

Justyna Majewska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

WPŁYW WARTOŚCI EKSTREMALNYCH NA ZMIENNOŚĆ STOCHASTYCZNĄ

Wprowadzenie

Idea modelu zmienności stochastycznej (ang. *stochastic volatility*, SV) powstała na podstawie modelu Blacka-Scholesa, w którym założenie o niezależności i jednakowym rozkładzie stóp zwrotu jest nierealistyczne. W modelach zmienności stochastycznej zmienność stóp zwrotu jest reprezentowana przez proces stochastyczny o pewnej ustalonej *a priori* dynamice.

Podstawowe modele SV stanowią konkurencję dla modeli GARCH, ponieważ uwzględniają dodatkowy składnik losowy, w efekcie czego zmienność nie jest określona w sposób deterministyczny. Zgodnie z prowadzonymi badaniami modele SV uwzględniają podwyższoną kurtozę, efekt autokorelacji niższych rzędów oraz w mniejszym stopniu zależą od zakładanego rozkładu stóp zwrotu.

Klasa modeli SV jest bogata, a ich konstrukcja i wyrafinowane metody estymacji parametrów w połączeniu z rozwojem możliwości obliczeniowych powodują, iż są coraz częściej wykorzystywane w badaniach ekonomicznych. W Polsce analizy porównawcze modeli SV z innymi modelami zmienności można znaleźć w pracach Doman i Domana [2009], Fiszdera [2009], Pajor [2010]. Tylko nieliczne prace zagraniczne poruszają kwestię negatywnego wpływu wartości odstających i ekstremalnych na estymację parametru zmienności. O ile fakt braku odporności odchylenia standardowego jest oczywisty, o tyle badania empiryczne wskazują, iż nawet szeregi reszt rozbudowanych modeli klasy GARCH (bardzo często zajmujące w rankingach trafności prognozowania zmienności wysokie miejsca i dobrze opisujące większość empirycznych własności finansowych szeregów czasowych) nadal wykazują grube ogony w obecności obserwacji odstających. Ignorowanie obserwacji ekstremalnych może doprowadzić do znaczących obciążeń estymowanych parametrów modeli, niepożądanych efektów podczas testowania warunkowej homoskedastyczności

i w konsekwencji obciążonych prognoz. Najnowsze badania wskazują również na niezadowalające wyniki trafności prognoz konkurencyjnego dla GARCH podstawowego modelu stochastycznej zmienności.

Celem pracy jest zbadanie zasadności stosowania modeli stochastycznych uwzględniających obserwacje ekstremalne na polskim rynku kapitałowym. Oprócz podstawowego modelu SV w analizie porównawczej zostały uwzględnione modele, których konstrukcja pozwala lepiej opisywać pojawianie się obserwacji ekstremalnych.

1. Podstawowy model zmienności stochastycznej (SV)

Rozważamy logarytmiczne stopy zwrotu y_t z instrumentu finansowego w czasie t ($t = 1, \dots, T$). Zbiór $(I_t)_{t \in [0, T]}$ reprezentuje informację dostępną inwestorowi w czasie t , a filtracja oddaje powiększanie się dostępnej informacji wraz z upływem czasu. Przyjmujemy zatem, że inwestor nie posiada innych informacji poza tymi, które może uzyskać obserwując ceny instrumentu S_t .

Dynamika ruchu cen zgodnie z podstawowym modelem stochastycznej zmienności (ozn. dalej przez SV) – Rosenberg [1972], Taylor [1986], Hull i White [1987], Ghysels, Harvey i Renault [1996], Johannes i Polson [2010] – jest opisywana jako:

$$d \log S_t = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^S \quad (1)$$

$$d \log v_t = \kappa(\gamma - \log v_t) dt + \tau dW_t^V, \quad (2)$$

gdzie (κ, γ, τ) są parametrami opisującymi stochastyczną zmienność v_t , przy czym τ to zmienność zmienności (ang. *volatility of volatility*), a procesy Wienera (W_t^S, W_t^V) mogą być skorelowane.

O ile w literaturze proponuje się różne przypadki procesów, o tyle nasze rozważania kierujemy w stronę tych modeli, które pozwalają na uwzględnienie opisu obserwacji ekstremalnych. Ogólnie uwzględnienie obserwacji ekstremalnych w procesie cen instrumentu powoduje zastąpienie równania (1) przez:

$$d \log S_t = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^S + d\left(\sum_{j=n_t-1}^{n_t} Z_j\right), \quad (3)$$

gdzie dodatkowy składnik pozwala na opisanie skoków cen o wielkości Z_j i w ilości n_t [Eraker, Johannes, Polson, 2003; Johannes, Polson, 2010].

Podstawowy model zmienności stochastycznej zakłada istnienie dwóch, niezależnych od siebie źródeł losowości. Jedno z nich wpływa na stopę zwrotu instrumentu finansowego, a drugie – na parametr zmienności ceny tego instrumentu.

Bezpośrednia dyskretyzacja modelu zapisanego równaniami (1) i (2) prowadzi do definicji dyskretnego procesu SV dla przyrostów logarytmu ceny, który zapisujemy [West, Harrison, 1997]:

$$y_t = \exp(h_t / 2) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (4)$$

$$h_t = \mu_t + \phi(h_{t-1} - \mu) + \tau \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2), \quad (5)$$

gdzie $h_t = \log v_t$ i podlega procesowi autoregresyjnemu AR(1).

Proces SV jest zwykle wykorzystywany do opisu składników losowych w równaniu regresji bądź autoregresji dla obserwowanych stóp zwrotu, dlatego wzór (4) zapisuje się już bez stałej μ .

Aby zapewnić ścisłą stacjonarność procesu zwykle zakłada się, że $|\phi| < 1$.

Szacowanie logarytmicznej zmienności rozpoczyna się dla znanych momentów m_0 i C_0 , zakładając, że $h_0 \sim N(m_0, C_0)$. Rozkład łączny, dla $\theta = (\phi, \tau^2)$, jest postaci $p(\theta) = p((\mu, \phi) | \tau^2) p(\tau^2)$, gdzie $p((\mu, \phi) | \tau^2) \sim N(b_0, \tau^2 B_0)$ oraz $\tau^2 \sim IG(c_0, d_0)$ (odwrotnym gamma) dla znanych parametrów b_0, B_0, c_0, d_0 .

Dla szeregu obserwacji $y^n = (y_1, \dots, y_n)$ i równań (4) i (5) rozkład *a posteriori* jest zatem zadany przez:

$$p(h^n, \theta | y^n) \propto p(\theta) \prod_{t=1}^n p(y_t | h_t, \theta) p(h_t | h_{t-1}, \theta).$$

Model (4)-(5) uwzględnia typową własność szeregów finansowych – efekt skupiania zmienności, lecz przy zakładaniu lognormalności rozkładu stóp zwrotu nie jest wystarczający do opisywania rzeczywistych szeregów stóp zwrotu.

2. Rozszerzenia modelu zmienności stochastycznej

Model zmienności stochastycznej z warunkowym rozkładem *t*-Studenta (SVt)

Założenie warunkowej normalności nie jest wystarczające do wyjaśnienia wysokiej kurtozy oraz pojawiania się obserwacji ekstremalnych. Fakt ten został wykazany dla procesów z klasy GARCH, dlatego i w przypadku modeli SV wykorzystuje się rozkłady o grubszych ogonach i jest nim najczęściej rozkład *t*-Studenta [Geweke, 1994].

Model zmienności stochastycznej rozkładem t -studenta jest opisany równaniami [Liesenfeld, Jung, 2000],

$$y_t = \exp(h_t / 2) \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim t_\nu \quad (6)$$

$$h_t = \mu_t + \phi(h_{t-1} - \mu) + \tau \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (7)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{\lambda_t} z_t \quad (8)$$

$$\lambda_t \sim IG(\nu/2, \nu/2), \quad (9)$$

gdzie ε_t jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie t -studenta z liczbą stopni swobody $\nu > 2$, λ_t – ciągiem zmiennych losowych niezależnych i o jednakowym odwrotnym rozkładzie gamma.

Badania empiryczne pokazują, iż za pomocą procesu SV o warunkowym rozkładzie t -Studenta można lepiej opisać pojawianie się obserwacji nietypowych niż za pomocą procesu SV o warunkowym rozkładzie normalnym. Ponadto, proces SV o warunkowym rozkładzie t -Studenta wymaga zwykle większej liczby stopni swobody niż proces GARCH(p,q). Stochastyczny charakter wariancji warunkowej dla procesu SV h_t jest odrębnym procesem stochastycznym, co sprawia, iż rozkład brzegowy z_t ma znacznie grubsze ogony niż rozkład zmiennych tworzących proces GARCH(p,q) z tą samą liczbą stopni swobody.

Model zmienności stochastycznej ze skokami (SVJ)

Badania wykazują, iż szeregi reszt modeli GARCH nadal wykazują grube ogony. Widoczne jest to również, choć w nieco mniejszym stopniu, w powstałych rozszerzeniach modeli GARCH. Tłumaczy się to występowaniem w finansowych szeregach czasowych obserwacji ekstremalnych, tzw. addytywnych obserwacji ekstremalnych (ang. *additive outliers*). Obserwacje addytywne stanowią istotne odchylenie od przewidywanej wartości badanego zjawiska tylko w jednym okresie, stąd nie wpływają na wartości szeregu w następnych okresach.

W ślad za wynikami tych badań w obrębie zmienności stochastycznej rozważa się modele, które uwzględniają tego typu obserwacje.

Model stochastycznej zmienności ze skokami jest opisany równaniami [Eraker, Johannes, Polson, 2003].

$$y_t = \exp(h_t / 2) \varepsilon_t + J_t z_t \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (10)$$

$$h_t = \mu_t + \phi(h_{t-1} - \mu) + \tau \eta_t \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (11)$$

$$z_t \sim N(\mu_z, \sigma_z^2) \quad (12)$$

$$J_t \sim B(\lambda), \quad (13)$$

gdzie J_t jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego, przyjmującą wartość 1 z prawdopodobieństwem λ , gdy pojawi się skok oraz 0, w przeciwnym przypadku rozmiar skoku jest reprezentowany przez zmienną Z_t .

3. Estymacja parametrów modeli stochastycznej zmienności

Modele zmienności stochastycznej coraz częściej są wykorzystywane w badaniach empirycznych, mimo utrudnionego procesu estymacji parametrów modelu. Szereg istniejących prac wskazuje na wyższość estymacji parametrów z wykorzystaniem metody Monte Carlo opartej na łańcuchach Markowa (MCMC) nad uogólnioną metodą momentów i quasi-największej wiarygodności [Jacquiera i in., 1994] oraz nad metodą momentów EMM [Gallant, Tauchen, 1996]. Uzyskane w ten sposób estymatory są zgodne i efektywne.

Estymacja bayesowska polega na wyznaczeniu rozkładu *a posteriori* parametrów rozkładu $p(\theta, h|y^{(n)})$, gdzie θ jest wektorem parametrów modelu, h – wektorem zmiennych ukrytych, $y^{(n)}$ – macierzą obserwacji.

Rozkład ten nie jest normalny względem parametrów θ (jest normalny względem nieliniowych funkcji parametrów θ). Jego postać analityczna nie jest więc w ogólnym przypadku znana. Kształt funkcji gęstości przybliża się metodami symulacyjnymi. Stosuje się do tego metody próbkowania. Najczęściej jest to algorytm Metropolisa-Hastingsa.

Algorytm błędzenia losowego Metropolisa-Hastingsa dla modelu zmienności stochastycznej jest następujący:

Niech $v_t^2 = v$ dla $t = 1, \dots, n-1$ oraz $v_n^2 = \tau$, wtedy

$$p(h_t | h_{t-1}, y^n, \theta, \tau^2) = f_N(h_t; \mu_t, v_t^2) f_N(y_t; 0, e^{h_t}) \text{ dla } t = 1, \dots, n.$$

Dla $t = 1, \dots, n$:

1. Ustalenie $h_t^{(j)}$.
2. Wylosowanie h_t^* z rozkładu $N(h_t^{(j)}, v_h^2)$.
3. Wyznaczenie prawdopodobieństwa akceptacji

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{f_N(h_t^*; \mu_t, v_t^2) f_N(y_t; 0, e^{h_t^*})}{f_N(h_t^{(j)}; \mu_t, v_t^2) f_N(y_t; 0, e^{h_t^{(j)}})} \right\}.$$

4. Wyznaczenie kolejnej wartości $h_t^{(j+1)} = \begin{cases} h_t^* & \text{dla } \alpha \\ h_t^{(j)} & \text{dla } 1 - \alpha \end{cases}$.

4. Przykład symulacyjny

Eksperyment polega na symulacji szeregu obserwacji długości $n = 500$ zgodnego z procesem stochastycznej zmienności o rozkładzie normalnym, zgodnie z (4) i (5), z wstępnie ustalonymi wartościami parametrów $h_0 = 0$, $(\mu, \phi, \tau^2) = (-0.00018, 0.99, 0.15^2)$. Dla modelu SV założenia dla warunkowego rozkładu *a priori* są następujące:

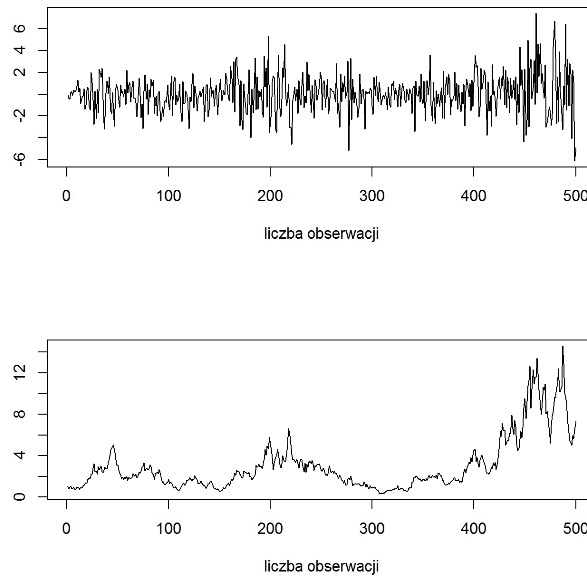
$$\phi \sim N(0, 100), \mu \sim N(0, 100), \tau^2 \sim IG(10/2, 0.282/2), h_0 \sim N(0, 100).$$

Założone wartości parametrów odpowiadają typowym rzeczywistym wartościom dla finansowych szeregów czasowych. Przykład symulacyjny ma charakter ilustracyjny dla powyższych modeli. Prezentujemy przykład zastosowania modeli SV, SVt oraz SVJ do modelowania zmienności w przypadku występowania w szeregu obserwacji ekstremalnych.

Wprowadzamy (losowo) do szeregu 5% obserwacji ekstremalnych o różnej wielkości (por. wykres 1) i oszacowujemy parametry rozkładu *a posteriori* (dla każdego typu modelu) metodą błędzenia losowego Metropolisa-Hastinga¹. Schemat procedury MCMC jest oparty na $M = 3000$ próbkach.

Wykres 1

Wykres wysymulowanego szeregu obserwacji y_t (góra) oraz odpowiadającej mu zmienności $\exp\{h_t\}$ (dół)



¹ Na podstawie wyników Lopesa i Polsona [2010] estymację parametrów przeprowadzamy algorytmem Metropolisa-Hastinga dla błędzenia losowego.

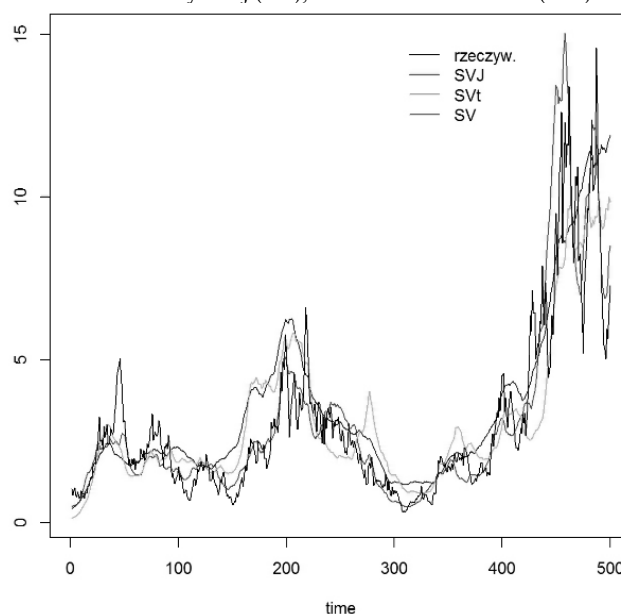
Dla modelu SVt dodatkowo przyjęto znaną liczbę stopni swobody = 2, dla modelu SVJ: $\mu_z \sim N(-3, 0.01)$, $\lambda \sim \text{beta}(2, 100)$, $\sigma_z^2 \sim \text{IG}(10, 0.5)$.

Parametry modelu SVJ zostały tak dobrane, by zgodnie z założeniami modelu, uwzględnić (średnio na rok) pięć obserwacji ekstremalnych.

Wykres 2 przedstawia dopasowanie zmienności stochastycznej SV, SVt oraz SVJ (do zmienności „rzeczywistej” – wyznaczonej na podstawie wysymulowanego szeregu) po wprowadzeniu do szeregów obserwacji ekstremalnych na poziomie 5%.

Wykres 2

Dopasowanie zmienności stochastycznej (SV), o rozkładzie t -studenta (SVt) i ze skokami (SVJ)



Analizując wykres 2, zgodnie z przewidywaniami widać, że model podstawowy stochastycznej zmienności najgorzej dopasowuje się do danych, w których występują obserwacje ekstremalne. Model stochastycznej zmienności o rozkładzie t -studenta w zachowaniu jest dość podobny do modelu SV – nie reaguje w oczekiwany sposób na obserwacje ekstremalne. Najlepsze dopasowanie jest widoczne w przypadku modelu zmienności stochastycznej ze skokami. W tym przypadku należy mieć na uwadze fakt, iż konstrukcja modelu stochastycznej zmienności ze skokami (w stopach zwrotu instrumentu finansowego) pozwala na dobór parametrów w taki sposób, by uwzględniały określoną liczbę obserwacji ekstremalnych. W związku z tym istotna w tym momencie jest identyfikacja obserwacji ekstremalnych w szeregu danych finansowych.

5. Dopasowanie modeli stochastycznej zmienności do danych rzeczywistych

Analizie poddano szereg dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20 o długości 6 miesięcy (03.09.2007-29.02.2008 oraz 01.02.2012-31.07.2012). Okresy badawcze celowo zostały wybrane w taki sposób, by przedstawiały sytuacje na polskim rynku kapitałowym w okresie zmiany okresu trendu wzrostowego (hossa) w trend spadkowy (bessa) oraz w okresie stagnacji. Podstawowe statystyki dla szeregów zostały zaprezentowane w tab. 1. Dla wszystkich przypadków odnotowujemy ujemną skośność rozkładów dla indeksu. Test odporny Jarque-Berra wskazuje na brak podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu dla okresu 6-miesięcznego w okresie stagnacji dla WIG20. Na podstawie współczynnika kurtozy wnioskujemy, że rozkłady stóp zwrotu dla obu okresów są leptokurtyczne. Opierając się na wykresach kwantylowych sprawdzamy, czy w analizowanych szeregach występują obserwacje nietypowe (wykresy 3 i 4). Znajdujemy obserwacje odstające od wartości kwantyli normalnych. Z tego względu dalej analizujemy wszystkie szeregi.

Celem analizy jest sprawdzenie zachowania wybranych modeli dynamiki cen instrumentów finansowych na danych historycznych, które polega na ustaleniu punktu wyjściowego w przeszłości i przeprowadzeniu symulacji cen.

Tabela 1

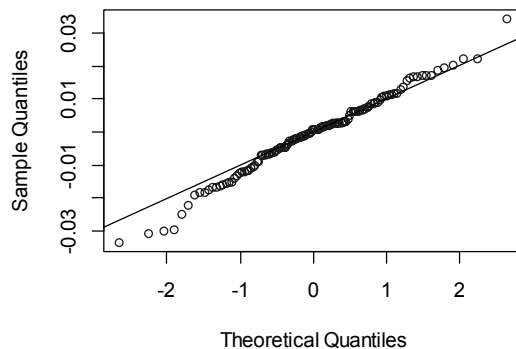
Wybrane statystyki opisowe dla szeregów dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20

	<i>WIG20</i>	
	03.09.2007 do 29.02.2008	01.02.2012 do 31.07.2012
<i>n</i> (w dniach)	123	125
Odchylenie standardowe	0,01725	0,012068
Minimum	-0,06967	-0,03345
Maksimum	0,03846	0,03431
Kurtoza	1,39	0,24
Skośność	-0,23	-0,22
test Jarque-Berr	11,573	2,5371
<i>p-value</i>	0,003	0,28

Źródło: Na podstawie danych ze strony <http://stooq.pl>.

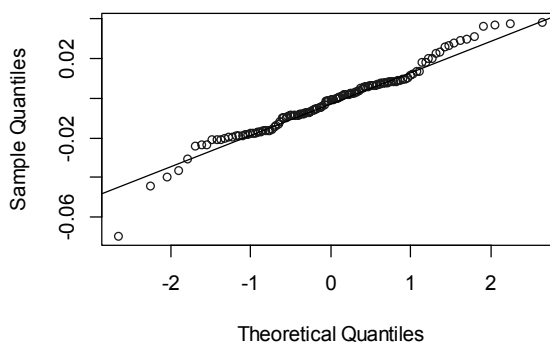
Wykres 3

Wykresy kwantylowe dla logarytmicznych stóp zwrotu WIG20 dla okresu badawczego 01.02.2012-31.07.2012



Wykres 4

Wykres kwantylowy dla logarytmicznych stóp zwrotu WIG20 dla okresu badawczego 03.09.2007-29.02.2008



W najprostszy sposób ocenę jakości szeregów można sprawdzić dopasowując funkcje gęstości rozkładów szeregów wygenerowanych zgodnie z modelami dynamiki cen do rzeczywistej funkcji gęstości. Dla właściwej oceny posługujemy się testami zgodności dopasowania rozkładów opartych na dystrybuancie empirycznej. Zakładamy, że próba $x = (x_1, \dots, x_n)$ pochodzi z rozkładu o dystrybuancie $F_\theta(x)$, a $F_{emp}(x)$ jest dystrybuantą empiryczną. Testujemy wtedy hipotezę $H_0 : F_{emp}(x) = F_\theta(x)$ przeciwko $H_1 : F_{emp}(x) \neq F_\theta(x)$. Do zweryfikowania hipotezy zostały wybrane nieparametryczne statystyki Kołmogorowa-Smirnova (KS) i Andersona–Darlinga (AD), które opierają się na obliczeniu odległości dystrybuanty empirycznej od wartości dystrybuanty założonej. Zastosowanie testu AD jest w szczególności uzasadnione, gdyż dobrze odzwierciedla dopasowanie ogólnów rozkładu.

Dla każdego z wcześniej omówionych modeli dynamiki cen i każdego z rozważanych okresów wykonano następujące kroki:

- oszacowano parametry modeli oraz wykonano testy zgodności (tab. 2-4),
- wyznaczono wartości statystyk dla testów zgodności dopasowania wygenerowanych rozkładów do danych, które pojawiły się bezpośrednio po okresie badanych prób (tab. 5).

Tabela 2

Wartości wyestymowanych parametrów **modelu SV** oraz statystyk testowych dla danych historycznych

Próba	Parametry			Statystyki (p-value)	
	μ	φ	τ	KS	AD
03.09.2007- 29.02.2008	0,028	0,93	0,027	0,173 (0,064)	-0,056 (0,014)
01.02.2012- 31.07.2012	0,001	0,89	0,020	0,782 (0,188)	0,613 (0,169)

Tabela 3

Wartości wyestymowanych parametrów **modelu SVt** oraz statystyk testowych dla danych historycznych

Próba	Parametry			Statystyki (p-value)	
	μ	φ	τ	KS	AD
03.09.2007- 29.02.2008	0,045	0,99	0,029	0,126 (0,054)	0,349 (0,048)
01.02.2012- 31.07.2012	0,002	0,95	0,021	0,846 (0,167)	1,399 (0,047)

Tabela 4

Wartości wyestymowanych parametrów **modelu SVJ** oraz statystyk testowych dla danych historycznych

	Parametry						Statystyki (p-value)	
	μ	φ	τ	μ_z	σ_z	λ	KS	AD
03.09.2007- 29.02.2008	0,031	0,99	0,027	-0,004	0,0155	0,0172	0,358 (0,732)	0,532 (0,524)
01.02.2012- 31.07.2012	0,023	0,94	0,019	-0,003	0,0176	0,0202	0,644 (0,003)	3,265 (0,026)

Najlepiej do 6-miesięcznych danych z okresu stagnacji na rynku kapitałowym dopasowuje się model stochastycznej zmienności z warunkowym rozkładem normalnym, natomiast zbędne jest założenie o zgodności rozkładów rzeczywistego i pochodzącego z modelu stochastycznej zmienności ze skokami. Dla okresu 6-miesięcznego z okresu zmiany trendu na rynku kapitałowym najlepiej dopasowuje się model stochastycznej zmienności ze skokami.

Z punktu widzenia przedmiotu tej pracy znacznie interesujące jest przedstawienie w pracy wyników prognoz dla 2008 r. (czyli prognoza na marzec–maj 2008) na podstawie oszacowaniach parametrów modeli z przełomu 2007/2008.

Tabela 5

Wartości statystyk testowych wyestymowanych modeli w zestawieniu z zaobserwowanymi danymi z przyszłego 3-miesięcznego okresu 2008 r.

Próba	SV		SVt		SVJ	
	KS	AD	KS	AD	KS	AD
03.09.2007-	0,206	3,398	0,386	2,892	0,0276	4,873
29.02.2008	(0,010)	(0,019)	(0,027)	(0,034)	(0,056)	(0,087)

Model SV na podstawie półrocznych danych nie jest w stanie dobrze opisać zachowania się stóp zwrotu na okres kolejnych 3 miesięcy. Podobną sytuację odnotowujemy dla modelu SV z warunkowym rozkładem t -Studenta. Model stochastycznej zmienności na podstawie danych półrocznych jest w stanie dobrze pisać zachowanie się stóp zwrotu na okres kolejnych 3 miesięcy. Istotny jest fakt, iż w przypadku modelu SVJ statystyka KS osiągnęła poziom zbliżony do wartości krytycznej na poziomie istotności 0,05.

Podsumowanie

Dokonałiśmy oceny wpływu obserwacji ekstremalnych na zmienność szacowaną na podstawie podstawowego modelu stochastycznej zmienności, modelu pozwalającego na uwzględnianie grubych ogonów oraz modelu uwzględniającego skoki stóp zwrotu instrumentu finansowego. Modele zmienności stochastycznej z metodą szacowania parametrów – Monte Carlo z łańcuchami Markowa należą do grupy modeli skomplikowanych obliczeniowo. Uwzględnianie wartości ekstremalnych w szacowaniu poziomu ryzyka jest jednak obecnie niezbędne.

Badania empiryczne prowadzone w literaturze na rynkach zagranicznych podkreślają konieczność modelowania cen z uwzględnieniem skoków cen instrumentów finansowych, a powyższe badanie potwierdziło, iż również na rynku

polskim warto stosować tego typu modele nawet, jeśli intensywność występowania skoków cen na rynku polskim jest znacznie niższa w porównaniu z rynkiem zagranicznym.

Literatura

- Doman M., Doman R. (2009): *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*. Oficyna Wolters Kluwer Business, Kraków.
- Eraker B., Johannes M., Polson N. (2003): *The Impact of Jumps in Equity Index Volatility and Returns*. „Journal of Finance”, 58.
- Fiszeder P. (2009): *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*. Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Gallant A.R., Tauchen G. (1996): *Which Moments to Match?* „Econometric Theory”, 12.
- Geweke J., (1993): *Bayesian Treatment of the Independent Student-t Linear Model*. „Journal of Applied Econometrics”, 8.
- Ghysels E., Harvey A.C., Renault E. (1996): *Stochastic Volatility*. In: *Handbook of Statistics: Statistical Methods in Finance*. Eds. C.R. Rao, G.S. Maddala. North-Holland, Amsterdam.
- Hull J., White A. (1987): *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. „Journal of Finance”, 42.
- Jacquier E., Polson N.G., Rossi P.E. (1994): *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models*. „Journal of Business and Economic Statistics”, 20.
- Johannes M., Polson N. (2010): *MCMC Methods for Continuous-time Financial Econometrics*. In: *Handbook of Financial Econometrics*. Vol. 2. Eds. Y. Ait-Sahalia, L.P. Hansen. Princeton University Press.
- Liesenfeld R., Jung R.C. (2000): *Stochastic Volatility Models: Conditional Normality Versus Heavy-tailed Distributions*. „Journal of Applied Econometrics”, 15.
- Lopes H.F., Polson N.G. (2010): *Bayesian Inference for Stochastic Volatility Modeling*. In: *Rethinking Measurement and Reporting: Uncertainty, Bayesian Analysis and Expert Judgement*. Ed. K. Böcker. Risk Books, London.
- Pajor A. (2010): *Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej. Ujęcie bayesowskie*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Kraków.
- Rosenberg B. (1972): *The Behaviour of Random Variables with Nonstationary Variance and the Distribution of Security Prices*. Working Paper.
- Taylor S.J. (1986): *Modelling Financial Time Series*. Wiley, New York.
- West M., Harrison J. (1997): *Bayesian Forecasting and Dynamic Models* (2nd edition). Springer, New York.

THE IMPACT OF EXTREME OBSERVATIONS ON STOCHASTIC VOLATILITY**Summary**

This article takes up validity of the use (on the Polish capital market) of stochastic models which take into account extreme observations. In the comparative analysis aside from the SV been considered models whose structure can better describe the appearance of extreme observations.