

Mateusz Pipień

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

MODELE COPULA M-GARCH O ROZKŁADACH NIEZMIENNICZYCH NA TRANSFORMACJE ORTOGONALNE

Wprowadzenie

W analizach empirycznych przeprowadzonych z wykorzystaniem wielorównaniowych modeli GARCH (ang. Multivariate GARCH, M-GARCH) powszechnie zakłada się, iż rozkład warunkowy wektora stóp zmian względem całej przeszłości jest rozkładem normalnym (por. Bauwens, Laurent i Rombouts, 2006). Pomimo iż modele klasy M-GARCH są wykorzystywane w modelowaniu i prognozowaniu dynamicznych zależności pomiędzy instrumentami finansowymi, wydaje się, że inne cechy rozkładów warunkowych, takie jak możliwa asymetria lub grube ogony, także odgrywają dużą rolę i są empirycznie istotne. Osiewalski i Pipień (2004) przeprowadzili badania nad porównaniem dopasowania alternatywnych specyfikacji M-GARCH. Z powyższych badań wynika, że warunkowy rozkład normalny jest kompletnie nieprawdopodobny w świetle danych.

Pomimo płynących z analiz empirycznych wyraźnych przesłanek dla cech rozkładu warunkowego, w literaturze można znaleźć niewiele propozycji uchylenia założenia normalności wprost (por. Bauwens i Laurent, 2005). Nowoczesne modele dynamiki zmienności i zależności są raczej konstruowane przez skomplikowaną strukturę stochastyczną ze zmiennymi ukrytymi (por. Osiewalski i Pajor, 2009, 2010; Osiewalski i Osiewalski, 2011, 2012). Zaprezentowany w powyższych pracach zestaw modeli hybrydowych stanowi przykład uogólnienia założenia o warunkowej normalności rozkładu, jednak rozkład ten jest generowany pośrednio w ramach odrębnego procesu stochastycznego opisującego zmienność i dynamiczne korelacje, tak jak w procesach wielowymiarowej stochastycznej zmienności (ang. Multivariate Stochastic Volatility, MSV).

Zasadniczym celem niniejszego opracowania jest omówienie propozycji uogólnienia rozkładu warunkowego w ramach modeli M-GARCH omawianych

szczegółowo w pracach Pipień (2006) i (2007). Proponuje się rodzinę rozkładów niezmienniczych na transformacje ortogonalne (por. Fang, Kotz i Ng, 1990) zgodnie z koncepcją zaproponowaną w pracy Ferreira i Steel (2006), przy jednoczesnym rozważeniu funkcji powiązań (ang. Copula functions) jako mechanizmu umożliwiającego badanie złożonej natury zależności pomiędzy stopami zmian różnych instrumentów finansowych.

W części empirycznej rozważono dwuwymiarowy szereg czasowy dziennych stóp zmian kursów SPOT i FUTURES indeksu WIG20, w okresie od 21.12.1999 do 27.02.2008, $t = 2053$ obserwacji. Na podstawie bayesowskiego podejścia do testowania mocy wyjaśniającej konkurencyjnych modeli wskazano na empiryczną zasadność proponowanego uogólnienia, jak również wnioski o grubości ogonów rozkładu warunkowego.

1. Propozycja konstrukcji rozkładów niezmienniczych na transformacje ortogonalne

W konstrukcji rodziny rozkładów prawdopodobieństwa, zastosowanej w dalszej części opracowania, w modelu M-GARCH wykorzystano uogólnione podejście do definicji skośności rozkładu, które zaproponowali Ferreira i Steel (2006). W wersji jednowymiarowej podejście rozwinięto w pracach Pipień (2006, 2007), zaś w pracy Pipień (2010) jest proponowane uproszczone podejście w wersji wielowymiarowej. Gęstość s jest skośną wersją gęstości $f(\cdot|\theta)$ (o dystrybuancie $F(\cdot|\theta)$), jeśli jest zadana w następujący sposób:

$$s(x|\theta, \eta) = f(x|\theta) \cdot p(F(x|\theta)|\eta), \text{ dla } x \in R, \quad (1)$$

gdzie $p(\cdot|\eta)$ oznacza gęstość rozkładu określonego na przedziale jednostkowym $[0,1]$. Zgodnie z (1) asymetryczna gęstość $s(\cdot|\theta, \eta)$ jest uzyskana poprzez zastosowanie gęstości $p(\cdot|\eta)$ jako funkcji wagowej narzuconej na gęstość $f(\cdot|\theta)$. Przypadek, w którym gęstość p oznacza rozkład jednostajny ($p(\cdot|\eta) = 1$), przywraca symetrię. Mechanizmem uskośnienia będzie nazywana dowolna rodzina rozkładów prawdopodobieństwa $p(\cdot|\eta)$, dla $\eta \in H$. Wyczerpujący przegląd mechanizmów uskośnienia prezentuje Pipień (2006).

Rozważono m -wymiarowy wektor losowy $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ i oznaczono przez $f_1(\cdot|\theta_1), \dots, f_m(\cdot|\theta_m)$ jednomodalne gęstości (o modalnej w zerze) parametryzowane przez wektory $\theta_1, \dots, \theta_m$ odpowiednio. Narzucając mechanizmy uskośnienia dla każdego $i = 1, \dots, m$, o gęstościach $p_i(\cdot|\eta_i)$, uzyskano skośne gęstości $s_i(\cdot|\theta_i, \eta_i)$

zgodnie z formułą (1). Zauważono, że w przypadku ogólnym dla każdego $i = 1, \dots, m$ jest możliwe narzucenie innego mechanizmu uskośnienia. W części empirycznej zbadano przypadek uproszczony, w którym na każdej ze współrzędnych wektora losowego działa ten sam mechanizm uskośnienia. Uzyskane gęstości s_i przyjmują postać:

$$s_i(x | \theta_i, \eta_i) = f_i(x | \theta_i) \cdot p_i(F_i(x | \theta_i) | \eta_i), \text{ dla } x \in R \text{ oraz } i = 1, \dots, m.$$

Jako punkt wyjścia zdefiniowano dla wektora losowego rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej poniżej:

$$p(\varepsilon | \theta, \eta) = \prod_{i=1}^m s_i(\varepsilon_i | \theta_i, \eta_i), \quad (2)$$

gdzie $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$. W artykule Pipień (2010) przedstawiono graficzne ilustracje gęstości (2), wskazując na ograniczone możliwości w modelowaniu grubych ogonów i asymetrii przez proponowaną rodzinę rozkładów. Zgodnie z definicją gęstości (2) jako iloczynu jednowymiarowych gęstości s_i możliwe efekty generowane przez obserwacje nietypowe oraz skośność mogą być uwzględnione jedynie w przypadku, gdy cechy te występują wzdłuż kierunków w przestrzeni, które są zdefiniowane przez wektory bazy kanonicznej. W dalszej kolejności rozważono transformację afiniczną wektora ε :

$$y = A \varepsilon, \quad (3)$$

z nieosobliwą macierzą transformacji $A_{[m \times m]}$. Gęstość rozkładu wektora losowego y przyjmuje formę:

$$p(y | \theta, \eta, A) = |\det(A)^{-1}| \prod_{i=1}^m s_i(y' A_i^{-1} | \theta_i, \eta_i), \quad (4)$$

gdzie A_i^{-1} oznacza i -tą kolumnę macierzy A^{-1} . Macierz transformacji A narzuca zależności o charakterze liniowym na współrzędne wektora losowego y , podczas gdy parametry wektora η definiują ewentualną asymetrię rozkładu. Nie narzucono tu standardowych restrykcji na macierz transformacji i rozważono jej postać w wersji ogólnej zgodnie z poniższą jednoznaczoną dekompozycją typu QR (Golub i Van Loan, 1993):

$$A = O_m U,$$

dla O_m macierzy ortogonalnej o wymiarach $[m \times m]$ oraz macierzy $U_{[m \times m]}$ trójkątnej górnej o dodatnich elementach na przekątnej. Przy rozkładzie macierzy A

według dekompozycji QR jej działanie może zostać przedstawione jako złożenie dwóch odwzorowań liniowych, zgodnie z poniższą formułą:

$$y = A \cdot \varepsilon = (O_m U) \cdot \varepsilon = U \cdot O_m \cdot \varepsilon. \quad (5)$$

W pierwszym kroku wektor losowy ε podlega rotacji (jeśli $\det O_m = 1$) lub inwersji (jeśli $\det O_m = -1$). Następnie wektor $\xi = O_m \cdot \varepsilon$ jest przekształcany zgodnie z transformacją o macierzy przyjmującej postać macierzy kowariancji. Rozkład wektora ξ wskazuje na istnienie układu współrzędnych, według którego elementy wektora ξ są niezależne; gęstości rozkładów brzegowych są znane analitycznie. Zasadniczą różnicą pomiędzy rozkładem wektora losowego ε oraz ξ jest inny układ współrzędnych, w którym uzyskuje się niezależność.

W przypadku dwuwymiarowym, tj. gdy $m = 2$, jako macierz O_m rozważono macierz Householdera w postaci:

$$H(v) = I_m - \frac{2}{v'v} vv',$$

gdzie $v = (v_1, v_2) \in HS^1$, dla jednowymiarowej dodatniej półsfery HS^1 . Wektory v sparametryzowano wykorzystując współrzędne biegunowe, tj. $v_1 = \sin(\omega_1)$ oraz $v_2 = \cos(\omega_1)$ i $\omega_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$.

2. Zbiór konkurencyjnych specyfikacji

Przez y_j oznaczono dwuwymiarowy wektor logarymicznych stóp zwrotu w chwili j , tj. niech $y_j = (y_{j1}, y_{j2})$, gdzie $y_{ji} = 100 \ln(x_{ji}/x_{j-1,i})$, a x_{ji} oznacza wartość i -tego instrumentu finansowego w chwili j . Przyjęto następujące równanie obserwacji dla y_j :

$$y_j = H_j^{0.5}(\beta, \psi_{j-1}) \cdot H(v_\omega) \cdot z_j, j = 1, \dots, t, \quad (6)$$

gdzie $\psi_{j-1} = (\dots, y_{j-2}, y_{j-1})$ oznacza zbiór informacji w chwili j . Zmienne losowe $z_j = (z_{j1}, z_{j2})$ mają rozkład określony przez formułę (2), w której jednowymiarowe gęstości $s_i(\cdot | \theta_i, \eta_i)$ są zdefiniowane jako skośne wersje standaryzowanych rozkładów t-Studenta o liczbie stopni swobody $\nu_i > 0$ (stąd $\theta_i = \nu_i$) i parametrach skośności η_i . Macierz $H(v_\omega)$ jest macierzą Householdera, gdzie $v_\omega = (\sin \omega_1, \cos \omega_1)$ oraz $\omega_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$. Macierz $H_j(\beta, \psi_{j-1})$ jest zdefiniowana przez proces BEKK(1,1):

$$H_j(\beta, \psi_{j-1}) = A + B \cdot y_{j-1} y_{j-1}' \cdot B' + C \cdot H_{j-1}(\beta, \psi_{j-2}) \cdot C'$$

i wektor β grupuje parametry, tj. $\beta = (a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22})$. Przyjmując $W_j = H(v_\omega) H_j^{0.5}(\beta, \psi_{j-1})$, poniżej zapisano formułę na rozkład warunkowy, względem ψ_{j-1} , wektora y_j :

$$p(y_j | \psi_{j-1}, v_1, v_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1) = \\ = |\det W_j|^{-1} s_1(y_j, W_j^{-1} W_{j(1)}^{-1} | v_1, \eta_1) s_2(y_j, W_j^{-1} W_{j(2)}^{-1} | v_2, \eta_2) c_d(S_1(y_j, W_j^{-1} W_{j(1)}^{-1}), S_2(y_j, W_j^{-1} W_{j(2)}^{-1}) | \theta_{cop}),$$

gdzie $W_{j(i)}^{-1}$ oznacza i -tą kolumnę macierzy W_j^{-1} , zaś $s_i(\cdot | v_i, \eta_i)$ to skośne gęstości t -Studenta:

$$s_i(z | v_i, \eta_i) = f_{st}(z | 0, 1, v_i) \cdot p(F_{st}(z | 0, 1, v_i) | \eta_i), z \in R.$$

Przez $f_{st}(\cdot | 0, 1, v_i)$ i $F_{st}(\cdot | 0, 1, v_i)$ oznaczono odpowiednio gęstość i dystrybuantę rozkładu t -Studenta o v_i stopniach swobody, zerowej modalnej i jednostkowej odwrotności precyzji.

W części empirycznej rozważono pięć funkcji powiązań, tzn. gaussowską, Claytona, Franka, Placketta i Gumbela. Zbiór funkcji powiązań zawiera zatem tylko te specyfikacje, które opisują zależność pomiędzy elementami dwuwymiarowego wektora losowego za pomocą jednego parametru θ_{cop} .

Model próbkowy można zapisać w następującej postaci:

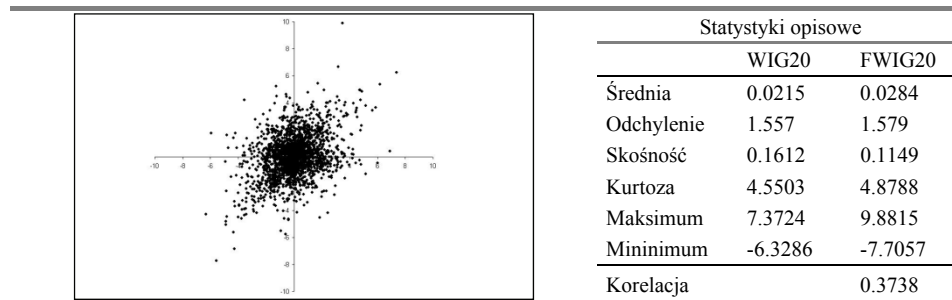
$$p(y, y_f | v_1, v_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1) = \prod_{j=1}^{t+k} p(y_j | \psi_{j-1}, v_1, v_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1), \quad (7)$$

gdzie $y = (y_1, \dots, y_t)$ oznacza zbiór dostępnych obserwacji, zaś wektor $y_f = (y_{t+1}, \dots, y_{t+k})$ grupuje zmienne podlegające prognozie. W modelu bayesowskim rozkłady a priori zaczerpnięto z poprzednich prac autora. W przypadku wektora β zastosowano rozkład omawiany szerzej w pracy Osiewalski i Pipień (2004), dla parametru skośności η_i oraz liczby stopni swobody v_i rozważono rozkład a priori z pracy Pipień (2007). Macierz ortogonalna $H(v_\omega)$ jest parametryzowana przez jeden parametr $\omega_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$, stąd rozkład a priori dla tego parametru przyjęto jako jednostajny na dziedzinie określoności.

3. Analiza empiryczna

W części empirycznej poddano analizie dwuwymiarowy szereg czasowy dziennych logarytmicznych stóp zmian kursu SPOT i kursu FUTURES indeksu WIG20 w dniach od 21.12.1999 do 27.02.2008, $t = 2053$ obserwacji. Modelowany szereg czasowy wraz z podstawowymi statystykami opisowymi zamieszczono na rysunku 1. Natura zależności badanych szeregów czasowych wydaje

się być złożona. Współistnienie obserwacji nietypowych o tym samym znaku czyni rozkład empiryczny bardziej rozproszonym w pierwszej i trzeciej ćwiartce układu współrzędnych. Jednocześnie brak współwystępowania obserwacji nietypowych o różnych znakach czyni rozkład empiryczny w drugiej i czwartej ćwiartce znacznie bardziej skoncentrowanym.



Rys. 1. Wykres dziennych stóp zmian kursu SPOT (oś odciętych) i FUTURES (oś rzędnych) indeksu WIG20 w dniach od 21.12.1999 do 27.02.2008, $t = 2053$ obserwacji

Analizowany szereg czasowy pokrywa dość długi okres handlu indeksem WIG20 i związanym z nim instrumentem terminowym FWIG20, jednak kończy się przed wybuchem kryzysu finansowego. W niniejszym opracowaniu nie aktualizowano szeregu czasowego dla zachowania porównywalności wyników z pracą Pipień (2010). Poszerzoną dyskusję wyników empirycznych dotyczącą analizowanej klasy modeli zamieszczono w pracy Pipień (2012).

Tabela 1

Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (w nawiasach) parametrów liczby stopni swobody dla współrzędnych modelowanego wektora dziennych stóp zmian

Rodzaj funkcji powiązań	Macierz Householdera włączona do modelu próbkowego	Bez macierzy Householdera w modelu próbkowym
BRAK	v_1 5.64 (1.03)	v_1 7.49 (1.98)
	v_2 18.93 (3.45)	v_2 10.85 (1.98)
Gaussowska	v_1 6.94 (1.26)	v_1 7.49 (1.35)
	v_2 18.37 (3.40)	v_2 10.84 (1.97)
Claytona	v_1 5.77 (1.05)	v_1 7.25 (1.32)
	v_2 19.13 (3.49)	v_2 11.00 (2.01)
Franka	v_1 6.93 (1.27)	v_1 8.57 (1.59)
	v_2 19.65 (3.59)	v_2 11.42 (2.08)
Placketta	v_1 6.61 (1.21)	v_1 8.82 (1.61)
	v_2 18.95 (3.43)	v_2 12.00 (2.20)
Gumbela	v_1 5.51 (1.01)	v_1 7.46 (1.33)
	v_2 19.34 (3.55)	v_2 10.36 (1.83)

W niniejszym opracowaniu skupiono się na analizie wpływu wprowadzenia do modelu próbkowego macierzy Householdera $H(v_\omega)$ na wnioskowanie o gru-

bości ogonów jednowymiarowych rozkładów elementów wektora losowego y_j . W tabeli 1 przedstawiono wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów liczby stopni swobody ν_i w przypadku modelu bez funkcji powiązań oraz w każdym z pięciu modeli Copula M-GARCH. Wyniki estymacji silnie potwierdzają empiryczną zasadność proponowanego uogólnienia. W każdym z modeli wprowadzenie elementu $H(v_\omega)$ zasadniczo zmienia wnioskowanie o grubości ogonów współrzędnych. W modelach, w których nie ma macierzy ortogonalnej $H(v_\omega)$, rozkłady a posteriori wskazują na podobne zachowanie w ogonach gęstości s_1 oraz s_2 , ponieważ parametry położenia tych rozkładów lokują liczbę stopni swobody w okolicach wartości około 8 do 9. Silne rozproszenie tych rozkładów nie wyklucza hipotezy, że rozkłady jednowymiarowe s_i charakteryzują się tą samą liczbą stopni swobody i w konsekwencji ich łączny rozkład mógłby być opisany dwuwymiarowym rozkładem t -Studenta. Wprowadzenie macierzy $H(v_\omega)$ do modelu próbkowego zmienia zasadniczo tę sytuację. Zaobserwowany szereg czasowy niesie wyraźną informację o istnieniu układu współrzędnych, według którego jednowymiarowe rozkłady elementów analizowanego wektora losowego charakteryzują się odmiennym zachowaniem w ogonach. Pierwsza współrzędna charakteryzuje się ciężkimi ogonami, ponieważ wartości oczekiwane a posteriori parametru ν_i w każdym z modeli przyjmują wartość około 6. Natomiast rozkład drugiej współrzędnej ma gęstość bliską rozkładowi normalnemu, gdyż rozkłady a posteriori parametru ν_i są zlokalizowane blisko wartości 18 do 19. Wynik powyższy jest wyraźnie widoczny zarówno w modelu bez funkcji powiązań, jak i w każdym z pięciu analizowanych przypadków funkcji copula gaussowskiej, Franka, Gumbela, Placketta i Claytona.

Podsumowanie

Zasadniczym celem niniejszego opracowania było omówienie propozycji uogólnienia rozkładu warunkowego w ramach modeli M-GARCH omawianych szczegółowo w pracach Pipień (2006, 2007). Zaproponowano rodzinę rozkładów niezmienniczych na transformacje ortogonalne (por. Fang, Kotz i Ng, 1990) zgodnie z koncepcją zaproponowaną w pracy Ferreira i Steel (2006).

Analizowany w części empirycznej dwuwymiarowy szereg czasowy dziennych stóp zmian kursów SPOT i FUTURES indeksu WIG20 w okresie od 21.12.1999 do 27.02.2008, $t = 2053$ obserwacji, dostarczył cennych informacji na temat empirycznej zasadności proponowanego uogólnienia. Szczególnie wnioskowanie o zachowaniu w ogonach gęstości rozkładu warunkowego uległo

zasadniczej zmianie w modelach z czynnikiem ortogonalnym. W standardowych modelach Copula-M-GARCH liczba stopni swobody wskazywała na podobną grubość ogonów jednowymiarowych elementów rozkładu wektora y_j . W modelach z macierzą Householdera kierunki, wzdłuż których jest badane zachowanie gęstości, są zasadniczo inne niż te pierwotne, zdefiniowane kanonicznie. Zmienia się także wnioskowanie o grubości ogonów jednowymiarowych gęstości.

Literatura

- Bauwens L., Laurent S. (2005): *A New Class of Multivariate Skew Densities with Application to Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models*. „Journal of Business and Economic Statistics” 23, s. 346-254.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. (2006): *Multivariate GARCH Models: A Survey*. „Journal of Applied Econometrics” 21, s. 79-109.
- Fang K.-T., Kotz S., Ng K.-W. (1990): *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall, New York.
- Ferreira J.T.A.S, Steel M.F.J. (2006): *A Constructive Representation of Univariate Skewed Distributions*. „Journal of the American Statistical Association” 101, s. 823-839.
- Golub G.H., Van Loan C.F. (1983): *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore.
- Osiewalski J., Osiewalski K. (2011): *Modele hybrydowe MSV-MGARCH z trzema procesami ukrytymi w badaniu zmienności cen na różnych rynkach*. „Folia Oeconomica Cracoviensia” 52, s. 71-85.
- Osiewalski J., Osiewalski K. (2012): *Modele hybrydowe z dwoma procesami ukrytymi*. „Zeszyty Naukowe UEK, Seria Finanse” 895 (w druku).
- Osiewalski J., Pajor A. (2009): *Bayesian Analysis for Hybrid MSF-SBEKK Models of Multivariate Volatility*. „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 1, s. 179-202.
- Osiewalski J., Pajor A. (2010): *Bayesian Value-at-Risk for a Portfolio: Multi- and Univariate Approaches using MSF-SBEKK Models*. „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 2, s. 253-277.
- Osiewalski J., Pipień M. (2004): *Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland*. „Journal of Econometrics” 123, s. 371-391.
- Pipień M. (2006): *Bayesian Comparison of GARCH Processes with Skewness Mechanism in Conditional Distributions*. „Acta Physica Polonica” B 37, s. 3105-3121.
- Pipień M. (2007): *An Approach to Measuring the Relation between Risk and Return. Bayesian Analysis for WIG Data*. „Folia Oeconomica Cracoviensia” 48, s. 97-119.

Pipień M. (2010): *A Coordinate Free Conditional Distributions in Multivariate GARCH Models*. W: *Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision Making*. Eds. W. Milo, P. Wdowiński. FindEcon Conference Monograph Series 8, Łódź University Press, Łódź, s. 99-111.

Pipień M. (2012): *Orthogonal Transformation of Coordinates in Copula M-GARCH Models – Bayesian Analysis for WIG20 SPOT and FUTURES Returns*. „Folia Oeconomica Cracoviensia”, 53, s. 21-40.

COPULA M-GARCH MODELS WITH COORDINATE FREE CONDITIONAL DISTRIBUTIONS

Summary

We discuss generalisation of the conditional distribution in GARCH model and present empirical analysis indicating its empirical importance. The model is a generalised version of those presented in Pipień (2007, 2010). The flexibility of the construct involves the existence of a set of coordinates along which the fat tails and asymmetry can be modelled. In the conditional distribution both linear and nonlinear dependence between individual returns can be modelled, while the latter being described by the copula function.

In the empirical part of the paper the dynamics and dependence of daily returns of WIG20 SPOT and FUTURES are discussed.