

DLACZEGO W DYLEMAT WIĘŹNIA WARTO GRAĆ KWANTOWO?*

1. Klasyczny dylemat więźnia

Dylemat Więźnia [DW] jest bardzo znanym przykładem zastosowania teorii gier do zagadnień związanych z podejmowaniem decyzji. Po raz pierwszy opisany przez Flooda i Dreshera [Flood i in. 1952] został spopularyzowany przez Alberta Tuckera, którego historii o dwu więźniach dylemat zawdzięcza obecną nazwę. Swoją popularność DW zawdzięcza uniwersalności schematu gry, która opisuje dylemat decyzyjny powszechnie występujący w wielu sytuacjach życia codziennego. Typowy scenariusz zakłada, że dwaj gracze, Alicja i Bartek, niezależnie od siebie wybierają jedną z dwu strategii – „współpraca” (W) lub „odmowa” (O). Wybory obu graczy są podstawą do wypłacenia im wygranych, które są opisane w tabeli 1.

Tabela 1

Macierz wypłat Dylematu Więźnia

		Bartek	
		W	O
Alicja	W	(w, w)	(f, z)
	O	(z, f)	(k, k)

Wybór „ W ” oznacza współpracę, a wybór „ O ” jej odmowę. Pierwsza liczba każdej pary to wypłata Alicji, druga to wypłata Bartka. Wypłata w to nagroda za współpracę, z to pokusa do zdrady, f to wypłata frajera, a k to kara za (obustronną) odmowę współpracy. Liczby te spełniają nierówności: $z > w > k > f$ oraz $w > \frac{z+f}{2}$ [Straffin 2001].

* Praca była dofinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji nr DEC-2011/01/B/ST6/07197 i DEC-2011/03/B/HS4/03857.

Na podstawie macierzy wypłat łatwo zauważyć, że niezależnie od wyboru przeciwnika dominującą strategią każdego gracza jest „odmowa”. Para strategii (O, O) jest równowagą Nasha (RN) tej gry. Paradoksalnie równowaga ta odpowiada wygranej (k, k) , która jest daleka od rozwiązania optymalnego w sensie Pareto, którym jest wynik (w, w) . Sposobem uzyskania rozwiązania optymalnego jest obustronna współpraca (W, W) . Jednak taka gra wymaga wzajemnego zaufania graczy, gdyż każde odstępianie od tej strategii daje odmawiającemu nagrodę w postaci pokusy do zdrady z , a drugiemu karę w postaci wypłaty frajera f . Jeśli gra w DW toczy się pomiędzy osobami, które nie mają do siebie zaufania – a taka sytuacja społeczna jest powszechna – to najczęstszym wynikiem gry jest obustronna kara za brak współpracy. Gra ma naturalne rozszerzenie do wieloosobowego DW, w którym zasadniczy dylemat pozostaje taki sam, jak w przypadku dwuosobowym. Z punktu widzenia praktycznych zastosowań istotnym rozszerzeniem gry jest jej iterowana wersja [Hamilton i in. 1981], dla której strategię graczy zależą od historii wcześniejszych rozgrywek.

2. Definicja gry kwantowej

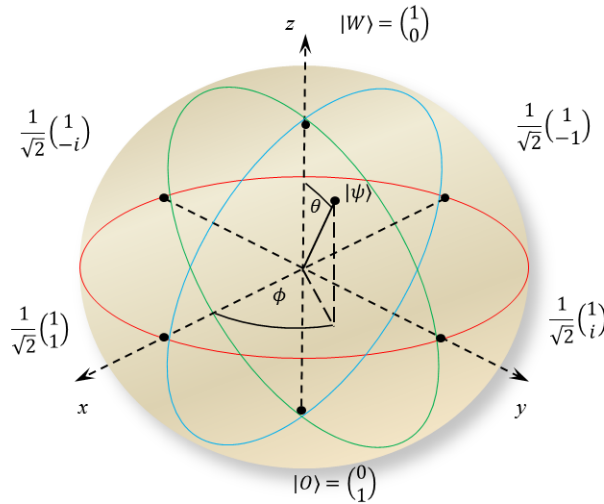
Psychologia eksperymentalna pokazuje, że realne decyzje ludzkie w sytuacji typu DW są często niezgodne z klasyczną RN. Niektórzy badacze dowodzą, że lepiej od klasycznych do wyjaśnienia decyzji ludzkich nadają się kwantowe metody opisu podejmowania decyzji [Busemeyer i in. 2006; Pothos i in. 2009]. Wraz z rozwojem badań na temat kwantowego przetwarzania informacji DW doczekał się swej kwantowej wersji [Eisert i in. 1999]. W tym ujęciu strategię graczy są operatorami w pewnej przestrzeni wektorowej zwanej sferą Blocha. Przestrzeń ta to zbiór kubitów – unormowanych wektorów o współczynnikach zespolonych rozpiętych na dwuelementowej bazie $\{|W\rangle, |O\rangle\}$, które, z dokładnością do fazy, można przedstawić w postaci:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|W\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|O\rangle, \quad (1)$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$ oraz $\phi \in [-\pi, \pi]$ (rys. 1).

Kubity $|W\rangle$ oraz $|O\rangle$ to kwantowe stany czyste reprezentujące „współpracę” i „odmowę”. Zgodnie z zasadami mechaniki kwantowej kubit (1) jest superpozycją dwu stanów kwantowych. Oznacza to, że dopóki nie dokonamy pomiaru, nie możemy stwierdzić, w którym z dwu stanów kubit tak naprawdę się

znajduje. Jedyne, co możemy powiedzieć, to że pomiar da wynik $|W\rangle$ z prawdopodobieństwem $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ oraz wynik $|O\rangle$ z prawdopodobieństwem $\sin^2 \frac{\theta}{2}$.



Rys. 1. Sfera Blocha z oznaczonym położeniem kubitów $|W\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – „współpraca”, $|O\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – „odmowa” oraz kubitów leżących w płaszczyźnie x-y i przecinających osie

W wyniku pomiaru następuje tzw. kolaps funkcji falowej kubitów, która z postaci (1) przechodzi w stan $|W\rangle$ lub $|O\rangle$. Przykładowo wszystkie kubity na równiku sfery Blocha (czerwona linia na rys. 1) reprezentują stan kwantowy, który w wyniku pomiaru kolapsuje do stanu $|W\rangle$ lub $|O\rangle$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Analogiczna sytuacja ma miejsce w znanym przykładzie z „kotem Schrödingera” – w tym przypadku stany $|W\rangle$ i $|O\rangle$ odnoszą się do „stanu witalności” kota.

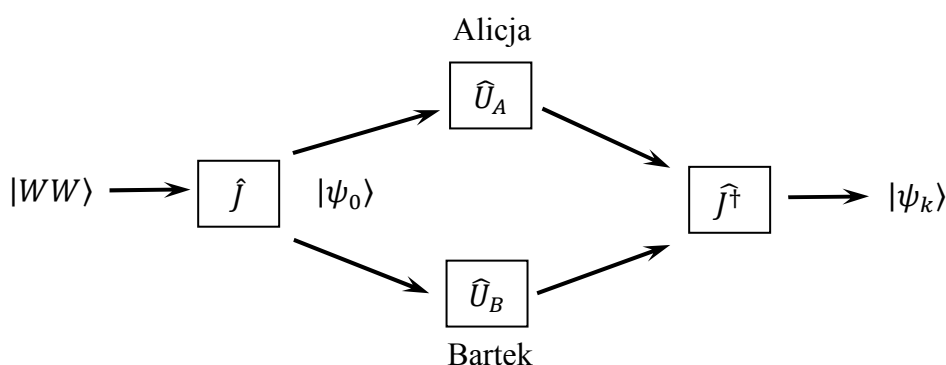
W kwantowej teorii gier to jednak nie kubity $|W\rangle$ ani $|O\rangle$ odpowiadają strategiom graczy. Strategiami są transformacje unitarne \hat{U}_A – dla Alicji oraz \hat{U}_B – dla Bartka działające na pewnym, specjalnie przygotowanym i znanym obu graczom, splątanym stanie kwantowym $|\psi_0\rangle = \hat{J}|WW\rangle$. Transformacje te są w ogólnej postaci obrotami na sferze Blocha $\hat{U}_X \in SU(2)$, określonymi przez macierze unitarne:

$$\hat{U}(\theta, \phi, \alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & e^{i\alpha} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\alpha} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

gdzie $\hat{U}_X = \hat{U}(\theta_X, \phi_X, \alpha_X)$, $\theta_X \in [0, \pi]$ oraz $\alpha_X, \phi_X \in [-\pi, \pi]$, $X = A, B$.

W szczególnym przypadku, gdy obrót jest określony tylko przez kąt θ , tj. $\alpha = \phi = 0$, można go wyrazić jako $\tilde{U}(\theta) = \hat{U}(\theta, 0, 0) = \cos \frac{\theta}{2} \hat{W} + \sin \frac{\theta}{2} \hat{O}$. Macierz jednostkowa $\hat{W} \equiv \tilde{U}(0)$ odpowiada strategii „współpraca”, a macierz $\hat{O} \equiv \tilde{U}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (zamieniająca kubity $|W\rangle$ i $|O\rangle$) odpowiada strategii „odmowa”. Strategia $\tilde{U}(\theta)$ jest równoważna klasycznej strategii mieszanej, dla której prawdopodobieństwa obu strategii czystych W oraz O wynoszą odpowiednio $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ i $\sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Gra kwantowa, jako że dotyczy dwojga graczy, toczy się w przestrzeni par kubitów, po jednym dla każdego gracza, które są ze sobą skorelowane poprzez mechanizm splątania kwantowego (rys. 2).



Rys. 2. Schemat kwantowego DW

Gra taka może być fizycznie zrealizowana przez komputer kwantowy realizujący powyższy algorytm zależny od strategii graczy. Algorytm taki został zrealizowany eksperymentalnie [Du i in. 2002] na dwukubitowym komputerze kwantowym opartym na jądrowym rezonansie magnetycznym. Szczegóły jego działania, tj. fizyczna implementacja algorytmu kwantowego, nie są istotne dla zrozumienia gry kwantowej i w niniejszym artykule zostaną pominięte.

Stan początkowy gry jest parą kubitów $|WW\rangle$, z których pierwszy jest stanem Alicji, a drugi stanem Bartka. Wektory bazowe przestrzeni par kubitów: $|WW\rangle$, $|WO\rangle$, $|OW\rangle$, $|OO\rangle$ są stanami czystymi. Dla wygody rachunkowej oznaczymy je jako wektory: $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ czterowymiarowej przestrzeni stanów. Na stan początkowy $|WW\rangle$ działa operator splatający, zdefiniowany w tej przestrzeni jako $\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{I} + i\sigma_x \otimes \sigma_x)$, gdzie $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ jest jedną z macierzy Pauliego. W wyniku tego działania otrzymu-

jemy $\hat{f} |WW\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |WW\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |OO\rangle$, czyli stan splątany. Kolejno na uzyskany wynik działa iloczyn prosty operatorów \hat{U}_A i \hat{U}_B reprezentujących kwantowe strategie Alicji i Bartka. Przed pomiarem stanu końcowego działamy jeszcze operatorem rozplatającym \hat{f}^\dagger . Stan końcowy $|\psi_k\rangle$ jest więc ostatecznie dany przez:

$$|\psi_k\rangle = \hat{f}^\dagger (\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B) \hat{f} |WW\rangle \quad (3)$$

i jest na ogół stanem splątany:

$$|\psi_k\rangle = p_{WW} |WW\rangle + p_{WO} |WO\rangle + p_{OW} |OW\rangle + p_{OO} |OO\rangle, \quad (4)$$

gdzie $|p_{WW}|^2, \dots, |p_{OO}|^2$ są prawdopodobieństwami, że pomiar dokonany w końcowym stanie mieszanym (4) da jeden z czterech możliwych wyników.

Wartość oczekiwana wypłaty Alicji $\$A$ w grze kwantowej jest średnią ważoną czterech klasycznych wartości w, f, z i k z macierzy wypłat (tabela 1):

$$\$A = w |p_{WW}|^2 + f |p_{WO}|^2 + z |p_{OW}|^2 + k |p_{OO}|^2, \quad (5)$$

gdzie wagami są kwantowe prawdopodobieństwa odpowiednich stanów czystych, z dokładnością do fazy równe [Chen i in. 2006]:

$$\begin{aligned} p_{WW} &= \cos \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \cos(\phi_A + \phi_B) - \sin \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} \sin(\alpha_A + \alpha_B), \\ p_{WO} &= \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \cos(\alpha_A - \phi_B) - \cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} \sin(\phi_A - \alpha_B), \\ p_{OW} &= \sin \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \sin(\alpha_A - \phi_B) + \cos \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} \cos(\phi_A - \alpha_B), \\ p_{OO} &= \cos \frac{\theta_A}{2} \cos \frac{\theta_B}{2} \sin(\phi_A + \phi_B) + \sin \frac{\theta_A}{2} \sin \frac{\theta_B}{2} \cos(\alpha_A + \alpha_B). \end{aligned}$$

Wartość oczekiwaną wypłaty Bartka otrzymamy ze wzoru (5) przez zamianę rolami $f \leftrightarrow z$.

Zwróćmy uwagę, że sytuację kwantową można jednak symulować poprzez klasyczne obliczanie odpowiednich prawdopodobieństw i podstawienie ich do wzoru (5). Uzyskany wynik będzie taki sam, jak średni wynik gry kwantowej rozgrywanej wielokrotnie. W przypadku urządzenia kwantowego, które splata kubity oraz dokonuje odpowiednich przekształceń unitarnych (3), wynik gry poznany przez pomiar stanu końcowego (4), który w wyniku kolapsu funkcji falowej da jeden z czterech możliwych stanów z właściwym prawdopodobieństwem.

stwem. W tym przypadku również można użyć urządzeń klasycznych do losowania jednego z czterech możliwych stanów czystych $|WW\rangle$, $|WO\rangle$, $|OW\rangle$, $|OO\rangle$. Dzięki temu, że gracze wykorzystują strategie kwantowe, splątanie daje możliwości wzajemnego oddziaływania na siebie graczy, które nie ma odpowiednika w grach klasycznych.

3. Kwantowy DW w granicy klasycznej

Gra kwantowa przechodzi w grę klasyczną, jeżeli strategie (2) nie zawierają zespolonych współczynników fazowych $\alpha = \phi = 0$. Rzeczywiście, operator splątujący \hat{f} jest tak dobrany, aby komutował z iloczynem prostym $\tilde{U}_A \otimes \tilde{U}_B$ każdej pary operatorów klasycznych, ale $\hat{f}^\dagger \hat{f} = \hat{I}$, więc $|\psi_k\rangle = (\tilde{U}_A \otimes \tilde{U}_B) |WW\rangle$ i wartość oczekiwana wypłaty Alicji (5) wynosi:

$$\begin{aligned} \$_A = & w \cos^2 \frac{\theta_A}{2} \cos^2 \frac{\theta_B}{2} + f \cos^2 \frac{\theta_A}{2} \sin^2 \frac{\theta_B}{2} + \\ & + z \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \cos^2 \frac{\theta_B}{2} + k \sin^2 \frac{\theta_A}{2} \sin^2 \frac{\theta_B}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

co daje wynik jak w klasycznej grze, kiedy obaj gracze wybierają strategie mieszane (tabela 2).

Tabela 2

Macierz wypłat kwantowego Dylematu Więźnia w granicy klasycznej $\alpha_X = \phi_X = 0$ dla $X = A, B$,
gdy gracze grają strategiami mieszanymi wyznaczonymi przez θ_A i θ_B

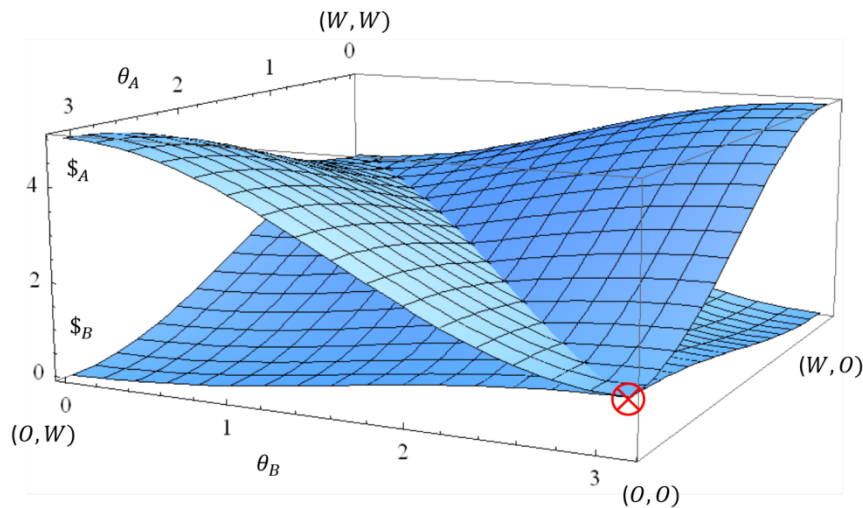
		Bartek	
		W $\left(\cos^2 \frac{\theta_B}{2}\right)$	O $\left(\sin^2 \frac{\theta_B}{2}\right)$
Alicja	W $\left(\cos^2 \frac{\theta_A}{2}\right)$	(w, w)	(f, z)
	O $\left(\sin^2 \frac{\theta_A}{2}\right)$	(z, f)	(k, k)

Wypłaty graczy należy pomnożyć przez prawdopodobieństwa wyboru poszczególnych strategii (liczby w nawiasach).

Jeśli na przykład Alicja wybierze współpracę $\theta_A = 0$, a Bartek jej odmówi $\theta_B = \pi$, to wynik gry będzie (f, z) , czyli wygrana Bartka. Jedyna różnica pomiędzy klasycznym DW a granicą klasyczną kwantowego DW polega na tym, że w tym pierwszym przypadku gracz wykorzystujący strategię mieszaną sam

musi dokonać losowania, a następnie wybrać wylosowaną opcję W lub O . Po między losowaniem a wyborem opcji jest chwila, w czasie której gracz może zmienić zdanie (i zadany rozkład prawdopodobieństwa) lub przeciwnik może przechwycić informację o planowanym ruchu (i adekwatnie zareagować). W przypadku kwantowym gracz jedynie decyduje się na wybór swojej strategii danej przez kąt θ , a całą resztę wykonuje komputer kwantowy. Nie ma możliwości przechwycenia informacji kwantowej przez drugą stronę – każda taka próba zakończyłaby się kolapsem funkcji falowej i przedwczesnym zakończeniem gry.

W przypadku klasycznego DW równowagą Nasha jest para strategii (O, O) . Łatwo to zobaczyć po narysowaniu funkcji wypłat obu graczy w zależności od kątów $\theta_A, \theta_B \in [0, \pi]$ (por. rys. 3, gdzie założyliśmy $z = 5, w = 3, k = 1$ i $f = 0$).



Kąt, gdzie $\theta = 0$ odpowiada „współpracy”, a $\theta = \pi$ „odmowie”. Wypłaty $\$A$ i $\$B$ są rosnącymi funkcjami θ_A i θ_B , a ich wspólne maksimum odpowiada równowadze Nasha (czerwony znacznik) w punkcie (O, O) .

Rys. 3. Wypłaty graczy klasycznego DW parametryzowane kątami $\theta_A, \theta_B \in [0, \pi]$

Punkt $\theta_A = \theta_B = \pi$ odpowiadający obustronnej odmowie (O, O) jest jedyną równowagą Nasha klasycznego DW, gdyż obie funkcje wypłat $\$A(\theta_A)$ i $\$B(\theta_B)$ rosną wraz ze swoimi argumentami, osiągając wspólne maksimum tylko w tym jedynym punkcie.

Jeśli jeden z graczy gra klasycznie, np. $\tilde{U}(\theta)$, to drugi, który wykorzystuje kwantowe strategie, może zagrać $\tilde{U}\left(\theta + \pi, 0, -\frac{\pi}{2}\right)$. Jak łatwo sprawdzić (5), wynik gry będzie w tym przypadku równy (f, z) na korzyść gracza kwantowego. Pokazuje to przewagę strategii kwantowej nad klasyczną – niezależnie od użytej

strategii klasycznej gracz kwantowy zawsze znajdzie najlepszą odpowiedź w postaci strategii, która daje mu maksymalną wygraną f , a gracz klasycznego pozostawi z minimalną wypłatą z . Taka sytuację jednak trudno uważać za rozwiązanie gry, gdyż gracz pierwszy, dysponując większą ilością strategii, jest uprzywilejowany.

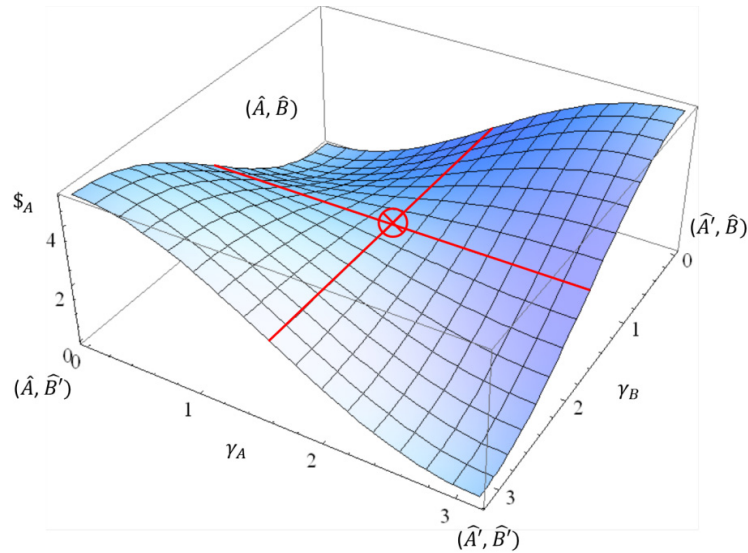
4. Równowagi Nasha kwantowego DW

Strategie kwantowe dają jednak dużo większe bogactwo możliwych wyników, niemożliwych do osiągnięcia za pomocą strategii klasycznych. Załóżmy, że Alicja wybiera dowolną strategię kwantową $\hat{A} = \hat{U}(\theta_A, \phi_A, \alpha_A)$. Bartek może wybrać strategię $\hat{B} = \hat{U}(\theta_B, \phi_B, \alpha_B) = \hat{U}(\theta_A + \pi, \alpha_A, \phi_A - \frac{\pi}{2})$. Zauważmy, że niezależnie od wyboru Alicji, ruch Bartka daje współczynniki (4) $p_{WW} = p_{OW} = p_{OO} = 0$ oraz $|p_{WO}| = 1$. Transformacja użyta przez Bartka „unieważnia” zatem dowolny ruch Alicji i doprowadza do sytuacji, że końcową strategią Alicji zapisaną w $|\psi_k\rangle$ jest „współpraca”, podczas gdy Bartek gra „odmowę”. Wynikiem tej gry jest maksymalna wygrana Bartka $(\$_A, \$_B) = (f, z)$. Jednak gra kwantowa jest symetryczna i Alicja może odpowiedzieć na strategię Bartka \hat{B} strategią $\hat{A}' = \hat{U}(\theta'_A, \phi'_A, \alpha'_A) = \hat{U}(\theta_A, \phi_A - \frac{\pi}{2}, \alpha_A - \frac{\pi}{2})$. Tym razem jedynym niezerowym współczynnikiem $|\psi_k\rangle$ jest $|p_{OW}| = 1$, czyli teraz Alicja gra „odmowę”, podczas gdy Bartek gra „współpracę” i wypłata odwraca się $(\$_A, \$_B) = (z, f)$. Dla Bartka najlepszą odpowiedzią na strategię Alicji \hat{A}' jest $\hat{B}' = \hat{U}(\theta'_B, \phi'_B, \alpha'_B) = \hat{U}(\theta_A + \pi, \alpha_A - \frac{\pi}{2}, \phi_A - \pi)$, gdyż wynik gry jest znowu $(\$_A, \$_B) = (f, z)$. W końcu najlepszą odpowiedzią na \hat{B}' jest pierwotna strategia Alicji, która przywraca jej wygraną $(\$_A, \$_B) = (z, f)$. Załóżmy teraz, że Alicja wybierze strategię mieszającą obie swoje strategie $\cos^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A} + \sin^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A}'$, $\gamma_A \in [0, \pi]$, a Bartek postąpi podobnie, grając $\cos^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B} + \sin^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B}'$, $\gamma_B \in [0, \pi]$. Wartość oczekiwana wygranej Alicji (5) jest równa:

$$\begin{aligned} \$_A = & f \left(\cos^2 \frac{\gamma_A}{2} \cos^2 \frac{\gamma_B}{2} + \sin^2 \frac{\gamma_A}{2} \sin^2 \frac{\gamma_B}{2} \right) + \\ & + z \left(\cos^2 \frac{\gamma_A}{2} \sin^2 \frac{\gamma_B}{2} + \sin^2 \frac{\gamma_A}{2} \cos^2 \frac{\gamma_B}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Zauważmy, że suma wygranych Alicji i Bartka w tej grze jest stała i wynosi $\$_A + \$_B = z + f$. Na rysunku 4 przedstawiono wypłatę Alicji przy założeniu, że: $z = 5$, $w = 3$, $k = 1$ i $f = 0$, wypłata Bartka jest równa $5 - \$_A$. Gra ma

jedną równowagę Nasha dla $\gamma_A = \gamma_B = \frac{\pi}{2}$, w tym punkcie wypłaty graczy są $\$A = \$B = \frac{f+z}{2}$ i żaden z graczy nie powiększy swojej wypłaty przez jednostronną zmianę swojej strategii [Flitney i in. 2002]. Wystarczy, że jeden z graczy zastosuje strategię $\gamma_X = \frac{\pi}{2}$, aby wygrana obu była równa $\frac{f+z}{2}$ i niezależna od strategii drugiego (czerwone linie na rys. 4).



Rys. 4. Wypłata Alicji dla kwantowego DW, w którym przeciwnicy grają strategiami mieszanymi $\cos^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A} + \sin^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A}'$ i $\cos^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B} + \sin^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B}'$, gdzie $\gamma_A, \gamma_B \in [0, \pi]$. Gra ma jedną RN w punkcie siodłowym $\gamma_A = \gamma_B = \frac{\pi}{2}$ (czerwony znacznik)

Gra w tej postaci sprowadza się więc do gry o sumie stałej, a jej rozwiązaniem jest punkt siodłowy. Kwantowy DW ma nieskończenie wiele równowag Nasha, każdą wyznaczoną przez trójkę pierwotnych strategii Alicji $(\theta_A, \phi_A, \alpha_A)$. Pokazaliśmy zatem, że odpowiedni wybór mieszanych strategii kwantowych może zapewnić obu graczom wynik tylko nieco gorszy od wzajemnej współpracy (pamiętajmy, że $w > \frac{z+f}{2}$ z definicji DW). Biorąc jednak pod uwagę, że w grze klasycznej jedyną równowagą Nasha jest wynik (k, k) , gra kwantowa daje graczom dużo korzystniejszą równowagę – nieosiągalną w grze klasycznej.

Zauważmy, że jeśli w szczególnym przypadku ustalimy $(\theta_A, \phi_A, \alpha_A) = (0, 0, 0)$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}, \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -i\hat{\sigma}_x \quad (8)$$

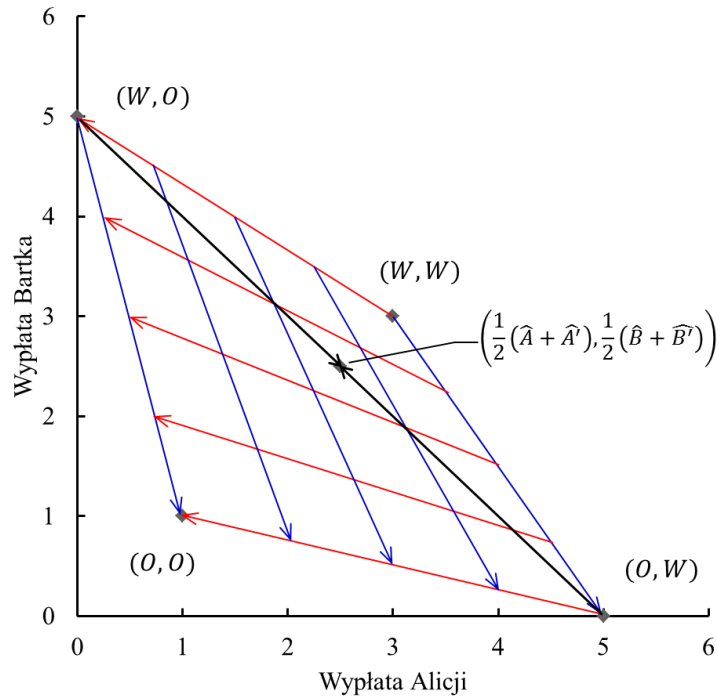
oraz:

$$\hat{A}' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_z, \hat{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\hat{\sigma}_y \quad (9)$$

to strategię $\hat{A}, \hat{A}', \hat{B}, \hat{B}'$, z dokładnością do stałej, sprowadzają się do czterech macierzy (macierz jednostkowa plus trzy macierze Pauliego) z grupy macierzy unitarnych $SU(2)$. Macierze Pauliego są generatorami obrotów o kąt π wokół odpowiednich osi (rys. 1).

5. Czy można wykorzystać kwantowe równowagi DW?

Na rysunku 5 przedstawiono diagram użyteczności DW (dla $z = 5$, $w = 3$, $k = 1$ i $f = 0$) z zaznaczeniem czterech klasycznych strategii $(W, O), (W, W), (O, W)$ i (O, O) . Seria linii tworzących widzianą pod kątem szachownicę odpowiada parom klasycznych strategii graczy (θ_A, θ_B) o stałym θ_A (linie czerwone) i stałym θ_B (linie niebieskie). Strzałki wskazują preferencje graczy i jedyną klasyczną równowagę Nasha w punkcie (O, O) . Czarna linia łącząca punkty (W, O) i (O, W) odpowiada grze o stałej sumie $\$A + \$B = z + f = 5$ i zawiera wszystkie wypłaty kwantowych strategii $\cos^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A} + \sin^2 \frac{\gamma_A}{2} \hat{A}'$ Alicji oraz $\cos^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B} + \sin^2 \frac{\gamma_B}{2} \hat{B}'$ Bartka.



Niezależnie od strategii mieszanej Alicji (linie czerwone) dla Bartka najkorzystniejszą strategią (strzałki) jest O , podobnie w przypadku strategii mieszanych Bartka (linie niebieskie) dla Alicji najkorzystniejszą strategią jest O . Kwantowy DW ma równowagę Nasha dla pary strategii $\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}'), \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{B}')$ korzystniejszą od klasycznego (O, O) .

Rys. 5. Diagram użyteczności DW dla $z = 5$, $w = 3$, $k = 1$ i $f = 0$

Jak wykazaliśmy w poprzednim rozdziale, jedyna równowaga Nasha odpowiada w tym przypadku parze strategii $\left(\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{A}'), \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{B}')$. Równowaga ta daje obu graczom wygraną $\frac{f+z}{2} = 2,5$, korzystniejszą od klasycznej równowagi dzięki charakterystycznemu splątaniu klasycznych strategii (W, O) i (O, W) niemożliwego do uzyskania za pomocą strategii klasycznych.

Sprowadzenie DW do gry o stałej sumie jest możliwe tylko kwantowo. Analiza tego rozwiązania pokazuje, że jego istotą jest specyficzna korelacja rozwiązań typu „współpraca” – „odmowa” w taki sposób, aby gracze nie potrafili przewidzieć, kiedy ich strategia doprowadzi do jednej bądź do drugiej opcji. Jeśli Alicja wybiera strategię \hat{A} , to nie wie, czy Bartek odpowie jej \hat{B} czy \hat{B}' , tym samym nie wie, czy jej ruch jest „współpracą” czy „odmową”. To samo dotyczy strategii \hat{A}' oraz sytuacji Bartka. Przy takim wyborze strategii kwantowy DW

srowadza się więc do gry o sumie zerowej w wybór strony monety: dwaj gracze niezależnie od siebie wybierają orła lub reszkę; Alicja wygrywa, jeśli wybrane strony są różne, a Bartek – jeśli są takie same (z ang. „matching pennies”). Gra ta jest bardziej znana (w wersji z potrójnym wyborem) jako „papier, nożyce, kamień”. Jak wiadomo, nie ma ona rozwiązania w strategiach czystych, a jej jedyną równowagą Nasha jest strategia losowa – wybór dowolnej opcji z jednakowym prawdopodobieństwem. Jeśli jeden z graczy zastosuje tę strategię, to drugi, niezależnie od swojej, nie może podwyższyć wyniku, którego wartość oczekiwana wynosi w tym przypadku zero.

W naturalny sposób pojawia się pytanie, czy kwantowa wersja DW może się przyczynić do rozwiązywania typowych sytuacji z życia codziennego, które mają charakter dylematu więźnia. Przykłady z innych dziedzin wskazują, że strategie kwantowe mogą lepiej niż klasyczne rozwiązywać problemy gier rynkowych i giełdy [Piotrowski i in. 2002], aukcji i konkursów [Piotrowski i in. 2008] czy hazardu [Goldenberg i in. 1999]. Jak wynika z niniejszego artykułu, rozwiązanie dylematu za pomocą kwantowych strategii może dać lepsze rezultaty niż klasyczne rozwiązania. Klasyczny DW w nieuchronny sposób doprowadza graczy do jedynego racjonalnego rozwiązania obustronnej odmowy współpracy i w konsekwencji kary za brak współpracy, podczas gdy jego kwantowy odpowiednik ma równowagi Nasha na dużo korzystniejszym poziomie średniej z „pokusy do zdrady” i „nagrody frajera”. Czy zatem strategie kwantowe mogą być praktycznie wykorzystane?

Jak wiemy, jednym z pozytywnych sposobów, w jaki DW reguluje procesy rynkowe, jest równowaga cen, tzw. piękna równowaga Nasha. Dzięki niej firmy, które chciałyby sprzedawać swoje towary drożej, de facto obniżają ceny, aby optymalizować swoje zyski [Dixit i in. 2009]. Dylemat więźnia polega tu na tym, że obopólna (lub wielostronna) współpraca, polegająca na utrzymaniu wysokich cen, jest w sytuacji rynkowej niemal niemożliwa, bo zawsze znajdzie się firma, która zechce sprzedawać taniej („odmowa”), rekompensując sobie niższe ceny zwiększoną ilością klientów i pozostawiając „na lodzie” (tzn. bez klientów) droższego producenta („współpraca”). Jednak w niektórych przypadkach działanie mechanizmu DW jest w tej dziedzinie zaburzone, dochodzi do niego w przypadku tzw. zмовы cenowej. Znany jest przykład z lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku na rynku turbin w USA [Dixit i in. 2009]. Trzy firmy umówiły się, że będą stosować zawyżone ceny, lecz takie, aby, w zależności od terminu ogłoszenia przetargu, wygrała jedna z nich. Wygrany w danym przetargu brał wszystko (pokusa do zdrady), pozostali zostawali z niczym (nagroda frajera). Losowość terminów ogłaszania przetargów zapewniała, że wszyscy partnerzy zarabiali, każdy w stosownym terminie. Najważniejsze w całej sprawie było odpowiednie skorelowa-

nie firmy, która miała dany przetarg wygrać, z terminem jego ogłoszenia w taki sposób, aby zainteresowani nie mieli wątpliwości, a nikt poza nimi nie był w stanie przewidzieć algorytmu (bo zmowy cenowe są nielegalne). Gdyby partnerzy zmowy wykorzystali algorytm oparty na splątaniu kwantowym, żaden zewnętrzny obserwator nie byłby w stanie udowodnić im zmowy cenowej. Jednak dyrektorzy firm wylądowali w więzieniu, gdyż wykorzystali mniej wyszukany, a możliwy do odkrycia system korelujący – zwycięzcę przetargu wyłaniano na podstawie kalendarza księżycowego – ta czy inna firma wygrywała w zależności od ilości dni, które upłynęły od nowiu.

Pozytywnym przykładem działania, które znajduje analogię do rozwiązania kwantowego DW w zagadnieniach ekonomicznych, jest tzw. strategia szachowa w negocjacjach [Perrotin i in. 1994]. W strategii tej zakłada się, że niezbędnym elementem każdej negocjacji są obustronne ustępstwa, a sztuka negocjowania polega na ich umiejętnym doborze. Ustępstwa dotyczące poszczególnych kwestii (zmiennych) negocjacyjnych są skategoryzowane ze względu na ich ważność dla obu stron i naniesione na macierz strategii szachowej, której kolejne wiersze oznaczają kwestie: najważniejsze, średnio ważne i najmniej ważne dla Alicji. Kolumny w analogiczny sposób porządkują ważność kwestii dla Bartka. Zmienne, których ważność dla Alicji jest mniejsza niż dla Bartka, leżą poniżej przekątnej macierzy strategii, a te, których ważność dla Alicji jest większa niż dla Bartka, powyżej przekątnej [Szopa 2010]. Zastosowanie strategii szachowej polega m.in. na wzajemnej wymianie ustępstw tak, aby Alicja ustępowała w kwestiach poniżej, a Bartek w kwestiach powyżej przekątnej. Dzięki takiej dystrybucji ustępstw suma ich „ważności” jest minimalizowana, a wynik negocjacji zamiast klasycznego „spotkania w połowie drogi” zbliża się do rozwiązania optymalnego typu „wygrany-wygrany”. Analogia do równowagi kwantowego DW jest następująca: ustępstwa Alicji to jej „współpraca”, a Bartka „odmowa”, w przypadku ustępstw Bartka role się odwracają. Gracze, ustępując sobie kolejno, grają kwantową sekwencją $\hat{A} - \hat{B} - \hat{A}' - \hat{B}' - \dots$, gdzie każda kolejna para strategii oznacza ustępstwo jednej i wygraną drugiej strony. Sekwencyjna wymiana ustępstw nie jest niczym nowym w relacjach społecznych, wynika z głęboko zakorzenionej w naturze ludzkiej korelacji wzajemnych życzliwości, znanej w psychologii społecznej jako reguła wzajemności [Cialdini 1995].

Podsumowanie

Przeprowadzona w niniejszym artykule analiza pokazuje, że do zasymulowania strategii kwantowych w grach wystarczą klasyczne rachunki. Dzięki znajomości mechaniki kwantowej jesteśmy w stanie symulować zachowanie się cząstek kwantowych i, co za tym idzie, przewidywać wynik stosowania strategii kwantowych. Znając wynik działania tych algorytmów, nawet jeśli ich fizycznie nie implementujemy, możemy się starać je naśladować, aby wykorzystać szerszą klasę możliwych kwantowo rozwiązań gier. W artykule opisaliśmy dwa przykłady klasycznych procesów – zmowy cenowe oraz strategię szachową, które w dużym stopniu wykorzystują równowagi Nasha kwantowego DW.

Można zadać pytanie: jaki jest związek gier klasycznych ze zjawiskami kwantowymi? Jako teoria matematyczna, gry klasyczne okazują się być szczególnym przypadkiem gier kwantowych. Czy realne gry klasyczne, rozgrywane codziennie przez ludzi, mają jakiś związek z fizycznymi procesami kwantowymi? Odpowiedź na to pytanie wydaje się być twierdząca – takim procesem może być kolaps funkcji falowej. Według oszacowań [Albrecht i in. 2012] to fluktuacje kwantowe są przyczyną zjawisk makroskopowych, które uznajemy za losowe, takich jak np. rzut monetą lub kością. Według cytowanych autorów każde praktyczne użycie prawdopodobieństwa ma swoje źródło w zjawiskach kwantowych. Gdyby przyjąć taki punkt widzenia, to każde wykorzystanie w grze strategii mieszanej byłoby w istocie zjawiskiem kwantowym.

W grach kwantowych istotnym elementem mechanizmu gry jest splątanie. Czy to zjawisko również ma swój odpowiednik w realnej grze klasycznej? Czy obiekty makroskopowe, które są kontrolowane bądź tylko obserwowane przez nasze zmysły, mogą być splątane? Tego nie potrafimy udowodnić. Problemy z dekoherencją funkcji falowej powodują, że nawet na poziomie ściśle kontrolowanych eksperymentów, odbywających się w skrajnych rygorach odizolowania od otoczenia, trudno jest utrzymać dwa splątane kubity. Budowa komputera kwantowego, opartego na rejestrze wielu splątanych kubitów, poddanych unitarnym operacjom bramek kwantowych, i zdolnego do rozwiązywania za pomocą algorytmów kwantowych praktycznych problemów lub symulowania gier kwantowych jest prawdziwym wyzwaniem, które jednak współczesna fizyka nie bez sukcesów podejmuje [Vandersypen i in. 2001].

Bibliografia

- Albrecht A., Phillips D., 2012: Origin of Probabilities and Their Application to the Multiverse [Online]. Cornell University Library, <http://arxiv.org/pdf/1212.0953v1.pdf> [dostęp: 12.2012].
- Busemeyer J.R., Wang Z., Townsend J.T., 2006: Quantum Dynamics of Human Decision Making. „Journal of Mathematical Psychology”, Vol. 50, 220-241.
- Chen K., Hogg T., 2006: How Well Do People Play a Quantum Prisoner’s Dilemma. „Quantum Information Processing”, Vol. 5(1), 43-67.
- Cialdini R., 1995: Wywieranie wpływu na ludzi. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.
- Dixit A.K., Nalebuff B.J., 2009: Sztuka strategii. MT Biznes, Warszawa.
- Du J. et al., 2002: Experimental Realization of Quantum Games on Quantum Computer. „Physical Review Letters”, Vol. 88, 137902.
- Eisert J., Wilkens M., Lewenstein M., 1999: Quantum Games and Quantum Strategies. „Physical Review Letters”, Vol. 83, 3077, s. 3077.
- Flitney A.P., Abbott D., 2002: An Introduction to Quantum Game Theory. „Fluct. Noise Lett”, Vol. 2, R175-87.
- Flood M.M., Dresher M., 1952: Research Memorandum. RM-789-1-PR. RAND Corporation, Santa-Monica, Ca.
- Goldenberg L., Vaidman L., Wiesner S., 1999: Quantum Gambling. „Physical Review Letters”, Vol. 82, 3356.
- Hamilton W.D., Axelrod R., 1981: The Evolution of Cooperation. „Science”, Vol. 211, 1390-1396.
- Perrotin R., Heusschen P., 1994: Kupić z zyskiem. Poltext, Warszawa.
- Piotrowski E., Śładkowski J., 2008: Quantum Auctions: Facts and Myths. „Physica A”, 15, Vol. 387, 3949-3953.
- , 2002: Quantum Market Games. „Physica A”, 1-2, Vol. 312, 208-216.
- Pothos E.M., Busemeyer J.R., 2009: A Quantum Probability Explanation for Violations of ‘Rational’ Decision Theory. Proceedings of the Royal Society B., Vol. 276, 2171-2178.
- Straffin P.D., 2001: Teoria gier. WN Scholar, Warszawa.
- Szopa M., 2010: Teoria gier w negocjacjach. Skrypty dla studentów Ekonofizyki na Uniwersytecie Śląskim [Online]. http://el.us.edu.pl/ekonofizyka/index.php/Teoria_gier/strategie_taktyki_negocjacji.
- Vandersypen L.M.K. et al., 2001: Experimental Realization of Shor's Quantum Factoring Algorithm Using Nuclear Magnetic Resonance. „Nature”, 6866, Vol. 414, 883-887.

**WHY IS IT WORTH PLAYING
QUANTUM PRISONER'S DILEMMA?****Summary**

The Prisoner's Dilemma [PD] is the best known example of a two-person, simultaneous game, for which the Nash equilibrium is far from Pareto-optimal solutions. In this paper we define a quantum PD, for which player's strategies are defined as rotations of the $SU(2)$ group, parameterized by three angles. Quantum strategies are correlated through the mechanism of quantum entanglement and the result of the game is obtained by the collapse of the wave function. Classic PD is a particular case of the quantum game for which the set of rotations is limited to one dimension. Each quantum strategy can be, by appropriate choice of counter-strategy, interpreted as a "cooperation" or "defection". Quantum PD has Nash equilibria that are more favorable than the classic PD and close to the Pareto optimal solutions. With proper selection of strategies, quantum PD can be reduced to the classic, zero-sum, "matching pennies" game. In this paper we show examples of economic phenomena (price collusion, the chess strategy) that mimics the Nash equilibria of quantum PD.