

Maciej Wolny

WSPOMAGANIE KOOPERACJI Z WYKORZYSTANIEM TEORII GIER I ANALIZY WIELOKRYTERIALNEJ

Wprowadzenie

Kooperacja między organizacjami ma istotne znaczenie w życiu gospodarczym. Podmioty gospodarcze lub ich poszczególne wydziały współpracują między innymi w celu większego stopnia integracji, wymiany doświadczeń lub rozwoju kompetencji, a przede wszystkim w celu osiągnięcia większych zysków – większych niż suma zysków uzyskanych z indywidualnych działalności, czyli chcą korzystać z efektu synergii.

Proces integrowania działań różnych wydziałów, czyli koordynacja – jedna z podstawowych składowych strategii [7], implikuje konieczność kooperacji różnych części organizacji. Znaczenie kooperacji w celu osiągnięcia efektu synergii jest widoczne w różnych sferach działalności gospodarczej – np. banki i spółki ubezpieczeniowe już od wielu lat łączą swe działania w celu sprzedaży szerokiej gamy instrumentów finansowych (kombinowana sprzedaż różnych produktów finansowych [21]). Podstawowym warunkiem współpracy jest jej opłacalność dla wszystkich kooperantów. Krytycznym czynnikiem warunkującym współdziałanie jest ustalenie wartości korzyści (wygranej, wypłaty), którą podmiot (gracz) osiągnie przez wejście w koalicję. Ustalony podział wygranej powinien być dla każdego z graczy racjonalny i akceptowalny.

W artykule przedstawiono model współpracy jako kooperacyjną grę z koalicjami. Nawiązanie współpracy w określonej koalicji powinno implikować podział zysków ze współpracy większy niż w każdej innej możliwej koalicji. Podział taki powinien więc być racjonalny, czyli znajdować się w rdzeniu gry. W związku z tym głównym celem pracy jest przedstawienie wspomaganie kooperacji w sytuacji, gdy rdzeń jest pusty, oraz wspomaganie racjonalnego podziału wygranej między koalicjantów przez analizę wielokryterialną, dla której punktem wyjścia jest maksymalizacja wygranej przez każdego z graczy.

1. Podstawowe definicje i założenia

Grą kooperacyjną z koalicjami w postaci funkcji charakterystycznej nazywa się uporządkowaną parę $\Gamma = (N, v)$, gdzie $N = \{1, 2, \dots, n\}$ jest zbiorem numerów graczy, v – funkcją charakterystyczną gry, która przyporządkowuje każdemu podzbiorowi $S \subseteq N$ łączną maksymalną nieujemną wypłatę $v(S)$, przy tym $v(\emptyset) = 0$. Biorąc pod uwagę fakt, że współdziałanie graczy implikuje efekt synergii, będą rozważane gry superaddytywne, czyli spełniające warunek:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \quad S, T \subseteq N, \quad S \cap T = \emptyset \quad (1)$$

oraz dodatkowo warunek istotności gry:

$$v(N) > \sum_{i=1}^n v(\{i\}). \quad (2)$$

Spełnienie warunków (1) i (2) implikuje wystąpienie efektu synergii.

Podział wygranej między graczy jest określony przez wektor:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathfrak{R}_+^n, \quad (3)$$

którego składowe określają wygrane poszczególnych graczy. X jest zbiorem wszystkich możliwych podziałów.

Rdzeniem gry nazywa się zbiór wszystkich podziałów, które spełniają warunki:

– racjonalności zbiorowej:

$$\sum_{i=1}^n x_i = v(N), \quad (4)$$

– racjonalności indywidualnej:

$$x_i \geq v(\{i\}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

– racjonalności koalicyjnej:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N. \quad (6)$$

Podział spełniający warunek racjonalności zbiorowej nazywa się preimputacją, natomiast podział spełniający warunki racjonalności indywidualnej i zbiorowej jednocześnie nazywa się imputacją. W artykule będą rozważane gry, w których istnieje przynajmniej jeden podział racjonalny w takim sensie, że

spełnia wszystkie trzy warunki racjonalności (4)-(6). W przeciwnym wypadku zawiązanie jednej wielkiej koalicji jest „nieopłacalne” przynajmniej dla jednego gracza. Niemniej należy zwrócić uwagę, że w sytuacji pustego rdzenia może istnieć podgra (ang. subgame)* (lub subgry, jeśli racjonalne jest utworzenie kilku koalicji), w której warunki racjonalności są spełnione, i prezentowane tu rozwiązania są adekwatne do analizy takiej podgry (podgier).

2. Wspomaganie kooperacji na podstawie analizy rdzenia gry

Warunki na niepusty rdzeń zostały sformułowane niezależnie przez Bondareva i Shapleya [3; 16] i są związane z liniowymi ograniczeniami dotyczącymi rdzenia gry. W grze istnieje niepusty rdzeń, jeśli równocześnie są spełnione następujące warunki:

$$v(N) \geq \sum_{S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S v(S), \quad \lambda_S \geq 0, \quad S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}, \quad (7)$$

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S e_S = e_N, \quad (8)$$

gdzie e_S jest wektorem charakterystycznym koalicji S takim, że i -ta składowa jest równa 1, jeśli i -ty gracz należy do koalicji S , oraz 0, jeśli nie należy.

Wyrażenie (7) można przeformułować do następującego równoważnego warunku:

$$v(N) = \max_{\lambda_S \geq 0} \sum_{S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S v(S), \quad S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}. \quad (9)$$

Nawet w sytuacji, gdy gra jest superaddytywna, przedstawione warunki mogą nie być spełnione, powstaje więc pytanie, jak wspomagać kooperację, aby wszyscy gracze współdziałali – zawiązali wielką koalicję. Szczęólnego znaczenia temu zagadnieniu nadaje fakt, iż sumaryczny zysk z współdziałania wszystkich graczy jest największy**.

Odpowiedzią na postawione pytanie jest umożliwienie powiększenia wygranej wielkiej koalicji o wartość wynikającą z wyrażenia (9) przy jednoczesnym spełnieniu warunku (8):

$$\Delta v(N) = \max_{\lambda_S \geq 0} \sum_{S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}} \lambda_S v(S) - v(N), \quad S \subseteq N \setminus \{\emptyset\}. \quad (10)$$

* Podgra jest tu rozumiana jako gra z uwzględnieniem wyłącznie graczy, którzy tworzą racjonalną koalicję w sensie warunków (4)-(6) w odniesieniu do zbioru tych graczy.

** Wynika to z warunku superaddytywności gry (1).

Wartość wyrażenia (10) jest nieujemna, a w sytuacji pustego rdzenia gry jest dodatnia. Wartość ta może być interpretowana jako koszt wspomaganie kooperacji. Koszt ten w przypadku gry superaddytywnej oraz spełnienia warunku (8) powinien być opłacalny w tym sensie, że jest mniejszy niż przyrost wygranej. Powyższe stwierdzenie warunkuje opłacalność wspomaganie kooperacji, umożliwia redefinicję wartości funkcji charakterystycznej oraz rozpatrywania nowej gry z niepustym rdzeniem $\hat{\Gamma} = (N, \hat{v})$, gdzie wartość funkcji charakterystycznej dla wielkiej koalicji wynosi:

$$\hat{v}(N) = v(N) + \Delta v(N), \quad (11)$$

natomiast dla pozostałych koalicji się nie zmienia, czyli:

$$\hat{v}(S) = v(S), \quad S \subset N. \quad (12)$$

3. Wspomaganie podziału wygranej z wykorzystaniem analizy wielokryterialnej

Jedną z kluczowych kwestii umożliwiających kooperację jest ustalenie podziału wygranej między graczy związanej koalicji. Każdy gracz powinien otrzymać taką wygraną, aby był skłonny tworzyć koalicję; wygrana powinna należeć do rdzenia gry i spełniać warunki (4)-(6), czyli być racjonalna. Jeśli rdzeń jest zbiorem jednoelementowym, to podział tworzący rdzeń jest jedynym możliwym. W przypadku sytuacji nietrywialnej, czyli istnienia wielu podziałów tworzących rdzeń gry, należy wybrać (ustalić) jeden podział wygranej między graczy.

Do najważniejszych metod podziału wygranej należy wartość Shapleya [15] wynosząca dla i -tego gracza:

$$\varphi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (s-1)!(n-s)! [v(S) - v(S \setminus \{i\})], \quad (13)$$

gdzie s jest wielkością (liczebnością) koalicji S . Wartość Shapleya interpretuje się jako średnią wartość wygranej, jaką wnosi do wielkiej koalicji i -ty gracz, gdy kolejność tworzenia tej koalicji jest równoprawdopodobna, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ jest zawsze imputacją. Interpretacja wartości Shapleya powoduje, że jest ona bardzo atrakcyjnym sposobem ustalenia podziału – gracz otrzymuje tyle, ile średnio wnosi do koalicji.

Innym sposobem ustalenia podziału wygranej jest wartość Banzhafa [2], która dla i -tego gracza wynosi:

$$\beta_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]. \quad (14)$$

Jest najczęściej wykorzystywana jako miara siły gracza w koalicji i można ją również interpretować jako średnią wartość wygranej wnoszoną przez gracza tworzącego koalicję (w odróżnieniu od gracza „wchodzącego” w przypadku wartości Shapleya). Wartość Banzhafa $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ często nie jest imputacją, ponieważ nie spełnia warunku racjonalności zbiorowej (4). W celu wykorzystania tej wartości do ustalenia podziału wygranej należy ją poddać normalizacji:

$$\beta_i^* = \frac{\beta_i \cdot v(N)}{\sum_{i \in N} \beta_i}. \quad (15)$$

Kolejnym sposobem ustalenia podziału jest wykorzystanie koncepcji punktu Gatley'ego [6]. Koncepcja ta realizuje postulat minimalizacji maksymalnej skłonności do zerwania wielkiej koalicji. Miarą skłonności do zerwania koalicji jest wyrażenie:

$$\gamma_i(x) = \frac{\sum_{j \neq i} x_j - v(N - i)}{x_i - v(i)}. \quad (16)$$

Poszukuje się więc podziału spełniającego kryterium:

$$\max_{i \in N} \gamma_i(x) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Do najważniejszych należy koncepcja nucleolusa [14] realizująca postulat maksymalizacji największego zadowolenia z koalicji. W sytuacji niepustego rdzenia minimalizuje się wyrażenie*:

$$\max_{S \subseteq N} \left(v(S) - \sum_{i \in S} x_i \right) \rightarrow \min. \quad (18)$$

Nucleolus zawsze istnieje. Ponadto jeśli istnieje niepusty rdzeń, to należy do rdzenia, wobec tego stanowi bardzo atrakcyjną koncepcję podziału wygranej. Koncepcja nukleolusa może być rozpatrywana również w kontekście maksymalizowania największego zadowolenia z koalicji w odniesieniu do wartości wygranej koalicji [19], do wielkości koalicji [14], do wartości Shapleya [13] czy ze względu na skłonność do zerwania koalicji [10].

* Jeżeli dla danego minimalnego maksimum istnieje więcej niż jedna imputacja, to należy minimalizować kolejne maksima itd., aż do uzyskania pojedynczej imputacji.

Spośród wymienionych sposobów ustalenia jednego podziału unormowana wartość Banzhafa, wartość Shapleya oraz punkt Gately'ego mogą nie należeć do rdzenia gry. W takim przypadku istnieją przesłanki do niezawiazania się wielkiej koalicji, więc implikacją zaistnienia takiej sytuacji jest zmiana sposobu ustalenia podziału wygranej. Ze względu na cel niniejszego artykułu interesująca sytuacja jest taka, gdy gracze ustalą sposób podziału ad hoc implikujący podział nienależący do rdzenia. Innymi słowy „z góry” ustalą, że każdy z nich otrzyma tyle, ile np. średnio wnosi do koalicji (według wartości Shapleya lub Banzhafa), a podział ten nie spełni warunków (4)-(6). Należy wtedy ustalić podział będący w rdzeniu oraz jak najmniej różniący się od postulowanego.

Punktem wyjścia dalszych rozważań jest ujęcie podjętego problemu jako zagadnienia programowania wielokryterialnego. Podstawą jest stwierdzenie, że każdy z graczy pragnie uzyskać maksymalną wygraną, czyli każda ze składowych wektora podziału (3) jest maksymalizowana [1, s. 60]:

$$x \rightarrow \max. \quad (19)$$

Dopełnieniem wyrażenia (19) jest układ warunków ograniczających (4)-(6). Problem sprowadza się więc do zagadnienia liniowego programowania wielokryterialnego. Określenie pojedynczego podziału jest możliwe w sytuacji trywialnej lub przez skalaryzację zagadnienia przez przyjęcie jednej z kilku koncepcji agregacji kryteriów przedstawionych w różnych ujęciach i w sposób przeglądowy w pracach [5; 8; 9; 10; 11].

Jednym ze sposobów skalaryzacji jest zastosowanie koncepcji programowania celowego [4], która polega na minimalizacji odpowiednio zdefiniowanej funkcji strat, wynikających z odchyień od postulowanych wartości rozważanych zmiennych. Niech $x^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)$ będzie wektorem postulowanych wygranych graczy, reprezentującym wypłaty wynikające z zaakceptowanego sposobu (sprawiedliwego) podziału. Bazując na logice minimalizacji maksymalnego odchylenia od ustalonej wartości wygranej, minimalizowana funkcja strat może zostać zdefiniowana w następujący sposób:

$$\max_i |x^*_i - x_i| \rightarrow \min. \quad (20)$$

Ponieważ zwykle dla danego minimum istnieje większa liczba podziałów, więc należy przyjąć dodatkową heurystykę umożliwiającą wyodrębnienie jednego podziału – np. przez ustalenie hierarchii graczy według wartości postulowanych $x^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)^*$ lub zastosowanie procedury minimalizującej kolejne

* Ameljańczyk w pracy [1] proponuje do skalaryzacji zagadnienia (15) ustalenie leksykograficznej hierarchii graczy według wartości Shapleya.

maksima. Maksymalne odchylenie lub odchylenia, dla których jest osiągane minimum (20), stają się ograniczeniami. W dalszej kolejności poszukuje się minimum z maksymalnych pozostałych odchyżeń itd., aż do określenia jednego podziału.

Do rozwiązania problemu ustalenia podziału wygranej można również wykorzystać metodę punktu referencyjnego przedstawioną w pracy Wierzbickiego [20]. Metoda punktu referencyjnego została pierwotnie zaproponowana jako metoda wspomagania decyzji wielokryterialnych, w której maksymalizuje się odpowiednio zdefiniowaną funkcję osiągnięcia:

$$\min_{i \in N} \sigma_i(x_i, x_i^*) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \sigma_i(x_i, x_i^*) \rightarrow \max, \quad (21)$$

gdzie ε jest dodatnim parametrem umożliwiającym jednoznaczne wskazanie imputacji, $\sigma_i(x_i, x_i^*)$ – częściową funkcją osiągnięcia dla i -tego gracza określoną w następujący sposób:

$$\sigma_i(x_i, x_i^*) = \begin{cases} \frac{(x_i - v(\{i\}))}{(x_i^* - v(\{i\}))}, & x_i \in [v(\{i\}); x_i^*], \\ 1 + \alpha \frac{(x_i - x_i^*)}{(x_i^u - x_i^*)}, & x_i \in [x_i^*; v(N) - v(N \setminus \{i\})], \end{cases} \quad (22)$$

gdzie x_i^* oznacza wartość postulowaną (referencyjną) wypłaty i -tego gracza, α jest wystarczająco dużym, dodatnim parametrem optymalizacyjnym zapewniającym wklęsłość funkcji osiągnięcia, x_i^u – górnym ograniczeniem rdzenia gry:

$$x_i^u = v(N) - v(N \setminus \{i\}). \quad (23)$$

Omówione koncepcje zostaną przedstawione na przykładzie związanym ze wspomaganie współdziałania autonomicznych oddziałów przedsiębiorstwa przy realizacji projektu.

4. Wspomaganie współdziałania oddziałów przedsiębiorstwa

Dany jest problem decyzyjny związany ze wspomaganie podziału zysków wynikających z realizacji pewnego projektu przez przedsiębiorstwo. Na podstawie wstępnej analizy ustalono oczekiwane zyski z projektu przy podjęciu współpracy. Współpracować mogą trzy oddziały przedsiębiorstwa (trzech graczy), które posiadają dużą autonomię. Odpowiednie zyski z zawiązania współpracy przedstawia poniższa funkcja charakterystyczna (w jednostkach pieniężnych).

$$\begin{aligned}
v(\emptyset) &= 0,00 \\
v(\{1\}) &= 22,00 \\
v(\{2\}) &= 24,00 \\
v(\{3\}) &= 30,00 \\
v(\{1,2\}) &= 74,00 \\
v(\{1,3\}) &= 75,00 \\
v(\{2,3\}) &= 76,00 \\
v(\{1,2,3\}) &= 112,00.
\end{aligned}
\tag{24}$$

Do dyspozycji naczelnego kierownictwa przedsiębiorstwa jest 10% zysków, pozostała część pozostaje do dyspozycji oddziałów*. Przedstawiona gra jest grą superaddytywną z pustym rdzeniem – wartość wyrażenia (10) wynosi 0,50, czyli tyle wynoszą koszty wspomaganie kooperacji (dodatkowa premia) umożliwiające racjonalne zawiązanie wielkiej koalicji. Z punktu widzenia całej organizacji minimalny przyrost zysku wynosi: $v(\{1,2,3\}) - [v(\{1,2\}) + v(\{3\})] = 8,00$ jednostek pieniężnych, ponieważ maksymalna suma wypłat rozłącznych koalicji (z pominięciem wielkiej koalicji wszystkich graczy) wynosi 104,00 – jest to równoważne z utworzeniem koalicji $\{1,2\}$ oraz $\{3\}$. Część zysku będąca w gestii naczelnego kierownictwa wynosiłaby w takiej sytuacji 10,40 jednostek pieniężnych, natomiast w sytuacji utworzenia wielkiej koalicji 11,25**. Z tego zysku kierownictwo może przeznaczyć 0,50 jednostki pieniężnej na pokrycie kosztów kooperacji, czyli przeznaczyć do podziału dla koalicji utworzonej przez wszystkich graczy. Naczelnictwo uzyskuje w takiej sytuacji 10,75 jednostek pieniężnych, czyli więcej o 0,35 jednostki pieniężnej. Natomiast z punktu widzenia oddziałów zwiększenie wygranej wielkiej koalicji powoduje, że powstaje nowa gra z wygranymi koalicji określonymi przez wyrażenia (11)-(12). Gra ta posiada niepusty rdzeń, więc istnieje przynajmniej jeden podział wygranej racjonalny w sensie warunków (4)-(6). Zasadne jest więc wspomaganie kooperacji przez naczelnictwo przedsiębiorstwa.

Nowa postać funkcji charakterystycznej gry ma następującą postać:

* Jeśli wartości funkcji charakterystycznej miałyby oznaczać „czysty” zysk koalicjantów, to należałoby je przemnożyć przez 0,9 – otrzymana gra byłaby jednak równoważna strategicznie rozważanej, czyli obie gry powinny być rozgrywane w ten sam sposób.

** Jeśli zostałby umorzony narzut w odniesieniu do kosztów kooperacji, dodawanych do wygranej wielkiej koalicji, to wartość ta wynosiłaby 11,2 – dodatkowa premia do podziału między graczy w wysokości 0,05 jednostki pieniężnej.

$$\begin{aligned}
v'(\emptyset) &= 0,00 \\
v'(\{1\}) &= 22,00 \\
v'(\{2\}) &= 24,00 \\
v'(\{3\}) &= 30,00 \\
v'(\{1,2\}) &= 74,00 \\
v'(\{1,3\}) &= 75,00 \\
v'(\{2,3\}) &= 76,00 \\
v'(\{1,2,3\}) &= 112,50.
\end{aligned}
\tag{25}$$

W grze (24) istnieje niepusty rdzeń. Wartości: Shapleya, normalizowana Banzhafa, punkt Gately'ego oraz nukleolusa dla gry z funkcją charakterystyczną (24) przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wartości: Shapleya, Banzhafa, punkt Gately'ego oraz nukleolus

	Nr gracza		
	1	2	3
Wartość Shapleya	35,33	36,83	40,33
Normalizowana wartość Banzhafa	35,50	36,88	40,12
Punkt Gately'ego	36,50	37,50	38,50
Nukleolus	36,50	37,50	38,50

Analiza otrzymanych wyników wskazuje, że punkt Gately'ego oraz nukleolus należą do rdzenia gry – nukleolus zawsze należy do rdzenia (jeśli istnieje niepusty), natomiast punkt Gately'ego może nie należeć do rdzenia dla $n > 3$ [18, s. 266]. Wartość Shapleya oraz normalizowana wartość Banzhafa nie należą do rdzenia, ponieważ dla obu wartości w przypadku koalicji $\{1,2\}$ nie jest spełniony warunek racjonalności koalicyjnej (6). W związku z tym powstaje konieczność wspomaganie ustalenia podziału wygranej między graczy w sytuacji, gdy zostanie ustalone, że podział wygranej będzie według średniej wartości, jaką gracze wnoszą do koalicji bez względu czy w sensie wartości Shapleya (13), czy normalizowanej wartości Banzhafa (15). W takiej sytuacji wartości te stają się postulowanymi wygranymi graczy tworzących wielką koalicję.

Wartości wynikające z zastosowania koncepcji wykorzystującej logikę programowania celowego oraz metodę punktu referencyjnego przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

Obliczone wartości wypłat graczy z zastosowaniem koncepcji programowania celowego oraz metody punktu referencyjnego

Nr gracza	1	2	3
Rozwiązanie z wykorzystaniem programowania celowego z punktem celu ustalonym przez:			
Wartość Shapleya	36,50	37,50	38,50
Normalizowaną wartość Banzhafa	36,50	37,50	38,50
Rozwiązanie z wykorzystaniem metody punktu referencyjnego z punktem ustalonym przez:			
Wartość Shapleya	36,50	37,50	38,50
Normalizowaną wartość Banzhafa	36,50	37,50	38,50

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach otrzymano identyczny podział wygranej. Jest to konsekwencją tego, że rdzeń rozpatrywanej gry jest zbiorem jednoelementowym (dowodem na występowanie jednoelementowego rdzenia jest stwierdzenie, że rozwiązaniami optymalnymi programów liniowych z warunkami (4)-(6) rozpatrywanymi z funkcjami celu kolejno maksymalizującymi i minimalizującymi poszczególne składowe wektora (3) jest identyczny podział), czyli nie istnieje inny podział spełniający równocześnie warunki (4)-(6). Można również zaobserwować, że uzyskany wynik jest tożsamy z górnym ograniczeniem na rdzeń gry* (23). Rekomendowanym podziałem wygranej graczy w rozpatrywanej sytuacji jest więc wyznaczony jedyny podział, który spełnia wszystkie warunki racjonalności.

Podsumowanie

W artykule przedstawiono koncepcję wspomagania kooperacji, bazując na sytuacjach, w których problem można przedstawić w postaci wieloosobowej gry kooperacyjnej, w której rdzeń gry jest pusty, czyli nie istnieje żaden podział wygranej koalicji zawiązanej przez wszystkich graczy spełniający warunki racjonalności (4)-(6). Idea wspomagania polega na przyznaniu premii (zwiększeniu wygranej) za zawiązanie pożądanej koalicji. Premia ta musi być uzasadniona odpowiednio większymi od kosztów korzyściami z nawiązania współpracy. Punktem wyjścia proponowanej metody jest analiza warunków na istnienie niepustego rdzenia, w szczególności warunku (7). Rozważania prowadzą do określenia minimalnej wartości (10), o którą należy powiększyć wygraną wielkiej koalicji, aby istniał niepusty rdzeń. Należy przy tym zwrócić uwagę na fakt, iż przyznanie tej premii dokładnie w wartości (10) implikuje istnienie małego rdzenia gry (sytuacja idealna to jednoelementowy rdzeń), co z kolei ułatwia ustalenie racjonalnego podziału wygranej koalicji.

* Ogólnie rzecz ujmując, górne ograniczenie nie zawsze należy do rdzenia gry.

W artykule zaprezentowano również koncepcję wspomaganie ustalenia podziału wygranej zawiązanej koalicji między graczy w sytuacji, gdy postulowany ad hoc sposób podziału implikowałby podział będący poza rdzeniem gry. Koncepcja ta bazuje na idei wielokryterialnego wspomaganie decyzji. W rozważanym przypadku proponuje się minimalizację odchylenia od postulowanego podziału z wykorzystaniem metody punktu referencyjnego z funkcją osiągnięcia (21) lub z wykorzystaniem idei programowania celowego z odpowiednio zdefiniowaną funkcją strat (20).

Literatura

1. Ameljańczyk A.: *Optymalizacja wielokryterialna w problemach sterowania i zarządzania*. Ossolineum, Wrocław 1984.
2. Banzhaf J.: *Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis*. „Rutgers Law Review” 1965, 19.
3. Bondareva O.N.: *Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games* (w jęz. rosyjskim). „Problemy Kibernetiki” 1963, 10, s. 119-139.
4. Charnes A., Cooper W.W.: *Goal Programming and Multiple Objective Optimization*. „European Journal of Operational Research” 1977, 1, s. 1.
5. Galas Z., Nykowski I., Żółkiewski Z.: *Programowanie wielokryterialne*. PWE, Warszawa 1987.
6. Gately D.: *Sharing the Gains from Regional Cooperation: A Game Theoretic Application to Planning Investment in Electric Power*. „International Economic Review” 1974, 15.
7. Griffin R.W.: *Podstawy zarządzania organizacjami*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
8. Kaliszewski I.: *Wielokryterialne podejmowanie decyzji. Obliczenia miękkie dla złożonych problemów decyzyjnych*. WNT, Warszawa 2008.
9. Konarzewska-Gubała E.: *Programowanie przy wielorakości celów*. PWN, Warszawa 1980.
10. Littlechild S.C., Vaidya K.G.: *The Propensity to Disrupt and the Disruption Nucleolus of a Characteristic Function Game*. „International Journal of Game Theory” 1976, 5, s. 151-161.
11. *Metody wielokryterialne na polskim rynku finansowym*. Red. T. Trzaskalik. PWE, Warszawa 2006.
12. Roy B.: *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. WNT, Warszawa 1990.
13. Seo F., Sakawa M.: *Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning*. Reidel, Dordrecht, MA, 1987.

14. Schmeidler D.: *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*. „SIAM Journal on Applied Mathematics” 1969, 17.
15. Shapley L.S.: *A Value for n-person Games*. „Annales of Mathematical Studies” 1953, 28.
16. Shapley L.S.: *On Balanced Sets and Cores*. „Naval Research Logistics Quarterly” 1967, 14, s. 453-460.
17. Shapley L.S., Schubik M.: *Quasi-cores in Monetary Economy with Non-convex Preferences*. „Econometrica” 1966, 34, s. 805-827.
18. Straffin P.D.: *Teoria gier*. Scholar, Warszawa 2004.
19. Young H.P., Okada N., Hashimoto T.: *Cost Allocation in Water Resources Development – A Case Study of Sweden*. RR 80-32, IIASA, Laxenburg, Austria 1980.
20. Wierzbicki A.P.: *A Reference Point Approach to Coalition Games*. „Journal of Multi-criteria Decision Analysis” 2005, 13.
21. Williams M.J.: *Synergy Works at American Express*. „Fortune” z 16.2.1987, s. 79-80.

COOPERATION SUPPORT BASED ON GAME THEORY AND MULTICRITERIAL ANALYSIS

Summary

In the paper an idea of cooperation supporting method based on game theory and multicriterial analysis. Because of taking into consideration a cooperation game with empty core an idea of supporting is based on Bondareva's and Shapley's conditions for non-emptiness of the core. There is defined a minimal value which should be added to payoff of great coalition. The minimal value should be profitable.

Also an idea of multicriterial support for establish winnings for the players in cooperative game is presented. The problem is considered in case when ad hoc arrangement is irrational in meaning that the allocation of winnings is outside the core of the game. The proposal is based on concept of goal programming and reference point method.

The proposed ideas are shown on example of cooperation problem of the three autonomous departments in enterprise.