

Michał Stachura
Barbara Wodecka

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

OPTYMALIZACJA PORTFELA Z ZASTOSOWANIEM KOPULI NIESYMETRYCZNYCH

Wprowadzenie

Analizy dotyczące portfeli inwestycyjnych w sposób szczególnie wymagają uwzględnienia współzależności występujących pomiędzy składowymi portfela. Fakt ten ma podstawowe znaczenie z punktu widzenia podejmowania właściwych decyzji ze względu na dwa zasadnicze kryteria, jakie stanowią maksymalizacja zysku i minimalizacja ryzyka. Niewłaściwe wychwycenie zależności pomiędzy składowymi portfela może sprawić, że ryzyko będzie znacząco niedoszacowane.

Jednym z podejść, pozwalającym na ujęcie współzależności między składowymi portfela jest modelowanie za pomocą kopuli. Taka metodologia jest efektywna i dość popularna. Daje się ona stosować zarówno w statycznym podejściu do danych, w którym analizowane są bezwarunkowe stopy zwrotu, jak i w podejściu dynamicznym, uwzględniającym m.in. autokorelacje, czy też warunkową zmienność. Należy jednak zwrócić uwagę, że stosowane w praktyce i opisywane od strony teoretycznej modele bazują jedynie na kopulach symetrycznych, a do tego w zdecydowanej większości przypadków na archimedesowych. Mimo że modele te dają dość satysfakcjonujące efekty, to jednak ich istota stoi w sprzeczności z faktem, że składowe portfela (na ogół) nie mogą być traktowane jako wzajemnie zastępowalne elementy. Wobec tego symetria wektora losowego jest tu rozumiana jako symetria kopuli (w sensie wymienności jej argumentów) łączącej współrzędne tego wektora. Oznacza to, że wektor (Y_1, \dots, Y_k) jest symetryczny, jeżeli wektory $(F_1(Y_1), \dots, F_k(Y_k))$ i $(F_{\tau(1)}(Y_{\tau(1)}), \dots, F_{\tau(k)}(Y_{\tau(k)}))$ mają ten sam rozkład dla dowolnej permutacji τ , gdzie F_i są dystrybuantami brzegowymi.

W związku z powyższym w opracowaniu zaproponowano odejście od modelowania zależności między rozkładami brzegowymi przy użyciu kopuli symetrycznych na rzecz modelowania kopułami niesymetrycznymi, które służą opisowi zależności między brzegowymi rozkładami stóp zwrotu pojedynczych walorów tworzących portfel. W tym kontekście celem opracowania jest prezentacja możliwości efektywnego zastosowania kopuli niesymetrycznych do optymalizacji portfela. Prezentacja ta jest prowadzona na podstawie przykładowego, arbitralnie wybranego portfela dwuskładnikowego.

Od kilku lat w literaturze zaczyna się odnotowywać fakt, że modele bazujące na kopułach symetrycznych są nieadekwatne. Prezentowane przez autorów ujęcia wywodzą się z grubsza z dwóch nurtów. Pierwszy uwypukla konieczność stosowania kopuli o różnych dolnym i górnym współczynnikach zależności ekstremalnych. Drugi dotyczący tzw. modelu kaskady kopuli dwuwymiarowych, stanowi próbę oddania specyficznych zależności wielowymiarowych [1]. Ujęcia te jednak nie w pełni i nie wprost realizują istotę nadmienionej asymetrii.

1. Optymalizacja portfela

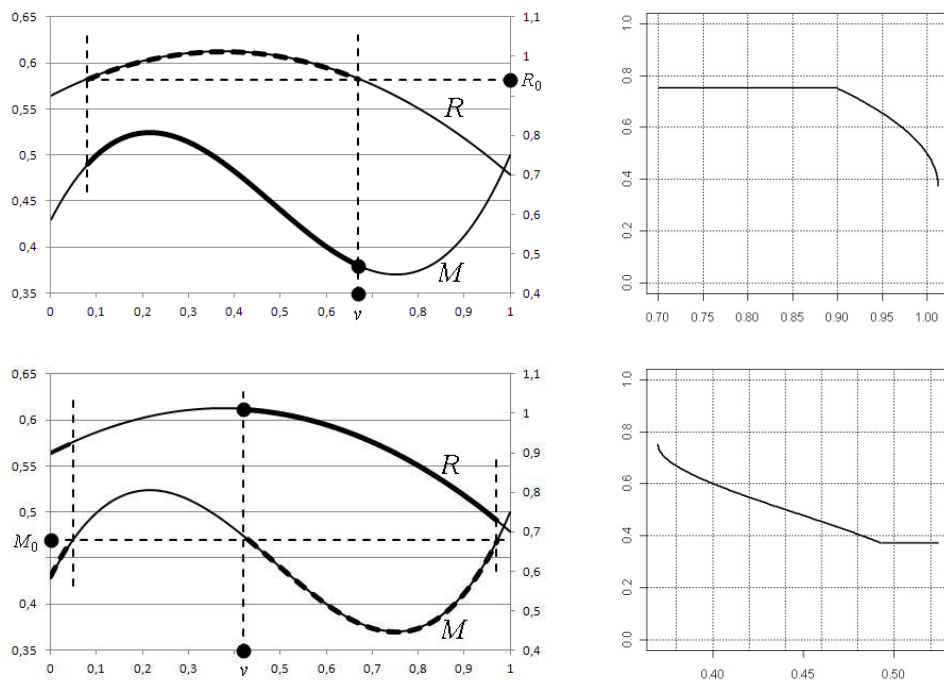
Opis stosowanej w opracowaniu metodologii zaczniemy od prezentacji istoty optymalizacji portfela złożonego z walorów $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(k)}$, którą można ująć w następujący sposób*:

Załóżmy, że znane są oczekiwana stopa zwrotu z portfela $R(\mathbf{v})$ i pewna przyjęta miara ryzyka $M(\mathbf{v})$ dla wszystkich możliwych udziałów $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ ($\sum_{i=1}^k v_i = 1, v_i \geq 0$) walorów pod względem ilości w portfelu. Wówczas albo przy zadanej najmniejszej dopuszczalnej oczekiwanej stopie zwrotu R_0 wyznacza się skład portfela \mathbf{v} minimalizujący miarę ryzyka (ujęcie optymalizacyjne ozn. (O1)), albo przy zadanej największej dopuszczalnej wartości miary ryzyka M_0 wyznacza się skład portfela \mathbf{v} maksymalizujący oczekiwaną stopę zwrotu (ujęcie optymalizacyjne ozn. (O2)).

Graficzną ilustrację istoty obu ujęć optymalizacji w przypadku portfela dwuskładnikowego ($k = 2, \mathbf{v} = (v, 1 - v)$) prezentują wykresy zamieszczone w lewej kolumnie na rys 1. Natomiast w prawej kolumnie tego rysunku umieszczone są dodatkowo wykresy odzwierciedlające zależności udziału v pierwszej składo-

* Przedstawione tu ujęcie optymalizacji jest bardzo ogólne, a szczegółowe podejścia można znaleźć np. w pracach [4; 7; 9].

wej portfela odpowiednio od R_0 ($v = v(R_0)$, w ujęciu (O1)) bądź od M_0 ($v = v(M_0)$, w ujęciu (O2)).



Rys. 1. Ilustracja graficzna sposobu optymalizacji portfela dla umownych przebiegów funkcji R i M^*

W dalszym ciągu rozważane są opisane pokrótce miary ryzyka oraz metoda szacowania oczekiwanej stopy zwrotu z portfela.

Po pierwsze, jako miary M przyjęte są wartość zagrożona (VaR) i warunkowa wartość zagrożona (CVaR). Dla prostoty miary te są rozważane jako stosowne parametry rozkładu stóp zwrotu z portfela, w szczególności VaR jest rozumiane jako kwantyl tego rozkładu, a nie odpowiadająca temu kwantylowi strata na wartości portfela. Ponadto VaR i CVaR są wyznaczone z perspektywy krótkiej pozycji – odnoszą się zatem do prawych ogonów rozkładu stóp zwrotu. Za metodę estymacji tych miar – w prezentowanym dalej przykładzie empirycznym – przyjęto metodę symulacji Monte Carlo, a uzyskane tak oszacowania miar przedstawione zostaną przez pryzmat wykresów będących analogonami wykresów z prawej kolumny z rys. 1.

* Wykresy z pierwszej kolumny zostały wykonane w programie MS Excel, natomiast wykresy z drugiej kolumny, jak również wszystkie pozostałe wykresy zamieszczone w opracowaniu – w środowisku R.

Po drugie, stosowaną procedurę szacowania oczekiwanej stopy zwrotu z portfela można określić następująco: dla dowolnego składu portfela odtwarzane są dzienne realizacje jego stóp zwrotu w określonym horyzoncie czasowym, których średnia przyjmowana jest jako oczekiwana stopa zwrotu na kolejny dzień.

W dalszym ciągu, bez straty ogólności rozważań, analizowany jest jedynie przypadek portfela dwuskładnikowego*.

2. Kopule niesymetryczne

Spśród wielu możliwości opisanych w literaturze, w opracowaniu wykorzystany jest szczególny przypadek ogólniejszej konstrukcji dwuwymiarowych kopuli niesymetrycznych zaproponowanej w pracy [2]. Zgodnie z wynikami tej pracy (wnioski 3 i 4, s. 387-388), kopulę niesymetryczną można utworzyć z dwóch dowolnych kopuli A i B za pomocą m.in. funkcji: $f(x) = x^\alpha$ $g(x) = x^\beta$ o parametrach $\alpha, \beta \in (0,1)$. Jeśli bowiem $\alpha \neq 1/2$ lub $\beta \neq 1/2$, to kopula dana wzorem:

$$C_{\alpha, \beta}(x, y) = A(x^{1-\alpha}, y^{1-\beta}) \cdot B(x^\alpha, y^\beta) \quad (1)$$

jest niesymetryczna.

W opracowaniu za kopulę A przyjęta jest archimedesowa kopula Clayтона $C_\gamma(x, y) = (x^{-\gamma} + y^{-\gamma} - 1)^{-1/\gamma}$, z parametrem $\gamma > 0$. Natomiast za kopulę B przyjęto tzw. kopulę przetrwania Clayтона, czyli: $\hat{C}_\gamma(x, y) = x + y - 1 + C_\gamma(1-x, 1-y)$, która nie jest archimedesowa. Dobór typu tych kopuli jest arbitralny. Użycie kopuli przetrwania podyktowane jest faktem, że kopula Clayтона ma niezerowy dolny współczynnik zależności ekstremalnych (równy $2^{-1/\gamma}$) i zerowy górny, zaś w przypadku kopuli przetrwania wartości tych współczynników są zamienione. Dzięki temu w kopuli utworzonej na podstawie wzoru (1), a wyrażonej jako:

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}(x, y) &= C_\gamma(x^{1-\alpha}, y^{1-\beta}) \cdot \hat{C}_\delta(x^\alpha, y^\beta) = \\ &= (x^{(\alpha-1)\gamma} + y^{(\beta-1)\gamma} - 1)^{-1/\gamma} \cdot \\ &\cdot (x^\alpha + y^\beta - 1 + ((1-x^\alpha)^{-\delta} + (1-y^\beta)^{-\delta} - 1)^{-1/\delta}) \end{aligned} \quad (2)$$

oba współczynniki zależności ekstremalnych są niezerowe, choć nie dają się one w prosty sposób wyrazić wzorami w zależności od parametrów $\alpha, \beta \in (0,1)$ i $\gamma, \delta > 0$.

* Przypadek więcejwymiarowy wymaga jedynie użycia innych metod konstrukcji kopuli niesymetrycznych.

W prezentowanym dalej przykładzie empirycznym do estymacji parametrów kopuli danej wzorem (2), a następnie do symulacji prób według tak uzyskanego rozkładu stosowano metody ogólne [3; 8]. Ponadto z uwagi na brak wzorów analitycznych stosownych funkcji pomocniczych nieuniknione okazały się metody numeryczne*.

3. Metoda Monte Carlo

Niech dane będą notowania $X_{1,t}, X_{2,t}$, dla $t \in \{1, \dots, T\}$, walorów $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}$ oraz zrealizowane stopy zwrotu $R_{1,t}, R_{2,t}$ tych walorów. Przy tych oznaczeniach implementacja metody Monte Carlo (MC) do szacowania miar ryzyka (VaR i CVaR) portfela dwuskładnikowego przeprowadzona jest w sposób następujący:

1. Na podstawie zrealizowanych stóp zwrotu $R_{1,t}, R_{2,t}$ estymowane są (metodą największej wiarygodności) parametry rozkładów brzegowych, za które przyjęto dwustronne uogólnione rozkłady Pareto.
2. Następnie (przy użyciu numerycznej metody największej wiarygodności) estymowane są parametry kopuli łączącej powyższe rozkłady brzegowe, danej wzorem (2).
3. W kolejnym kroku zgodnie z rozkładem łącznym, zadanym przez kopulę i rozkłady brzegowe, symulowana jest próba liczebności T odtwarzająca realizacje $\tilde{R}_{1,t}, \tilde{R}_{2,t}$ stóp zwrotu składowych portfela.
4. Na podstawie tak otrzymanej próby odtwarzane są realizacje notowań obu walorów $\tilde{X}_{1,t}, \tilde{X}_{2,t}$. Z uwagi jednak na możliwość swobodnego zadania wartości początkowych ciągów notowań przyjęto zasadę równości median, tzn. $\text{med}(\tilde{X}_{1,t}) = \text{med}(X_{1,t})$ i $\text{med}(\tilde{X}_{2,t}) = \text{med}(X_{2,t})$.
5. Próba $\tilde{X}_{1,t}, \tilde{X}_{2,t}$, przy zadanym udziale v pierwszego waloru, służy do wyznaczenia ciągów: $\tilde{Z}_i(v), \tilde{R}_i(v)$ odtwarzających realizacje wartości oraz realizacje stóp zwrotu stosownego portfela.
6. Z tak otrzymanych ciągów $\tilde{R}_i(v)$ wyznacza się oszacowania $\text{VaR}(v)$ i $\text{CVaR}(v)$.

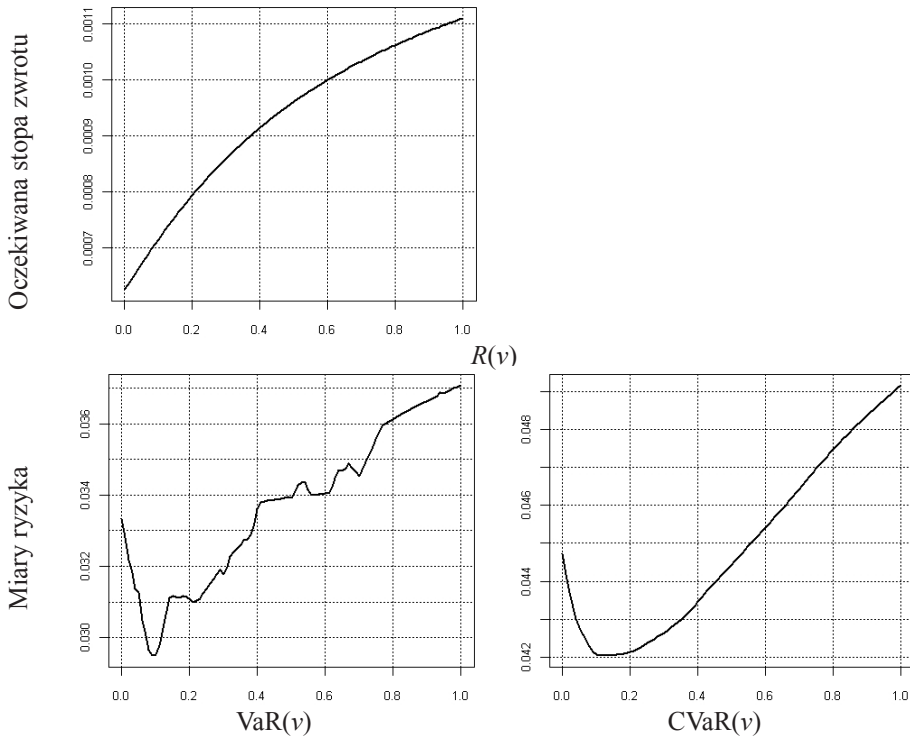
Kroki 3-6 powtarzane są 1000 razy, a jako ostateczne oszacowania $\text{VaR}(v)$ i $\text{CVaR}(v)$ przyjmowane są mediany z wartości uzyskanych w poszczególnych repetycjach.

* Wszystkie obliczenia zostały wykonane w środowisku R.

4. Przykład empiryczny

Przykładowym analizom poddany jest portfel tworzony z akcji KGHM i PKN Orlen na 30.09.2011 r. z horyzontem czasowym wynoszącym 1 dzień roboczy. Szacowanie oczekiwanej stopy zwrotu bazuje na $T = 500$ ostatnich realizacjach* stopy zwrotu dla wszystkich możliwych proporcji udziałów walorów w portfelu zadanych przez v – stanowiące udział KGHM – zmieniające się od 0 do 1 z krokiem 0,001.

Dla każdego v z podanego zakresu, zgodnie z wcześniej opisaną metodologią, wyznaczone zostały oczekiwane stopy zwrotu ($R(v)$) oraz miary ryzyka ($VaR(v)$ i $CVaR(v)$), które przedstawiają odpowiednie wykresy na rys. 2.

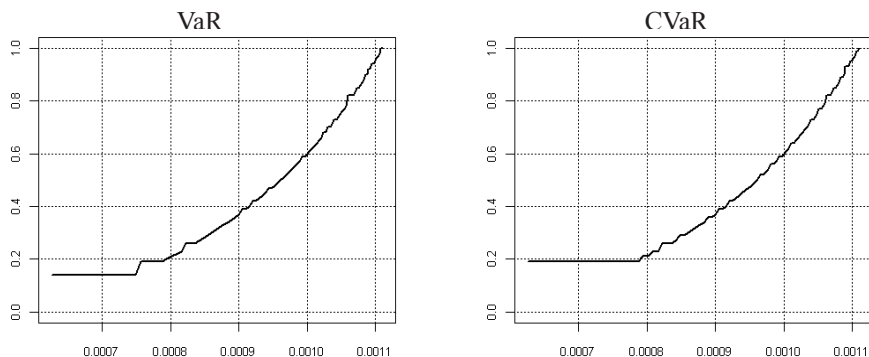


Rys. 2. Stopy zwrotu i miary ryzyka z portfela uzyskane metodą MC (w zależności od v – udziału KGHM)

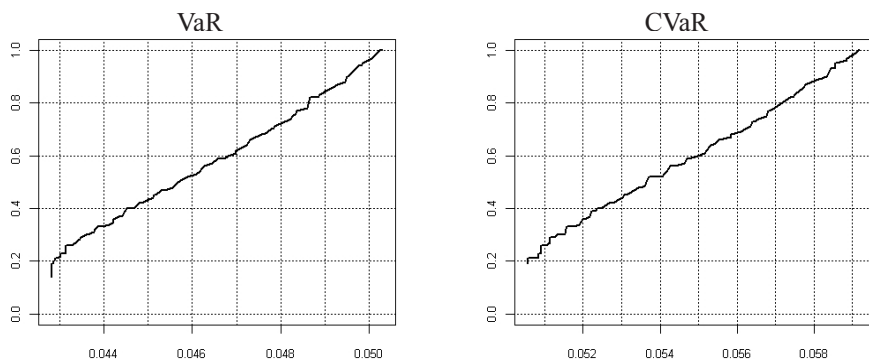
Na tej podstawie wyznaczone są udziały v optymalizujące analizowany portfel w rozumieniu metod (O1) i (O2). Zależność udziałów v od najmniejszej do-

* Wobec tego podstawą wszelkich obliczeń są dzienne notowania na zamknięcie kursów akcji obu spółek z okresu 8.10.2010-30.09.2011 (po 500 obserwacji) z GPW w Warszawie.

puszczalnej oczekiwanej stopy zwrotu R_0 (w sensie (O1)) prezentują wykresy z rys. 3, natomiast zależność udziałów v od największej dopuszczalnej wartości miary ryzyka M_0 (w sensie (O2)) – wykresy z rys. 4.



Rys. 3. Skład portfela $v(R_0)$ uzyskany metodą (O1)



Rys. 4. Skład portfela $v(M_0)$ uzyskany metodą (O2)

Zaprezentowany przykład empiryczny pozwala wnioskować, że:

- Szacowanie miar ryzyka (VaR, CVaR) poprzez odtwarzanie wektora stóp zwrotu metodą MC choć jest złożone metodologicznie (przez co wymaga znacznych „nakładów obliczeniowych”), to jednak daje się efektywnie stosować.
- Uzyskane oszacowania stóp zwrotu oraz miar ryzyka dla różnych składów portfela pozwalają w prosty sposób zoptymalizować portfel.

Podsumowanie

Oprócz wniosków wynikających bezpośrednio z zaprezentowanego przykładu zastosowania kopuli niesymetrycznej należy uwypuklić fakt ogólniejszy – dotyczący istoty asymetrii (w sensie zaprezentowanym w opracowaniu) i jej uwzględnienia w modelu. Mianowicie, stosowanie kopuli niesymetrycznych jest bardziej zasadne merytorycznie ze względu na specyfikę zależności między składowymi portfela. Niniejsze opracowanie jest swego rodzaju przyczynkiem do dyskusji nad potrzebą, a zarazem możliwością zastosowań kopuli niesymetrycznych, które poszerzają perspektywę spojrzenia na modelowanie zależności między rozkładami brzegowymi. Obszar ten w zakresie aplikacyjnym jest wciąż zbyt mało eksplorowany.

Wobec powyższego, w kontekście przedstawionego przykładu empirycznego perspektywa dalszych badań powinna objąć chociażby takie aspekty, jak: rozszerzenie analiz na portfele wielowymiarowe; dynamiczna weryfikacja uzyskiwanych wyników względem pojawiających się kolejnych realizacji; porównanie z innymi metodami.

Literatura

1. Doman R., Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych, Uniwersytet Ekonomiczny, Poznań 2011.
2. Durante F., Construction of non-exchangeable bivariate distribution functions, „Stat Papers” 2009, No. 50.
3. Heilpern S., Funkcje łączące, WAE, Wrocław 2007.
4. Jajuga K., Jajuga T., Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
5. Kuziak K., Koncepcja wartości zagrożonej VaR (Value at Risk), StatSoft, 2003.
6. Liebscher E., Construction of asymmetric multivariate copulas, „J. Multivariate Anal.” 2008, No. 99.
7. Markowitz H., Portfolio selection. Efficient diversification of investments, John Wiley & Sons, Nowy Jork 1959.
8. Nelsen R.B., An Introduction to Copulas, Springer, New York 1999.

9. Tarczyński W., Rynki kapitałowe. Metody ilościowe, t. 2, Placet, Warszawa 1997.
10. Tsay R. S., Analysis of Financial Time Series, Wiley, Hoboken 2005.
11. R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>

APPLICATION OF ASYMMETRIC COPULAS IN PORTFOLIO OPTIMIZATION

Summary

This paper is some kind of a discussion about both the necessity and possibility of asymmetric copula applications. Presented deliberation is settled in the context of financial portfolio analysis that, in a specific way, requires taking the correlations of the component assets into consideration, which creates an opportunity for asymmetric copula implementation. Mentioned issues are exemplified by real two-asset portfolio optimization.