $R^2 = 0,7383$	0,003061	ZWC_BS_7	$y = 0,0021x - 5,1331$ $R^2 = 0,0628$	-
ZWC_8	$y = 0,0027x - 3,8509$ $R^2 = 0,6924$	0,002697	ZWC_BS_8	$y = 0,0015x - 5,0648$ $R^2 = 0,2485$	-
ZWC_9	$y = 0,0027x - 3,8557$ $R^2 = 0,7299$	0,002701	ZWC_BS_9	$y = 0,0015x - 5,0609$ $R^2 = 0,2796$	0,001526
ZWC_10	$y = 0,0026x - 3,8625$ $R^2 = 0,722$	0,002604	ZWC_BS_10	$y = 0,0022x - 5,0505$ $R^2 = 0,3554$	0,002197
ZWC_11	$y = 0,0024x - 3,8684$ $R^2 = 0,7176$	0,00244	ZWC_BS_11	$y = 0,0017x - 5,0835$ $R^2 = 0,3357$	0,001707
ZWC_12	$y = 0,0025x - 3,8737$ $R^2 = 0,6578$	0,002519	ZWC_BS_12	$y = 0,0022x - 5,0835$ $R^2 = 0,4266$	0,002217
ZWC_13	$y = 0,0026x - 3,8813$ $R^2 = 0,6807$	0,002606	ZWC_BS_13	$y = 0,0021x - 5,0791$ $R^2 = 0,4146$	0,00207
ZWC_14	$y = 0,0026x - 3,8842$ $R^2 = 0,6242$	0,002598	ZWC_BS_14	$y = 0,0021x - 5,0368$ $R^2 = 0,1754$	-
ZWC_15	$y = 0,0025x - 3,8875$ $R^2 = 0,6105$	0,002451	ZWC_BS_15	$y = 0,0014x - 5,0465$ $R^2 = 0,1797$	-
ZWC_16	$y = 0,0025x - 3,8942$ $R^2 = 0,6514$	0,002542	ZWC_BS_16	$y = 0,0004x - 5,0614$ $R^2 = 0,1332$	-
ZWC_17	$y = 0,0022x - 3,8948$ $R^2 = 0,5703$	0,002245	ZWC_BS_17	$y = 0,0017x - 5,0452$ $R^2 = 0,2723$	0,001726
ZWC_18	$y = 0,0021x - 3,899$ $R^2 = 0,5411$	0,002105	ZWC_BS_18	$y = 0,0019x - 5,0453$ $R^2 = 0,3271$	0,001891
ZWC_19	$y = 0,0021x - 3,904$ $R^2 = 0,5617$	0,002135	ZWC_BS_19	$y = 0,0018x - 5,0498$ $R^2 = 0,2526$	0,001767
ZWC_20	$y = 0,002x - 3,9092$ $R^2 = 0,5436$	0,001958	ZWC_BS_20	$y = 0,0035x - 5,0414$ $R^2 = 0,3986$	0,003465
ZWC_21	$y = 0,002x - 3,9158$ $R^2 = 0,5572$	0,00196	ZWC_BS_21	$y = 0,0017x - 5,0503$ $R^2 = 0,3365$	0,001706

Tabela 4

Szacowanie największego wykładnika Lapunowa dla szeregów WIG20 i WIG20_BS

Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}	Szereg	Równanie regresji	λ_{\max}
WIG20_1	$y = 0,0046x - 3,9878$ $R^2 = 0,5622$	0,004580	WIG20_BS_1	$y = 0,0065x - 4,8951$ $R^2 = 0,6943$	0,006477
WIG20_2	$y = 0,0041x - 3,9796$ $R^2 = 0,5127$	0,004138	WIG20_BS_2	$y = 0,001x - 4,8654$ $R^2 = 0,1284$	-
WIG20_3	$y = 0,0038x - 3,9831$ $R^2 = 0,5087$	0,003810	WIG20_BS_3	$y = 0,0037x - 4,8737$ $R^2 = 0,5367$	0,003699
WIG20_4	$y = 0,0044x - 3,9835$ $R^2 = 0,4406$	0,004418	WIG20_BS_4	$y = 0,0015x - 4,8663$ $R^2 = 0,0955$	-
WIG20_5	$y = 0,0049x - 3,9891$ $R^2 = 0,4598$	0,004887	WIG20_BS_5	$y = 0,0023x - 4,888$ $R^2 = 0,3235$	0,002349
WIG20_6	$y = 0,0042x - 3,9804$ $R^2 = 0,3597$	0,004184	WIG20_BS_6	$y = 0,0062x - 4,9027$ $R^2 = 0,5199$	0,006153
WIG20_7	$y = 0,0044x - 3,9856$ $R^2 = 0,3745$	0,004351	WIG20_BS_7	$y = 0,0051x - 4,8892$ $R^2 = 0,5242$	0,005137
WIG20_8	$y = 0,0046x - 3,9844$ $R^2 = 0,4193$	0,004563	WIG20_BS_8	$y = 0,0025x - 4,8124$ $R^2 = 0,6658$	0,00247
WIG20_9	$y = 0,0043x - 3,9665$ $R^2 = 0,3916$	0,004298	WIG20_BS_9	$y = 0,0023x - 4,8057$ $R^2 = 0,777$	0,002343
WIG20_10	$y = 0,0049x - 3,962$ $R^2 = 0,4958$	0,004899	WIG20_BS_10	$y = 0,0023x - 4,8057$ $R^2 = 0,777$	0,002343
WIG20_11	$y = 0,0049x - 3,9729$ $R^2 = 0,5036$	0,004899	WIG20_BS_11	$y = 0,0019x - 4,7958$ $R^2 = 0,6073$	0,001912
WIG20_12	$y = 0,0043x - 3,9547$ $R^2 = 0,3966$	0,004263	WIG20_BS_12	$y = 0,0029x - 4,8053$ $R^2 = 0,5429$	0,002941
WIG20_13	$y = 0,0039x - 3,9536$ $R^2 = 0,3966$	0,003928	WIG20_BS_13	$y = 0,0033x - 4,8439$ $R^2 = 0,2048$	-
WIG20_14	$y = 0,0034x - 3,9562$ $R^2 = 0,3332$	0,003393	WIG20_BS_14	$y = 0,0017x - 4,8147$ $R^2 = 0,6529$	0,001654
WIG20_15	$y = 0,0045x - 3,9645$ $R^2 = 0,5878$	0,004541	WIG20_BS_15	$y = 0,0019x - 4,8334$ $R^2 = 0,6206$	0,001914
WIG20_16	$y = 0,0045x - 3,9645$ $R^2 = 0,5878$	0,004541	WIG20_BS_16	$y = 0,0014x - 4,8403$ $R^2 = 0,6133$	0,001395
WIG20_17	$y = 0,0041x - 3,9714$ $R^2 = 0,5517$	0,004068	WIG20_BS_17	$y = 0,0014x - 4,8395$ $R^2 = 0,594$	0,001357
WIG20_18	$y = 0,0048x - 3,9838$ $R^2 = 0,6445$	0,004788	WIG20_BS_18	$y = 0,0013x - 4,8394$ $R^2 = 0,6551$	0,001325
WIG20_19	$y = 0,0044x - 3,9915$ $R^2 = 0,6291$	0,004356	WIG20_BS_19	$y = 0,0017x - 4,842$ $R^2 = 0,516$	0,00169
WIG20_20	$y = 0,0014x - 3,9753$ $R^2 = 0,2393$	0,001431	WIG20_BS_20	$y = 0,002x - 4,8455$ $R^2 = 0,4866$	0,00198
WIG20_21	$y = 0,0017x - 3,9871$ $R^2 = 0,337$	0,001726	WIG20_BS_21	$y = 0,0015x - 4,8469$ $R^2 = 0,6742$	0,001543

**THE EFFECT OF RANDOM NOISE BY THE NEAREST NEIGHBORS
METHOD ON THE STABILITY OF THE LARGEST LYAPUNOV
EXPONENT IN ECONOMIC TIME SERIES**

Summary

The Oseledec theorem (1968) and the theorems given in the paper Eckmann, Ruelle (1985) show the Lyapunov exponents exist for almost all the points in the state space of a dynamical system, and they are constant for almost all points in the basin of attraction of the attractor of dynamical system. However, the above-mentioned theorem applies only to deterministic systems. The Oseledec theorem provides the stability of the largest Lyapunov exponent regardless of the number of observations for the time series generated by deterministic chaotic system. While for the time series generated by a stochastic system, increase the number of observations in a series will cause change in the value of the largest Lyapunov exponent.

In this paper researched the effect of the number of observations of the time series on the value of largest Lyapunov exponent. In addition, the stability of the largest Lyapunov exponent was examined in the time series after random noise reduction procedure.