Joanna Utkin
Szkoła Główna Handlowa

OPTYMALNY ZRANDOMIZOWANY TEST NA SKOŃCZONYM RYNKU ZUPEŁNYM

Wprowadzenie

Problematyka osłony dotyczy zabezpieczenia przyszłego zobowiązania na rynku kapitałowym. Klasyczny problem osłony kwantylowej polega na maksymalizacji prawdopodobieństwa zabezpieczenia na rynku zupełnym i pozbawionym możliwości arbitrażu. Znany jest warunek dostateczny takiej osłony przy danym ograniczeniu budżetowym [por. 1; 2]. Uogólniony problem osłony kwantylowej jest formułowany na rynku bez możliwości arbitrażu, który nie musi być zupełny. Zagadnienie to dotyczy maksymalizacji wartości oczekiwanej tzw. współczynnika sukcesu. Follmer, Leukert i Schied zaproponowali dwustopniowe rozwiązanie problemu: najpierw maksymalizuje się wartość oczekiwaną zrandomizowanego testu, a następnie za pomocą zrandomizowanego testu przedstawia się optymalny współczynnik sukcesu. Ponadto na rynku zupełnym przy spełnionym warunku dostatecznym klasycznej osłony kwantylowej otrzymano tę samą wartość końcową optymalnej wypłaty [por. 1; 2]. Maksymalizacja wartości średniej zrandomizowanego testu została oparta na uogólnionym lemacie Neymana-Pearsona.

Niniejsze opracowanie jest poświęcone badaniu własności optymalnego zrandomizowanego testu na skończonym rynku zupełnym. Własności te uzyskuje się dzięki rozwiązaniu zadania optymalizacji odpowiednimi metodami programowania matematycznego. Na ich podstawie wykazuje się, że minimum uogólnionej gęstości jest odpowiednim dolnym kwantylem. Umożliwia to porównanie wyników ze znanymi warunkami klasycznej osłony kwantylowej.

1. Problematyka osłony kwantylowej

1.1. Model rynku i zobowiązania

Rozważamy rynek kapitałowy o skończonej liczbie stanów. Występują na nim okresowo bezpieczne konto bankowe oraz ryzykowne instrumenty finansowe. Model rynku jest zupełny i pozbawiony możliwości arbitrażu. Transakcje na rynku odbywają się w chwilach $t = 0,\dots, T$, $\Omega = \{\omega_1,\dots, \omega_N\}$ jest zbiorem stanów rynku w chwili $t = T$, P jest funkcją prawdopodobieństwa rzeczywistego, zaś Q – funkcją prawdopodobieństwa martyngałowego na zbiorze Ω. Przez K oznaczamy proces konta bankowego. Procesowi wartości portfela V przyporządkowany jest zdyskontowany proces wartości $Y = V / K$. Przez V_T oznaczamy końcową wartość portfela, zaś przez V_0 jej wycenę bezarbitrażową na chwilę początkową.

Na rynku rozważamy dane zobowiązanie typu europejskiego płatne w terminie $t = T$. Jest ono reprezentowane przez zmienną losową L spełniającą założenie $0 \neq L \geq 0$. Zobowiązaniu L odpowiada zdyskontowane zobowiązanie $H = L / K_T$. Przez L_0 oznaczamy bezarbitrażową wycenę zobowiązania na moment $t = 0$. Zakładamy, że na początek mamy do dyspozycji budżet v spełniający ograniczenie:

$$0 < v < L_0$$

Wprowadzamy oznaczenie $\alpha = \dfrac{v}{L_0}$. Zatem $\alpha \in (0,1)$. Wówczas różnica:

$$1-\alpha = \frac{L_0 - v}{L_0} \tag{1}$$

reprezentuje względną cenę niedoboru dla danych: zobowiązania i budżetu.

Problemy osłony kwantylowej przytoczone poniżej będą formułowane w przypadku rynku skończonego. Zmienne losowe X na zbiorze Ω będą traktowane jak wektory z R^N o współrzędnych $X_i = X(\omega_i)$, $i = 1,\dots, N$. Iloczyn zmiennych losowych $X \cdot Y$ potraktujemy jako wektor o współrzędnych X_iY_i, $i = 1,\dots, N,$ iloraz zmiennych losowych X / Y jako wektor o współrzędnych X_i / Y_i, $i = 1,\dots, N$. Ponadto z uwagi na kontekst rynku zupełnego w sformułowaniach cytowanych twierdzeń uwzględnimy jedynie wypłaty końcowe, gdyż kwestia replikacji jest w tym przypadku oczywista.

1.2. Klasyczny problem osłony kwantylowej

W klasycznym zagadnieniu osłony kwantylowej szuka się wypłaty końcowej V_T^* maksymalizującej prawdopodobieństwo osłony przy ograniczeniu budżetowym, czyli:

$$P^T 1_{V_T^* \geq L} = \max\left\{P^T 1_{V_T \geq L} : V_0 \leq v \wedge V_T \geq 0\right\} \tag{2}$$

Pierwsza z nierówności stanowi początkowe ograniczenie budżetowe, druga zakaz końcowego zadłużenia w każdym stanie. W stanie ω mamy do czynienia z osłoną wówczas, gdy $V_T^*(\omega) \geq L(\omega)$.

Narzędzi do rozwiązywania problemu (2) dostarczają dwa twierdzenia: o wypłacie optymalnej oraz o warunku dostatecznym optymalności.

Twierdzenie o wypłacie optymalnej [por. 2, tw. 8.2]

Jeśli zdarzenie $A^* \subset \Omega$ jest rozwiązaniem zadania:

$$P^T 1_{A^*} = \max\left\{P^T 1_A : A \subset \Omega \wedge Q^T\left(H \cdot 1_A\right) \leq v\right\} \tag{3}$$

to wypłata końcowa $V_T^* = L \cdot 1_{A^*}$ jest rozwiązaniem zadania (2).

Przytoczenie następnego twierdzenia poprzedzają definicje dwóch pomocniczych pojęć.

Definicja 1

Funkcję $F : \Omega \to \langle 0,1 \rangle$ o wartościach $F(\omega) = Q(\omega)\, H(\omega) / L_0$ nazywamy funkcją prawdopodobieństwa pomocniczego. W przypadku rynku o N stanach traktujemy F jako wektor o współrzędnych:

$$F_i = \frac{Q_i H_i}{L_0}, i = 1,\ldots, N \tag{4}$$

Wniosek 1

Jeśli $A \subset \Omega$, to $F^T 1_A = Q^T\left(H \cdot 1_A\right)/ L_0$.

Wniosek 2

F jest funkcją prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega - F^{-1}\left\{0\right\}$.

Definicja 2

Mówimy, że P / F jest uogólnioną gęstością P względem F na zbiorze Ω, jeśli $(P/F)(\omega) = P(\omega)/F(\omega)$ przy $F(\omega) \neq 0$, zaś $(P/F)(\omega) = +\infty$ przy $F(\omega) = 0$. Zgodnie z tą konwencją, na rynku skończonym wektor P/F ma współrzędne:

$$(P/F)_i = \begin{cases} P_i / F_i \, , F_i \neq 0 \\ +\infty, F_i = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Twierdzenie o warunku dostatecznym optymalności [por. 2, tw. 8.3]

Jeśli zdarzenie:

$$A^* = \{\omega \in \Omega : P(\omega)/F(\omega) >_F q_{1-\alpha}(P/F)\}^* \tag{6}$$

spełnia równanie $F^T 1_{A^*} = \alpha$, to A^* jest zdarzeniem optymalnym zadania (3) i wypłata końcowa $V_T^* = L \cdot 1_{A^*}$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (2). Ponadto A^* jest zdarzeniem osłony.

Uwaga 1

Wymieniony w [1; 2] warunek wystarczający do spełnienia założenia twierdzenia o warunku dostatecznym, mianowicie $P^T 1_{P/Q=d\,H/L_0} = 0$ nie jest nigdy spełniony na rynku skończonym. Jeżeli $\Omega = N$, to istnieje $i \in \{1,\ldots N\}$, dla którego dolny kwantyl jest równy właściwej wartości zmiennej losowej ${}_F q_{1-a}(P/F) = P_i / F_i$, więc wcześniej wymieniony warunek nie zachodzi.

1.3. Uogólniony problem osłony kwantylowej

Dla danego zobowiązania Follmer i in. [1; 2] określili „współczynnik sukcesu". Sukces polega na osłonie zobowiązania przez wartość końcową portfela. Z uwagi na to, że martyngałami są zdyskontowane płatności losowe, w sformułowaniach pojęć wykorzystuje się zdyskontowane zobowiązanie H oraz zdyskontowaną wartość końcową portfela Y_T.

---

* ${}_F q_{1-\alpha}(P/F)$ oznacza dolny 1–α – kwantyl uogólnionej gęstości względem *F*.

Definicja 3

Współczynnikiem sukcesu nieujemnej zdyskontowanej wypłaty Y_T nazywamy zmienną losową określoną wzorem:

$$\Psi_Y = 1_{Y_T \geq H} + 1_{Y_T < H} \cdot Y_T / H \tag{7}$$

W uogólnionym zagadnieniu osłony kwantylowej szuka się zdyskontowanej wypłaty końcowej Y_T^* maksymalizującej wartość oczekiwaną współczynnika sukcesu przy ograniczeniu budżetowym:

$$P^T \Psi_{Y*} = \max \left\{ P^T \Psi_Y : Q^T Y_T \leq v \right\} \tag{8}$$

Metoda wyznaczania optymalnej wypłaty końcowej, przedstawiona w pracach [1; 2] opiera się na optymalizacji wartości oczekiwanej zrandomizowanego testu Ψ. Ten pomocniczy problem optymalizacyjny ma na rynku o N stanach końcowych postać:

$$P^T \Psi_{Y*} = \max \left\{ P^T \Psi_Y : Q^T Y_T \leq v \right\} \tag{9}$$

Związek problemów (8) i (9) wynika z następującego twierdzenia:

Twierdzenie o maksymalizacji średniego współczynnika sukcesu [por. 2, tw. 8.6]

Jeśli Ψ^* jest rozwiązaniem optymalnym problemu (9), to zdyskontowana wypłata $Y_T^* = H \cdot \Psi^*$ ma współczynnik sukcesu Ψ_{Y*} optymalny ze względu na problem (8), przy czym $\Psi_{Y*} = \Psi^*$ oraz $Q^T Y_T^* = v$.

Postać optymalnego zrandomizowanego testu wynika z tzw. uogólnionego lematu Neymana-Pearsona. W cytowanym wniosku z uogólnionego lematu Neymana-Pearsona uwzględniona jest uwaga 1.

Wniosek z uogólnionego lematu Neymana-Pearsona [por. 2, tw. A30]

Współrzędne zrandomizowanego testu będącego rozwiązaniem problemu (9) są następujące:

$$\Psi_i^0 = \begin{cases} 0 \quad \text{przy } P_i / F_i < c & (10) \\ \dfrac{\alpha - F^T 1_{P/F>c}}{F^T 1_{P/F=c}} \quad \text{przy } P_i / F_i = c & (11) \\ 1 \quad \text{przy } P_i / F_i > c & (12) \end{cases}$$

gdzie:

$$c = {}_F\, q_{1-a} \left(P / F \right) \tag{13}$$

Numeryczne rozwiązania licznych przykładów zadania (9) nie zawierały przypadku (10) rozwiązania optymalnego. Stało się to motywacją do podjęcia badań zadania programowania liniowego (9) pod kątem własności rozwiązania optymalnego.

2. Optymalny zrandomizowany test jako rozwiązanie zadania programowania matematycznego

Podjęcie badania rozwiązania optymalnego problemu (9) za pomocą narzędzi programowania matematycznego dostarcza pełniejszej wiedzy o optymalnym zrandomizowanym teście niż formuły (10)-(13) oparte na uogólnionym lemacie Neymana-Pearsona.

Dane są skalar $\alpha \in (0,1)$ oraz dwa wektory P i F spełniające założenia $P \in R_{++}^{N}, P^T 1 = 1, F \in R_{+}^{N}, F^T 1 = 1$. Wprowadzamy następujący zbiór rozwiązań dopuszczalnych:

$$D = \left\{ \Psi \in R^N : \Psi \in \langle 0,1 \rangle^N \wedge F^T \Psi \le \alpha \right\} \tag{14}$$

Rozważamy zadanie programowania liniowego:

$$\max_{\Psi \in D} P^T \Psi \tag{15}$$

Z założeń o wektorze F wiemy, że $F \in \langle 0,1 \rangle^N$ i $F^T 1 = 1$. Stąd i z założenia $\alpha \in (0,1)$ wynikają następujące związki położenia jednostkowej kostki $\langle 0,1 \rangle^N$ i hiperpłaszczyzny o równaniu $F^T \Psi = \alpha$:

$$\langle 0,1 \rangle^N \cap \left\{ \Psi \in R^N : F^T \Psi = \alpha \right\} \neq O$$

$$i \in \{1,...,N\} \Rightarrow \left\{ \Psi \in R^N : e_i^T \Psi = 0 \right\} \neq \left\{ \Psi \in R^N : F^T \Psi = \alpha \right\}$$

$$i \in \{1,...,N\} \Rightarrow \left\{ \Psi \in R^N : e_i^T \Psi = 1 \right\} \neq \left\{ \Psi \in R^N : F^T \Psi = \alpha \right\}$$

D jest zatem wielościanem wypukłym, skąd wynika istnienie rozwiązania optymalnego zadania (15). Ponadto $IntD \neq O$. W pewnych $\Psi \in IntD$ wektor F jest dopuszczalnym kierunkiem poprawiającym, gdyż $F^T P > 0$ (por. [3]). Wobec tego otrzymujemy wniosek:

Wniosek 3

Zadanie (15) ma rozwiązanie optymalne Ψ^0 spełniające równanie $F^T \Psi = \alpha$.

Pierwszy etap optymalizacji funkcji celu doprowadził do lokalizacji rozwiązania optymalnego na ścianie zbioru D:

$$\left\{ \Psi \in R^N : \Psi \in \langle 0,1 \rangle^N \wedge F^T \Psi = \alpha \right\} \tag{16}$$

Drugi etap będzie polegał na poprawianiu wartości funkcji celu ze względu na odpowiednio wybrane pary współrzędnych, co zaowocuje wyznaczeniem podzbioru rozwiązań optymalnych w zbiorze (16).

Wyszczególniamy najmniejszą wartość uogólnionej gęstości (por. definicja 2):

$$g_{\min} = \min\{P_i / F_i : i = 1,...,N\} \tag{17}$$

Wprowadzamy podział współrzędnych:

$$i \in I_0 \Leftrightarrow P_i / F_i = g_{\min} \tag{18}$$

$$I_1 = \{1,...,N\} - I_0 \tag{19}$$

Jeżeli $j \in I_0$ oraz $i \in I_1$, to $F_j > 0$ i nierówność $P_j / F_j < P_i / F_i$ wynikająca z (17), (18), (19) jest równoważna nierówności:

$$F_i / F_j < P_i / P_j \tag{20}$$

Ustalamy dowolnie $j \in I_0$. Dla każdego $i \in I_1$ dwie współrzędne Ψ_j, Ψ_i traktujemy jako zmienne, a pozostałe współrzędne (jeśli takie występują) jako stałe. Zadanie optymalizacyjne przybiera wówczas postać:

$$\max\left(P_j\Psi_j + P_i\Psi_i + const_1\right)$$

$$\begin{cases} F_j\Psi_j + F_i\Psi_i + const_2 = \alpha \\ \Psi_j, \Psi_i \in \langle 0,1 \rangle \end{cases} \tag{21}$$

Z nierówności (20) wynika, że funkcja celu zadania (21) szybciej rośnie w kierunku e_i niż w kierunku e_j, a więc rozwiązanie optymalne zadania (21) ma współrzędną $\Psi_i^0 = 1$ Rezultat ten nie zależy od ustalonych wartości pozostałych współrzędnych wektora Ψ ze zbioru (16). Optymalizacja odbywa się mianowicie na części jednostkowego kwadratu leżącej pod prostą o danym nachyleniu, zaś funkcja celu jest liniowa. Wybór jednostkowy współrzędnej wierzchołka zbioru dopuszczalnego zależy jedynie od porównania tangensów kątów (16). Rozwiązując zadanie (21) dla każdego $i \in I_1$ otrzymujemy wniosek:

Wniosek 4

Jeżeli $i \in I_1$, to i współrzędna rozwiązania optymalnego problemu (15) jest równa $\Psi_i^0 = 1$.

Poszukiwanie rozwiązania optymalnego zadania (15) zostało więc zawężone do zbioru wektorów z R^N dla których:

$$\Psi_i^0 = 1 \quad \text{dla} \quad i \in I_1 \tag{22}$$

zaś współrzędne Ψ_j^0 dla $j \in I_0$ są związane z następującymi warunkami wynikającymi z wniosków 3 i 4:

$$\sum_{j \in I_0} F_j\Psi_j^0 = \alpha - \sum_{i \in I_1} F_i \qquad \text{i} \qquad \Psi_j^0 \in \langle 0,1 \rangle \tag{23}$$

Z określenia wskaźników (18) wiemy, że:

$$P_j = g_{\min} F_j \quad \text{dla} \quad j \in I_0 \tag{24}$$

Po podstawieniu (22) i (23) do wzoru na wartość funkcji celu zadania (15) i po skorzystaniu z (24) otrzymujemy:

$$P^T \Psi^0 = \alpha g_{\min} + \sum_{i \in I_1} \left(P_i - g_{\min} F_i \right) \tag{25}$$

Z wniosku 3 wiadomo, że zadanie (15) ma rozwiązanie optymalne. Jeśli I_0 jest zbiorem jednoelementowym, to jedyna współrzędna $\Psi_j^0, j \in I_0$ jest równa:

$$\Psi_j^0 = \left(\alpha - \sum_{i = I_1} F_i \right) / F_j \tag{26}$$

Jeżeli I_0 ma więcej niż jeden element, to wartość optymalna (25) jest przyjęta na zbiorze wektorów spełniających warunki (22) i (23). Niezależność wartości optymalnej od $\Psi_j^0, j \in I_0$ jest konsekwencją równoległości warstwicy funkcji celu jako funkcji zmiennych $\Psi_j^0, j \in I_0$, do zbioru określonego przez (23). Dowolnie ustalając $j \in I_0$ możemy przedstawić Ψ_j^0 w postaci parametrycznej:

$$\Psi_j^0 = \left(\alpha - \sum_{i = I_1} F_i - \sum_{k \in I_0 - \{j\}} F_k \Psi_k^0 \right) / F_j \tag{27}$$

gdzie $\Psi_k^0 \in \langle 0,1 \rangle, k \in I_0 - \{j\}$.

Wniosek 5

Jeżeli $\overline{\overline{I}}_0 = 1$, to współrzędne jedynego rozwiązania optymalnego Ψ_0 są dane za pomocą wzorów (22) i (26). Jeżeli $\overline{\overline{I}}_0 > 1$, to zbiór rozwiązań optymalnych składa się z wektorów Ψ^0 o współrzędnych spełniających warunki (22) i (27).

Poszukamy takiego rozwiązania optymalnego, które ma stałe współrzędne $\Psi^0 = \beta$ dla $j \in I_0$. Z (23) otrzymujemy:

$$\beta = \left(\alpha - \sum_{i = I_1} F_i \right) / \sum_{j \in I_0} F_j \tag{28}$$

Z istnienia rozwiązania optymalnego spełniającego (23) wiadomo, że $0 \le \beta \le 1$.

Wniosek 6

Jednym z rozwiązań optymalnych zadania (15) jest wektor $\Psi^0 \in R^N$ o współrzędnych:

$$\Psi_i^0 = \begin{cases} \beta \ , \ P_i / F_i = g_{\min} \\ 1 \ \ , P_i/F_i > g_{\min} \end{cases} \tag{29}$$

gdzie β jest dane wzorem (28). W przypadku, gdy wartość minimalna uogólnionej gęstości jest osiągnięta tylko w jednym stanie, układ (29) określa jedynie rozwiązanie optymalne.

Porównując wzory (10), (11) i (29) można zauważyć eliminację zerowych wartości współrzędnych, poza ewentualnym przypadkiem β = 0.

3. Rozwiązanie optymalne a dolny kwantyl uogólnionej gęstości

We wniosku z uogólnionego lematu Neymana-Pearsona, cytowanego w rozdziale 1.3, wartości współrzędnych rozwiązania optymalnego zależą od porównania wartości uogólnionej gęstości z jej dolnym 1 – α kwantylem. Poniżej zbadamy prawdopodobieństwa pomocnicze odpowiednich zdarzeń.

Z charakterystyki optymalnego testu (23) wynika, że:

$$\sum_{i=I_1} F_i \le \alpha \tag{30}$$

Ponieważ zachodzi $\sum_{j\in I_0} F_j + \sum_{i\in I_1} F_i = 1,$ to na podstawie (30) otrzymujemy oszacowanie:

$$\sum_{j\in I_0} F_j \ge 1-\alpha \tag{31}$$

Biorąc pod uwagę (18) i (19), nierówności (30) i (31) możemy odpowiednio zapisać w postaci:

$$F^T 1_{P/F>g_{\min}} \le \alpha \tag{32}$$

$$F^T 1_{P/F=g_{\min}} \ge 1-\alpha \tag{33}$$

Z nierówności (33) i z definicji dolnego kwantyla zastosowanej do skokowego rozkładu prawdopodobieństwa pomocniczego F wynika, że:

$$_F q_{1-a} \left(P / F\right) = g_{\min} \tag{34}$$

zatem w układzie wzorów (10)-(12) zachodzi $g_{\min} = c$.

Po uzyskaniu równości (34) możemy zbadać warunek dostateczny klasycznej kwantylowej osłony zobowiązania. Zdarzenie osłony jest, jak wiadomo z (6) i (34), określone przez nierówność $P/F > g_{\min}$, więc jego prawdopodobieństwo pomocnicze jest równe $F^T\, 1_{P/F\,>\,g_{\min}}$. Warunek dostateczny osłony kwantylowej, przytoczony w rozdziale 1.2, ma postać:

$$F^T 1_{P/F>g_{\min}} = \alpha \tag{35}$$

lub inaczej:

$$F^T 1_{P/F=g_{\min}} = 1-\alpha \tag{36}$$

Wyrażając (36) za pomocą zbioru wskaźników (18) otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 7

W celu spełnienia warunku dostatecznego klasycznej osłony kwantylowej na rynku skończonym potrzeba i wystarcza, aby:

$$\sum_{j\in I_0} F_j = 1-\alpha \tag{37}$$

Zdarzenie osłony jest wówczas zbiorem $\{\omega_i\colon i \in I_1\}$. Ponadto w tym przypadku $\beta = 0$.

Na rynku zupełnym wartość początkową zobowiązania możemy, zgodnie z (18) i (19), rozłożyć na dwa składniki:

$$L_0 = \sum_{j\in I_0} Q_j \cdot H_j + \sum_{i\in I_1} Q_i \cdot H_i \tag{38}$$

Jeśli spełniony jest warunek klasycznej osłony kwantylowej (37), to z (5) wynika, że składnik wyceny bezarbitrażowej zobowiązań w osłoniętych stanach (19) jest największy i równy kwocie budżetu:

$$\sum_{i\in I_1} Q_i \cdot H_i = v \tag{39}$$

a w konsekwencji składnik wyceny zobowiązania w nieosłoniętych stanach (18) jest najmniejszy i równy wartości niedoboru:

$$\sum_{j\in I_0} Q_j \cdot H_j = L_0 - v \tag{40}$$

Na ogół przy uogólnionej osłonie kwantylowej zachodzą jedynie nierówności wynikające z (31) i (30), mianowicie:

$$\sum_{i\in I_1} Q_i \cdot H_i \le v \tag{41}$$

Tak więc wycena bezarbitrażowa zobowiązań w stanach minimalnej gęstości przy uogólnionej osłonie kwantylowej jest nie mniejsza od wartości niedoboru:

$$\sum_{j\in I_0} Q_j \cdot H_j \ge L_0 - v \tag{42}$$

Podsumowanie

Znajomość skończonego zbioru wartości uogólnionej gęstości *P/F* pozwala wskazać gęstość minimalną i porównać ją ze względną ceną niedoboru (1). Jeśli względna cena niedoboru jest równa minimalnej gęstości, to możemy zagwarantować klasyczną osłonę kwantylową zobowiązania wyznaczoną za pomocą zrandomizowanego testu (29) o współrzędnych z $\{0,1\}$. Gdy zaś względna cena niedoboru różni się od minimalnej gęstości, to musimy się zadowolić uogólnioną osłoną kwantylową zobowiązania, otrzymaną na podstawie zrandomizowanego testu (29) o współrzędnych z $\{\beta, 1\}$, gdzie $\beta > 0$ (por. (28)).

Literatura

1. Follmer H., Leukert P., Quantile hedging. "Finance Stochastics" 1999, No. 3.
2. Follmer H., Schied A., Stochastic finance, de Gruyter, Berlin 2004.
3. Zangwill W., Programowanie nieliniowe, WNT, Warszawa 1974.

OPTIMAL RANDOMIZED TEST IN THE FINITE COMPLETE MARKET

Summary

We deal with the finite complete arbitrage free financial market model. There are given a liability (as selling an european option) and an initial amount lower than the initial value of the liability. The quantile hedging is based upon the generalized Neyman- Pearson lemma, but this approach don't give all information on the optimal solution in the considered case. In the present paper the optimal randomized test is analysed with some methods of the mathematical programming. It is showed that the minimal generalized density of probabilities equals the needed lower quantil. Moreover we construct the optimal solutions set. It is the basis to formulate the sufficient condition of the classical quantile hedging.