

**Małgorzata Szerszunowicz**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# **ANALIZA ZDOLNOŚCI PROCESU O ZALEŻNYCH CHARAKTERYSTYKACH**

## **Wprowadzenie**

Statystyczna kontrola jakości ma na celu doskonalenie procesu produkcyjnego poprzez wykorzystanie metod probabilistycznych i statystycznych. Wśród najważniejszych narzędzi statystycznej kontroli jakości należy wyróżnić karty kontrolne, planowanie eksperymentów, analizę zdolności procesu i plany odbiorcze.

Aby określić stopień zgodności wymagań produkcyjnych z rezultatami procesu produkcyjnego, wykorzystuje się analizę zdolności procesu. Jako „zdolność” procesu należy rozumieć zdolność technologiczną realizowanego w praktyce procesu produkcyjnego do spełnienia wymagań projektowo-konstrukcyjnych produktu określonych przez wartości zadane zbioru parametrów. W literaturze określenie „zdolności” zastępuje się czasami pojęciem „wydolności” bądź „zdolności projektowej” procesu. Zatem analiza zdolności procesu jest badaniem zgodności pomiędzy wymaganiami projektu produktu a możliwościami procesu technologicznego. Celem niniejszego artykułu jest analiza problemu pomiaru zdolności procesów wielowymiarowych o zależnych charakterystykach, wykorzystująca konstrukcję pewnego wielowymiarowego wskaźnika zdolności procesu.

## **1. Wskaźniki zdolności procesu**

Analiza zdolności procesu ma istotny wpływ na jakość wytwarzanego produktu, o czym świadczą m.in. korzyści wynikające z poprawnej analizy zdolności procesu. Do podstawowych zalet stosowania tej analizy można zaliczyć możliwość (Montgomery, 1997):

- oceny stopnia spełnienia wymagań obserwowanego procesu odnośnie do granic tolerancji,
- wprowadzenia ewentualnych modyfikacji projektu,

- podjęcia działań w celu zmniejszenia wariacji charakterystyk procesu produkcyjnego,
- określenia wymagań odnośnie do rezultatów przy zastosowaniu nowych technologii,
- umożliwienia wyboru najlepszego produktu spośród oferowanych przez różnych dostawców,
- poprawnego ustalenia porządku produkcji, wówczas gdy poszczególne etapy procesu mają wpływ na tolerancję,
- ustalenia właściwych odstępów pomiędzy pobieraniem poszczególnych próbek z bieżącego procesu.

Należy zauważyć, że powyższe efekty stosowania analizy zdolności procesu odnoszą się do różnych etapów procesu produkcyjnego, co świadczy o jej istotnym znaczeniu.

Zdolność procesu produkcyjnego jest ściśle związana z ogólną oceną jakości produktu, na którą wpływ ma naturalna zmienność procesu w danym punkcie czasowym oraz zmienność obserwowanej charakterystyki w czasie (Kończak, 2007). Weryfikacja tak rozumianej zmienności procesu może się odbywać poprzez analizę histogramu, wykresu pudełkowego czy karty kontrolnej, co może być uznane za wstępną analizę zdolności procesu. Natomiast w praktyce przedsiębiorstw produkcyjnych powszechnie stosowane są liczbowe oceny zdolności procesu, a mianowicie wskaźniki zdolności procesu (ang. *process capability index*).

Wskaźniki zdolności procesu stanowią wiarygodną ocenę zdolności procesu wówczas, gdy spełnione są następujące założenia (Kończak, 2007):

- badany proces jest uregulowany i stabilny,
- charakterystyka opisująca badany proces ma rozkład normalny,
- pobrana próbka jest reprezentatywna,
- obserwacje do próby pobierane są w sposób niezależny.

Jeżeli powyższe założenia nie są jednocześnie spełnione, stosowanie klasycznych wskaźników zdolności procesu nie jest zasadne.

Najczęściej wykorzystywanym wskaźnikiem zdolności procesu jest znormalizowany wskaźnik  $C_p$ , który można opisać za pomocą następującego ilorazu:

$$C_p = \frac{\text{długość przedziału tolerancji}}{\text{długość przedziału obejmującego 99,73 \% wartości badanej cechy}}$$

Symbolicznie wskaźnik  $C_p$  można przedstawić w postaci

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1)$$

gdzie:

$USL$  – górna granica przedziału tolerancji,

$LSL$  – dolna granica przedziału tolerancji,

$\sigma$  – odchylenie standardowe obserwowanej zmiennej o rozkładzie normalnym.

Obszar zmienności cech, w którym produkt uznaje się za zgodny z wymaganiami jakościowymi wyznaczony jest przez wartości  $USL$  i  $LSL$  ustalone przez zleceniodawcę. W zależności od wartości wskaźnika  $C_p$  zdolność procesu można określić następująco (Iwasiewicz, 1999):

- $C_p < 1$  – niska względna zdolność procesu,
- $1 < C_p < 1,33$  – średnia względna zdolność procesu,
- $1,33 < C_p$  – wysoka względna zdolność procesu.

Zatem im większą wartość przyjmuje wskaźnik  $C_p$ , tym większa jest względna zdolność badanego procesu, przy czym należy podkreślić, że obecnie wymagania dotyczące zdolności procesów są znacznie większe, dlatego w wielu przypadkach umowne granice należałoby określić inaczej.

Wśród licznych modyfikacji wskaźnika zdolności  $C_p$  należy wyróżnić wskaźniki  $C_{pk}$  i  $C_{pm}$ . Wskaźnik  $C_{pk}$  dzięki swojej konstrukcji umożliwia określenie różnicy pomiędzy wartością średnią procesu a nominalnym poziomem przeciętnym, natomiast wskaźnik  $C_{pm}$  informuje o rozmieszczeniu wartości nominalnej procesu pomiędzy granicami obszaru tolerancji.

## 2. Analiza zdolności procesów produkcyjnych o wielu charakterystykach

Ocena zdolności procesu produkcyjnego zazwyczaj opiera się na analizie pojedynczej zmiennej najlepiej charakteryzującej badany proces. Jednak często rozważany proces produkcyjny wymaga weryfikacji spełnienia wymagań projektowo-konstrukcyjnych przez większą liczbę charakterystyk. Wówczas pełniejszy obraz przebiegu procesu dostarcza jego analiza wielowymiarowa.

W literaturze rozważa się liczne sposoby analizy zdolności procesu produkcyjnego opisanego przez więcej niż jedną charakterystykę. Zazwyczaj rozważania te sprowadzają się do przedstawienia postaci wielowymiarowych odpowiedników klasycznych wskaźników zdolności procesu (Kotz, Jonson, 1993).

Konstrukcja wielowymiarowych wskaźników zdolności procesu odnosi się bezpośrednio do jednowymiarowych wskaźników zdolności procesu, a więc do zależności pomiędzy obszarem specyfikacji a obszarem zawierającym 99,73%

obserwacji. Zatem konstrukcję wielowymiarowego wskaźnika zdolności procesu można opisać za pomocą następującego ilorazu:

$$C_p^{Mult} = \frac{\text{miara obszaru tolerancji}}{\text{miara obszaru obejmującego 99,73 \% wartości badanej cechy}}.$$

Ponadto charakterystyki procesu muszą spełniać wcześniej wspomniane założenia, w szczególności założenie dotyczące niezależności poszczególnych obserwacji. Niezależność w ujęciu wielowymiarowym może być rozumiana jako:

- niezależność pomiędzy poszczególnymi obserwacjami każdej ze zmiennych,
- niezależność pomiędzy rozkładami rozważanych charakterystyk.

Jeżeli zachodzi zależność pomiędzy poszczególnymi obserwacjami rozważanych charakterystyk, wtedy nawet jednowymiarowa analiza zdolności nie jest zasadna. Interesującym zagadnieniem jest analiza zdolności procesu charakteryzowanego przez zmienne zależne, kiedy to analiza zdolności polegająca na jednowymiarowej weryfikacji zdolności procesu może okazać się błędna ze względu na zależność pomiędzy zmiennymi. Wówczas w literaturze rozważa się wskaźnik zdolności procesu, będący ilorzem pola zmodyfikowanego obszaru specyfikacji i obszaru obejmującego 99,73% obserwacji badanych charakterystyk (Zahid, Sultana, 2008).

Niech proces produkcyjny będzie opisany za pomocą dwóch zmiennych mających rozkład normalny o parametrach  $\mu_i, \sigma_i$ , dla  $i = 1, 2$  i zadany współczynnikiem korelacji  $\rho_{12}$ . Wówczas w celu oceny zdolności badanego procesu należy określić obszar specyfikacji dla rozważanych charakterystyk. Niech obszar ten będzie zadany w postaci elipsy obejmującej  $q\%$  obserwacji pochodzących z procesu uregulowanego, przy czym wartość  $q\%$  jest ustalona przez zleceniodawcę. Dwuwymiarowy wskaźnik zdolności procesu można określić w postaci ilorazu:

$$C_p^M = \frac{\text{pole obszaru tolerancji obejmującego } q\% \text{ wartości badanej cechy z procesu uregulowanego}}{\text{pole obszaru obejmującego 99,73 \% wartości badanej cechy z procesu badanego}},$$

gdzie obszar obejmujący 99,73% wartości badanej cechy z procesu badanego również jest elipsą. Tak określony wskaźnik zdolności procesu pozwoli na weryfikację spełnienia wymagań projektowo-konstrukcyjnych określonych na podstawie danych pochodzących z procesu uregulowanego, w stosunku do badanego procesu.

### 3. Analiza zdolności dwuwymiarowego procesu produkcyjnego

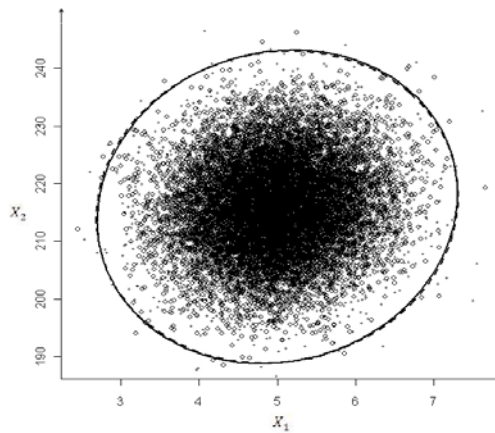
Rozważmy proces produkcyjny polegający na wytworzeniu elementów ceramicznych (Zahid, Sultana, 2008). Proces ten charakteryzowany jest przez zmienne pochodzące z dwuwymiarowego rozkładu normalnego:  $X_1$  – wysokość

i  $X_2$  – waga. Wiadomo, że tak określony, uregulowany proces produkcyjny ma następujące parametry:

$$\mu = [5, 216], \quad \sigma = [0,67, 7,92], \quad \rho_{12} = 0,08.$$

Ponadto zleceniodawca określił przedziały zmienności dla wysokości i wagi elementu, które są odpowiednio postaci (4, 6) oraz (190, 242).

Niech ustalony obszar specyfikacji określony na podstawie procesu uregulowanego będzie elipsą obejmującą 99,73% obserwacji. Pole tak określonego obszaru dla zadanego procesu produkcyjnego wynosi 9,61. Jeżeli z procesu uregulowanego zostanie pobrana odpowiednio liczna próba oraz określony zostanie obszar obejmujący 99,73% jej obserwacji, wówczas wskaźnik zdolności tak określonego procesu będzie bliski wartości 1, co potwierdza rys. 1.



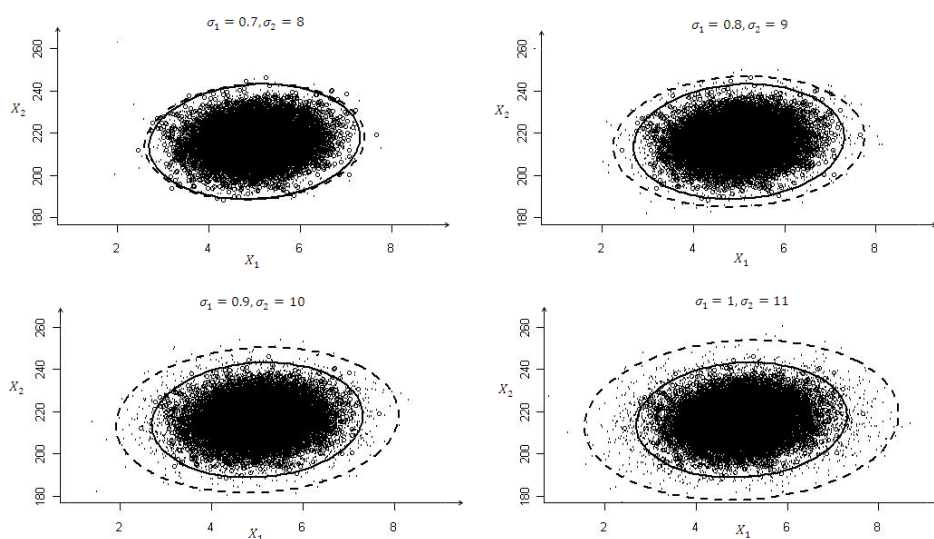
Rys. 1. Obszar specyfikacji obejmujący 99,73% obserwacji procesu uregulowanego wraz z obszarem obejmującym 99,73% obserwacji próby pochodzącej z procesu uregulowanego

Jednym z możliwych rozregulowań procesu produkcyjnego jest zmiana wartości odchyłeń standardowych poszczególnych zmiennych, czyli ich rozrzutu. Zatem rozważmy proces, w którym zarówno rozrzut pierwszej, jak i drugiej zmiennej rośnie. Wartości dwuwymiarowego wskaźnika zdolności procesu w zależności od wartości odchyłeń standardowych przedstawia tab. 1. Zauważmy, że wraz ze wzrostem odchyłeń standardowych poszczególnych zmiennych względna zdolność badanego procesu istotnie maleje, co potwierdza graficzna prezentacja obserwacji pochodzących z procesu badanego i procesu uregulowanego (rys. 2).

Tabela 1

Wartości dwuwymiarowego wskaźnika zdolności procesu w zależności od rosnących wartości odchyłeń standardowych procesu

$\sigma_1$	0,7	0,8	0,9	1
$\sigma_2$	8	9	10	11
$C_p^M$	0,9841	0,9256	0,8881	0,8586



Rys. 2. Graficzna prezentacja obszaru specyfikacji i obszarów obejmujących 99,73% obserwacji pochodzących z procesów o większym rozrzucie

W przypadku gdy rozrzut obserwacji badanego procesu maleje, wartość wskaźnika zdolności procesu rośnie, co potwierdzają obliczenia zamieszczone w tab. 2.

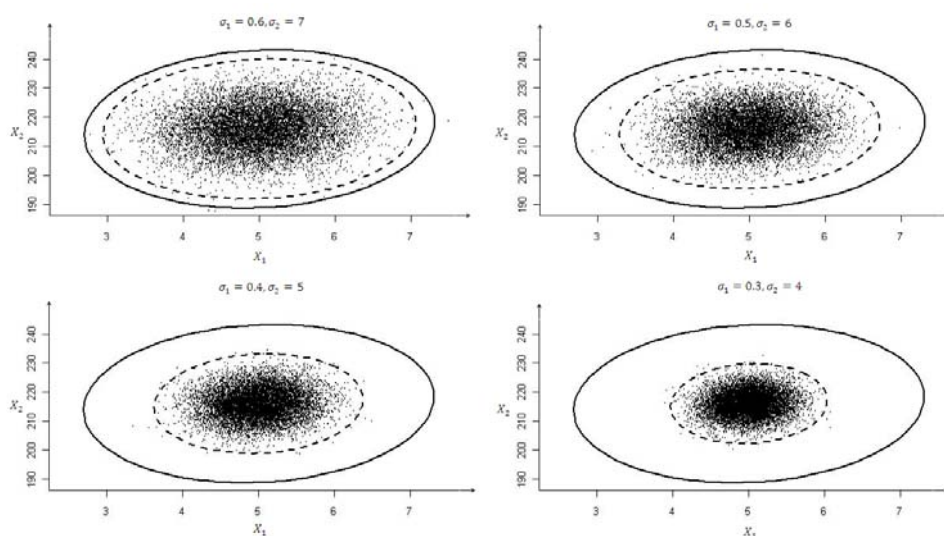
Tabela 2

Wartości dwuwymiarowego wskaźnika zdolności procesu w zależności od malejących wartości odchyłeń standardowych procesu

$\sigma_1$	0,6	0,5	0,4	0,3
$\sigma_2$	7	6	5	4
$C_p^M$	1,0351	1,1387	1,2452	1,4201

Istotnie, wartość miernika zdolności procesu maleje, ponieważ pole obejmujące 99,73% obserwacji pochodzących z procesu rozregulowanego maleje, co przedstawia rys. 3.

Jednym z istotnych rozregulowań procesu produkcyjnego jest zależność pomiędzy badanymi zmiennymi, zatem wartość współczynnika korelacji ma wpływ również na ocenę zdolności procesu. Rozważmy proces produkcyjny o parametrach  $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$  ustalonych dla procesu uregulowanego, natomiast o różnych wartościach współczynnika korelacji. Wówczas, w zależności od wartości współczynnika korelacji, wskaźnik zdolności procesu przyjmuje wartości przedstawione w tab. 3.



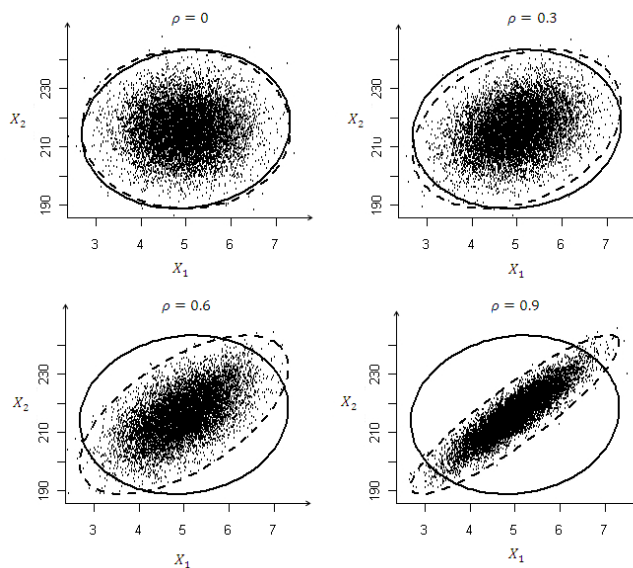
Rys. 3. Graficzna prezentacja obszaru specyfikacji i obszarów obejmujących 99,73% obserwacji pochodzących z procesów o mniejszym rozrzucie

Tabela 3

Wartości dwuwymiarowego wskaźnika zdolności procesu w zależności od wartości współczynnika korelacji

$\rho$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$C_p^M$	1,006	1,014	1,006	1,024	1,027	1,040	1,053	1,077	1,121	1,208

Łatwo można dostrzec, że wraz ze wzrostem współczynnika korelacji wzrasta wartość wskaźnika zdolności procesu i co za tym idzie względna zdolność procesu rośnie. Graficzną prezentację danych dla wybranych współczynników korelacji badanych zmiennych przedstawia rys. 4.



Rys. 4. Graficzna prezentacja obszaru specyfikacji i obszaru obejmującego 99,73% obserwacji pochodzących z procesów o różnych wartościach współczynnika korelacji

Warto podkreślić, że istotnym elementem w prowadzonych rozważaniach jest uwzględnianie zależności pomiędzy zmiennymi.

## Podsumowanie

Mierniki zdolności procesu produkcyjnego stanowią istotny element analizy zdolności procesu. Zazwyczaj są one określane dla zmiennych o rozkładach normalnych, zarówno w aspekcie jedno-, jak i wielowymiarowym. W przedstawionych rozważaniach dotyczących szczególnego przypadku dwuwymiarowego procesu produkcyjnego wykorzystanie proponowanego wskaźnika zdolności procesu pozwala na weryfikację spełnienia wymagań projektowo-konstrukcyjnych, również wtedy, gdy badane zmienne są zależne.



## Bibliografia

- Iwasiewicz A. (1999): *Zarządzanie jakością*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa – Kraków.
- Kończak G. (2007): *Metody statystyczne w sterowaniu jakością produkcji*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Kotz S., Johnson N.L. (1993): *Process Capability Indices*. Chapman & Hall, London.
- Montgomery D.C. (1997): *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York.
- Zahid A., Sultana A. (2008): *Assesment and Comparison of Multivariate Process Capability Indices in Ceramic Industry*. „Journal of Mechanical Engineering”, Vol. ME39, No. 1.

## PROCESS CAPABILITY ANALYSIS FOR PROCESSES WITH DEPENDENT CHARACTERISTICS

### Summary

One of the most important tools of statistical quality control is a process capability analysis. In order to measure process capability the most used are indices constructed for one-dimensional characteristic of production process. However often production process is described by more than one characteristic. One should then conduct a multidimensional assessment of process capability with appropriately designed indicators.

The aim of this article is to analyze the problem of process capability measure of multi-dimensional process with dependent characteristics, using a proposed multi-dimensional process capability index.