

Urszula Grzybowska

Marek Karwański

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA MACIERZY MIGRACJI W ZARZĄDZANIU RYZYKIEM FINANSOWYM

Wstęp

W ostatnich latach coraz częściej do opisu kondycji finansowej podmiotów gospodarczych stosuje się podejście oparte na ratingach. Podmioty gospodarcze, np. banki, państwa, kredytobiorcy, są grupowane w skończoną liczbę klas obiektów o podobnej kondycji finansowej opisywanych za pomocą skal ratingowych. Ratingi wyznaczają dyskretną przestrzeń stanów. Prawdopodobieństwa przejścia elementów między klasami są opisywane przez tzw. macierze migracji. Macierze migracji stosowane w ryzyku kredytowym są macierzami przejścia dyskretnych łańcuchów Markowa z jednym stanem pochłaniającym, stanem niewypłacalności („default”). Są to macierze diagonalnie dominujące, a ich największa wartość własna wynosi 1. Macierze migracji stosowane w ubezpieczeniach komunikacyjnych lub badaniu profilu użytkowników kart kredytowych są macierzami regularnymi [Iosifescu 1987, s. 96].

W niniejszym artykule przedstawiono przykłady zastosowania macierzy migracji w szacowaniu ryzyka kredytowego, w ubezpieczeniach Bonus-Malus oraz w badaniu zmian zachowań użytkowników kart kredytowych.

1. Zastosowanie macierzy migracji w szacowaniu ryzyka kredytowego

Nowe Umowy Kapitałowe (Basel II/III) zaostrzyły zasady zarządzania ryzykiem i wprowadziły możliwość wykorzystywania przez banki systemów IRB,

czyli wewnętrznych systemów ratingowych, do celów wyznaczania zabezpieczenia kapitałowego oraz do wyznaczania wewnętrznych miar ryzyka. Podejście IRB wymaga szacowania indywidualnych PD (prawdopodobieństw migracji do stanu niewypłacalności) dla każdego kredytobiorcy. W ramach tego podejścia są wykorzystywane macierze migracji szacowane na podstawie danych historycznych, którymi dysponuje bank.

W artykule oparto się na ratingu obejmującym 8 stanów [Saunders 2001, s. 21], przy czym AAA oznacza najwyższą klasę ratingową, a D stan niewypłacalności (default). Prawdopodobieństwo p_{ij} przejścia z dowolnego stanu i do stanu j w okresie od $t-1$ do t jest liczone jako stosunek n_{ij} liczby elementów, które przeszły ze stanu i do stanu j , do ilości wszystkich elementów, które wyszły ze stanu i , tj. $\sum_j n_{ij} = N_i$:

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{N_i} \quad (1)$$

Prawdopodobieństwa przejścia wyznaczone według wzoru (1) są obliczane na podstawie ratingów dla dwóch wybranych dat. Nie są brane pod uwagę zmiany stanów wewnątrz okresu. T. Schuermann wprowadził następujący estymator prawdopodobieństw przejścia z uwzględnieniem T okresów:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} = \frac{\sum_{t=1}^T n_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^T N_i(t)} \quad (2)$$

gdzie $N_i(t) = \sum_j n_{ij}(t)$ oznacza sumaryczną liczbę migracji ze stanu i w okresie $t-1$ do t , zaś $n_{ij}(t)$ oznacza liczbę elementów, które przeszły ze stanu i do stanu j w okresie $t-1$ do t , dla $t \leq T$, $t \in \mathbb{N}$.

Macierze migracji wykorzystywane w ryzyku kredytowym są macierzami łańcuchów pochłaniających. Stąd z czasem prawdopodobieństwo migracji do stanu D nawet z najwyższej klasy wynosi 1. Porównanie macierzy migracji wyznaczonych na podstawie tych samych danych kilkoma metodami [Grzybowska, Karwański 2011] pokazało, że chociaż macierze te nie różniły się bardzo pod względem różnych miar matematycznych, różniły się znacznie pod względem prędkości zbieżności do stanu D (od 5 do 12 okresów dla migracji ze stanu CCC). Uzyskane wyniki świadczą o dużej niestabilności metod szacowania ma-

Porównując wyrazy macierzy E (tabela 1) i R (tabela 2), zauważamy, że w okresie recesji znacznie wyższe są prawdopodobieństwa migracji do stanu niewypłacalności, z wyjątkiem dwóch najwyższych klas ratingowych. Wyrazy na przekątnej macierzy migracji dla okresu recesji (macierz R), czyli prawdopodobieństwa, że kredytobiorcy nie zmieniają klasy w ciągu kolejnego roku, są niższe niż odpowiednie wyrazy macierzy dla okresu ekspansji (macierz E). Dla okresu recesji nie zaobserwowano zajścia skrajnych wydarzeń, czyli migracji z wysokich klas ratingowych do niskich i odwrotnie, na co wskazuje wyraźna koncentracja dodatnich wartości prawdopodobieństw wokół przekątnej. Oznacza ona, że prawdopodobna jest migracja tylko do najbliższych stanów.

1.2. Zastosowanie macierzy migracji do wyznaczania PD

Na podstawie prawdopodobieństw PD wylicza się ryzyko kredytowe. Miary ryzyka odnoszą się do określonego horyzontu czasowego. W praktycznych zastosowaniach różnego rodzaju wskaźniki opierające się na prawdopodobieństwie zmiany ratingu klienta są liczone dla okresu jednego roku. Tym samym wartość ryzyka jest wykorzystywana do liczenia miar biznesowych, takich jak np. dochodowość, gdzie trzeba uwzględnić prognozy prawdopodobieństwa zmian ratingu w ciągu całego okresu „życia” klienta. Stąd niezbędne są modele pozwalające szacować dynamikę zmian macierzy migracji. W ramach teorii łańcuchów Markowa macierze przejścia stanowią grupę; zmiany macierzy przejścia w danym okresie wylicza się mnożąc macierze przejść dla okresów pośrednich. W szczególności wyrazy n -tej potęgi jednorocznej macierzy migracji oznaczają prawdopodobieństwa przejścia w n -tym roku.

Do celów progностycznych wyznaczono kolejne potęgi macierzy jednorocznych. Obliczono 5 kolejnych potęg macierzy R i E. Istotne z punktu widzenia szacowania ryzyka wartości zostały przedstawione w tabelach 3 i 4. Otrzymane dla obu stanów gospodarki macierze przejścia w n krokach, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, mają malejące wyrazy na przekątnych, przy czym kolejne potęgi macierzy R mają wartości niższe niż odpowiednie potęgi macierzy E. Jednocześnie stosunkowo szybko rosną wartości w ostatnich kolumnach potęg macierzy, które są prawdopodobieństwami migracji do stanu niewypłacalności w kolejnych latach. Wzrost wartości jest szczególnie szybki dla niższych klas ratingowych w okresie recesji (tabela 4). W szczególności prawdopodobieństwo migracji do stanu D w ciągu 5 lat dla kredytobiorcy przypisanego do klasy CCC wynosi aż 90%. Ze względu na wysokie prawdopodobieństwa

Tabela 5

Średnia liczba lat przed migracją do klasy D z kolejnych klas ratingowych

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Recesja	71	60	51	40	24	12	3
Ekspansja	162	150	138	120	91	59	27

Uzyskane wyniki wydają się wskazywać na horyzonty czasowe przekraczające granice stosowane w praktyce. Jednakże bank powinien prognozować ryzyko na okres czasowy, który pozwoli na ewentualną zmianę struktury portfela. Dla produktów tzw. portfela bankowego (np. tradycyjnych produktów, takich jak kredyty) oznacza to okres kilku, a nawet kilkunastoletni. Niektóre produkty wymagają modeli szacujących ryzyko na okres kilkudziesięciu lat.

1.3. Zastosowanie macierzy migracji do obliczania wartości zagrożonej

Pomiar ryzyka kredytowego jest oparty na rozkładzie zysków i strat, zwanym dalej dla uproszczenia rozkładem strat, związanych z handlem produktami finansowymi.

Z biznesowego punktu widzenia ryzyko kredytowe oznacza koszt finansowania kredytów i składa się z dwóch składowych. Pierwsza to koszt związany bezpośrednio ze stratami wynikłymi z niewywiązywania się klientów ze swoich zobowiązań, tj. przejścia do stanu niewypłacalności, i jest mierzona wartością oczekiwaną strat. Wartość oczekiwana oznacza rzeczywistą stratę w długim okresie czasowym i musi być traktowana jako bezpośredni koszt. Druga składowa jest związana z koniecznością utrzymywania rezerw gwarantujących „bezpieczne prowadzenie działalności”, czyli tzw. kapitału ekonomicznego. Kapitał ten można traktować jako źródło finansowania w przypadku wystąpienia fluktuacji np. strat katastroficznych, które w długim okresie wchodzą do średniej, ale w krótkim okresie muszą być dodatkowo pokryte z odpowiednich rezerw. Składnik ten w ramach metodologii zwanej „wartością zagrożoną” jest mierzony na podstawie rozkładu strat.

Wartość oczekiwaną strat najczęściej wyznacza się za pomocą modeli scoringowych, czyli modeli regresyjnych pozwalających wyznaczyć średnią warunkową, gdzie czynnikami kontrolnymi są odpowiednie atrybuty klienta. Pomiar części drugiej, w ramach metodologii wartości zagrożonej, polega na wyznaczeniu odpowiedniego percentyla straty. Z uwagi na krytyczne znaczenie strat nieoczekiwanych (katastroficznych) nadzór bankowy ustanowił ścisłą wartość dla tego percentyla, a mianowicie 99%.

Istnieje kilka modeli wyliczania percentyla rozkładu strat. W niniejszym artykule skupimy uwagę na modelach wyznaczania wartości zagrożonej opartych na macierzy migracji [Gupton, Finger, Bhatia 1997]. Jednym z popularnych modeli należących do tej klasy jest tzw. CreditMetrics Model.

Teoretyczną podstawę tego modelu stanowi teoria wyceny wartości firmy zaproponowana przez Mertona [Hull, Nelken, White 2004]. Według Mertona zdolność kredytową przedsiębiorstwa można wyznaczyć porównując wartość jego aktywów i pasywów. Pasywa są w modelu Mertona wartością stałą, natomiast aktywa można przedstawić w postaci procesu stochastycznego zależnego od czasu t . Na podstawie prostych analogii Merton pokazał, że proces ten może mieć postać geometrycznego ruchu Browna. Można więc zapisać wartość aktywów A_t w postaci równania:

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} Z_t \right\} \quad (3)$$

gdzie A_0 jest stałą skalującą, zaś $Z_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ zmienną losową (o rozkładzie normalnym).

W modelu Mertona stopa zwrotu na aktywach $\frac{dA_t}{A_t}$ ma rozkład normalny. Niewypłacalność następuje wówczas, gdy wartość aktywów A_t spada poniżej pewnej granicy związanej z wartością pasywów.

Model CreditMetrics rozszerza podejście Mertona, wprowadzając zmienność jakości aktywów w sposób zgodny z systemem ratingowym. Polega to na wprowadzeniu zakresu wartości (tzw. klas) do rozkładu aktywów w taki sposób, aby prawdopodobieństwa przejść między klasami replikowały prawdopodobieństwa migracji między klasami ratingowymi. Innymi słowami sprowadza się to do wyznaczenia parametrów rozkładu aktywów A_t : μ i σ^2 na bazie macierzy migracji [Crouhy, Galai, Mark 2001, s. 315-355]. W nomenklaturze CreditMetrics aktywa są nazywane portfelem.

Produkty bankowe, które mogą wchodzić w skład portfela, to przede wszystkim tzw. transakcje bazowe, w których przepływy finansowe odbywają się w określonych momentach czasowych. Inne typy transakcji są mapowane na transakcje bazowe z użyciem metody tzw. replikacji. Wycena wartości produktu zależy w modelu zarówno od klasy ratingowej, jak i od struktury terminowej płatności poprzez wprowadzenie współczynników dyskonta pozwalających przeliczać wartości przepływów pieniężnych w różnych punktach czasowych. Jest to szczególnie istotne w sytuacji, gdy chcemy pokazać różnice ryzyka portfela w różnych stanach gospodarki.

W poniższym przykładzie założono, że bank ma portfel X składający się z obligacji opisanych w tabeli 6.

Tabela 6

Atrybuty obligacji wchodzących w skład portfela X

ID	Klasa ratingowa	Kupon (wartość przepływu pieniężnego)	Zapadalność (w latach)	Wartość nominalna PLN	Wartość na koniec roku PLN
Obligacja MMM	BBB	3.00%	4	4 000 000	3 696 142.1
Obligacja XTX	A	1.00%	2	2 000 000	1 943 190.7
Obligacja YYY	CCC	10.00%	3	1 000 000	1 010 581.7

Wartość portfela X jest sumą wartości poszczególnych składowych (obligacji). Musimy uwzględnić zarówno prawdopodobieństwo przepływów finansowych związanych z „kuponami” odzwierciedlone w macierzy migracji pomiędzy klasami ratingowymi, jak i fakt, że przepływy finansowe następują w różnych punktach czasowych. Za krzywą dyskontową przyjmijmy funkcję stałą $Dyskonto_t = 0,06$ – taka struktura stóp procentowych pozwala na wyrażenie wyniku w kategorii testów warunków skrajnych, czyli zmian ryzyka przy zmianie wartości tej funkcji.

Aby obliczyć ryzyko, czyli średnią stratę oraz 99% percentyl strat (wartość zagrożoną) w horyzoncie czasowym 1 roku, trzeba wyznaczyć rozkład wartości poszczególnych obligacji w tym okresie. Przy założeniu, że roczne stopy zwrotu obligacji mają rozkład normalny (co wynika z modelu Mertona), można oszacować parametry rozkładu portfela na podstawie wartości średnich i macierzy migracji. Wartość średnia strat jest sumą wartości średnich strat poszczególnych obligacji, natomiast wartość zagrożoną portfela liczy się na podstawie macierzy migracji: metodą symulacyjną Monte Carlo lub metodą uproszczoną za pomocą aproksymacji rozkładem normalnym.

W poniższych obliczeniach porównano wartości ryzyka dla dwóch stanów ekonomii: cyklu recesji (R) i cyklu ekspansji (E), wyznaczone z zastosowaniem obu metod.

W tabeli 7 przedstawiono obliczenia dla portfela X opisanego w tabeli 6. Wartość zagrożona dla recesji jest wyraźnie wyższa niż dla stanu ekspansji gospodarczej.

W przypadku rzeczywistych portfeli okazuje się, że stany gospodarki wpływają nie tylko na prawdopodobieństwa migracji pomiędzy różnymi klasami, ale również na współczynniki dyskontujące. Wartość tych współczynników spada w trakcie recesji. Ma na to wpływ zarówno polityka banku centralnego (decyzje polityki pieniężnej), jak i ogólne zapotrzebowanie na środki finansowe.

Tabela 7

Porównanie ryzyka (wartości zagrożonych) dla różnych stanów gospodarki – cykl ekspansji i recesji

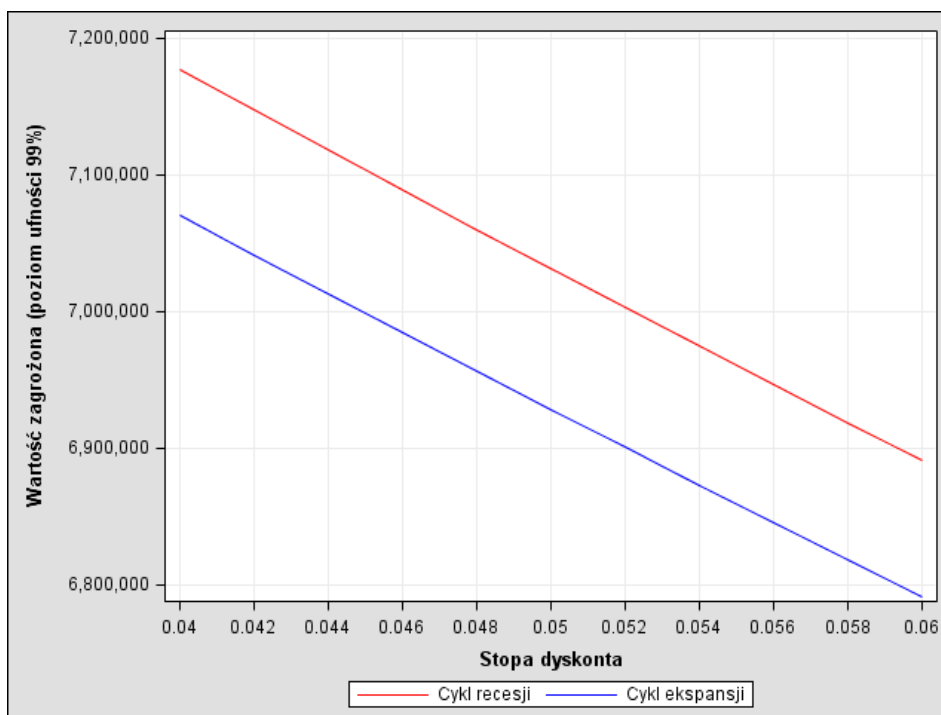
Parametry ryzyka Cykl ekspansji	Wartość
Wartość średnia	6 504 607,13
Odchylenie stand.	349 112,91
Value at Risk (99% perc.)	6 790 857,02
Value at Risk (Normal approximation)	7 316 765,20
Parametry ryzyka Cykl recesji	Wartość
Wartość średnia	6 146 635,78
Odchylenie stand.	630 656,28
Value at Risk (99% perc.)	6 871 216,25
Value at Risk (Normal approximation)	7 613 761,67

Zmiany makroekonomiczne wpływają na zmiany prawdopodobieństw migracji pomiędzy klasami ratingowymi, dlatego do modelowania ryzyka w okresach „ekspansji” i „recesji” trzeba użyć innych macierzy. Z drugiej strony zmiany gospodarcze wpływają na stopy dyskontowe. Oba efekty wzmacniają się, wpływając na wartość portfela.

Na rysunku 1 przedstawiono wykresy zmian wartości portfela X spowodowane zmianami stóp dyskontowych w cyklu recesji i ekspansji [Bluhm, Overbeck, Wagner 2003]. Linia czerwona i niebieska odpowiadają sytuacji opisywanej przez różne macierze migracji z uwzględnieniem zmian stóp dyskontowych. Zmiany stóp użyte w poniższych symulacjach mają postać tzw. przesunięć równoległych, tzn.:

$$Dyskonto_t^{nowe} = Dyskonto_t^{stare} + \Delta \quad (4)$$

Warto zwrócić uwagę, że w naszym modelu różnica wartości ryzyka w różnych cyklach gospodarczych wynikająca ze zmian macierzy migracji jest porównywalna z przesunięciem stóp dyskontowych o 1%. Jednocześnie daje to odpowiedź na pytanie, w jaki sposób różne macierze migracji mogą wpływać na wartość portfela w sytuacji zmian w otoczeniu ekonomicznym banku.



Rys. 1. Zmiany poziomu ryzyka (wartości zagrożonej) w funkcji zmian stóp dyskonta w różnych stanach cyklu gospodarczego

2. Zastosowanie macierzy migracji w systemach komunikacyjnych typu Bonus-Malus

System Bonus-Malus jest systemem ratingowym stosowanym w ubezpieczeniach komunikacyjnych do korekty ceny produktów komunikacyjnych. W tym systemie przejścia między klasami zależą od liczby szkód, jakie poniósł ubezpieczony w danym okresie składkowym (roku) [Denuit, Maréchal, Pitrebois 2007, s. 165-178; Lemaire 1998]. Systemy Bonus-Malus były omawiane w publikacjach polskojęzycznych [Miszczyńska, Miszczyński 2006, s. 387-398; Podgórska 2008, s. 206-231]. Macierze przejścia systemów Bonus-Malus są macierzami regularnymi. Z czasem ich potęgi stabilizują się wokół pewnego poziomu równowagi, odpowiadającego oczekiwanej liczbie szkód w ciągu roku.

Do analizy wykorzystano dane jednego z dużych amerykańskich towarzystw ubezpieczeniowych dotyczące 1500 ubezpieczonych w 4 kolejnych latach obejmujących okres 2000-2003. Dane pochodziły z systemu B-M z 13 kla-

sami typu +1/-3, tzn. każdy rok bezszkodowej jazdy powodował przesunięcie ubezpieczonego o jedną klasę w górę, zaś zgłoszenie co najmniej jednej szkody przesuwało ubezpieczonego o 3 klasy w dół. Ze względu na brak informacji o szacowaniu prawdopodobieństwa wystąpienia szkody wyznaczono macierze migracji, wykorzystując wzór (2) (tabela 8). Następnie wyznaczono wektor stacjonarny dla oszacowanej macierzy przejścia jako lewy unormowany wektor własny odpowiadający jej największej wartości własnej (tabela 9).

Tabela 8

Macierz migracji systemu B-M

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,2	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,163	0	0,837	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,075	0	0	0,925	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0,124	0	0	0	0,876	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0,084	0	0	0	0,916	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0,062	0	0	0	0,938	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0,051	0	0	0	0,949	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0,06	0	0	0	0,94	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0,055	0	0	0	0,945	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0,063	0	0	0	0,937	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0,068	0	0	0	0,932	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0,059	0	0	0	0,941
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,053	0	0	0,947

Tabela 9

Wektor stacjonarny

0,01	0,02	0,02	0,04	0,09	0,13	0,46	0,78	1,00	5,32	4,99	4,65	82,49
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

Wyrazy wektora stacjonarnego opisują długookresowe zachowanie ubezpieczonych. Otrzymane wartości sugerują, że z czasem, niezależnie od klasy początkowej, około 82,5% ubezpieczonych znajdzie się w ostatniej, najwyższej klasie zniżkowej. Tendencję do koncentracji ubezpieczonych w najwyższych klasach zniżkowych wykazuje wiele systemów B-M. Wektor stacjonarny jest wykorzystywany do wyznaczania miar efektywności systemu B-M, porównywania różnych systemów B-M oraz obliczania tzw. średniego stacjonarnego poziomu składki.

3. Zastosowanie macierzy migracji w badaniu profili użytkowników kart kredytowych

Posiadacze kart kredytowych, którzy przynoszą zyski bankowi, np. spłacając z opóźnieniem swoje zobowiązania, są dzieleni na trzy grupy, w zależności od sposobu wywiązywania się ze swoich zobowiązań:

1. Transaktorzy (T).
2. Rewolwery (R).
3. Klienci ekonomiczni (convenience user, swingerzy (S) [Berry, Linoff 2011, s. 580].

Do grupy określanej mianem „Transaktorzy” należą osoby, które mają duże saldo na karcie, ale regularnie spłacają swoje zobowiązania. Mianem „Rewolwerów” określa się posiadaczy kart kredytowych, którzy mają duże saldo na karcie, ale nie spłacają zadłużenia regularnie. „Klienci ekonomiczni” charakteryzują się rzadkimi, ale dużymi transakcjami, które spłacają przez dłuższy czas, ponosząc koszty odsetek.

Tabela 10

Macierz A migracji profili użytkowników kart kredytowych

	R	S	T
R	0,8972	0,1028	0
S	0,3289	0,3896	0,2815
T	0	0,0720	0,9280

Dane dotyczyły 2100 posiadaczy kart kredytowych, których przynależność do klas była weryfikowana co 3 miesiące (okresy 3-miesięczne). Do analizy wykorzystano 12 okresów, przy czym pierwszy okres był dla wszystkich początkowym okresem używania karty. Na podstawie danych wyznaczono macierz migracji A według wzoru (2) (tabela 10). Ponieważ macierz przejścia użytkowników kart kredytowych jest macierzą regularną, zachowanie długookresowe można badać wykorzystując rozkład stacjonarny.

Tabela 11

Unormowany lewy wektor własny odpowiadający największej wartości własnej macierzy przejścia A

R	0,3945
S	0,1233
T	0,4821

Otrzymany wektor własny macierzy A (tabela 11) sugeruje, że z czasem, niezależnie od początkowej klasyfikacji, około 40% użytkowników kart będzie „Rewolwe-

rami”, 48% „Transaktorami” i tylko 12% „Klientami ekonomicznymi”. Zbieżność kolejnych potęg macierzy migracji do rozkładu stacjonarnego jest bardzo wolna.

Podsumowanie

Macierze migracji są powszechnie stosowane w zarządzaniu ryzykiem kredytowym. W artykule przedstawiono ich wykorzystanie do wyznaczania prawdopodobieństw przejścia do stanu niewypłacalności w zadanym horyzoncie czasowym dla różnych stanów gospodarki. Pokazano także, jak macierze migracji wyznaczone dla różnych stanów gospodarki wpływają na szacowanie wartości zagrożonej (ryzyka). Wartość zagrożona jest większa w okresie recesji. Na zwiększenie ryzyka ma wpływ zarówno postać macierzy migracji, jak i zmiana stóp dyskontowych.

Macierze migracji są także stosowane w systemach ubezpieczeń komunikacyjnych typu Bonus-Malus oraz w ubezpieczeniach zdrowotnych. Przyjmuje się, że migracje podmiotów są opisywane przez macierze przejścia jednorodnych łańcuchów Markowa pierwszego rzędu. Nie wszystkie dane rzeczywiste, z którymi mieliśmy okazję się zetknąć, potwierdzają tę zasadę. W szczególności, w kontekście macierzy migracji stosowanych w ryzyku kredytowym, są spotykane różne odstępstwa od przyjętego standardu. Spora część kredytobiorców, którzy stali się niewypłacalni, po spełnieniu pewnych zobowiązań powraca do bazy danych z wysokim ratingiem. Oznacza to, że stan D nie jest pochłaniający. Wyznaczone przez nas macierze na podstawie danych rzeczywistych nie były diagonalnie dominujące. W praktyce jest widoczna wyraźna tendencja opisywana w literaturze jako „rating drift” [Bangia, Diebold, Schuermann 2000, s. 21-25]. Oznacza to, że istnieje potrzeba poszukiwania innych modeli macierzy migracji, które nie są oparte na teorii jednorodnych łańcuchów Markowa pierwszego rzędu.

Bibliografia

Basel II: Revised International Capital Framework. <http://www.bis.org/publ/bcbsca.htm>.

Basel III: <http://www.bis.org/bcbs/basel3.htm>.

Bangia A., Diebold F., Schuermann T., 2000: Rating Migration and the Business Cycle, with Application to Credit Portfolio Stress Testing. The Wharton Financial Institution, <http://www.ssc.upenn.edu/~diebold/index.html>.

Berry M.J.A., Linoff G.S., 2011: Data Mining Techniques for Marketing, Sales and Consumer Relationship Management. John Wiley & Sons.

- Bluhm C., Overbeck L., Wagner C., 2003: *An Introduction to Credit Risk Modeling*. Chapman and Hall, London.
- Crouhy M., Galai D., Mark R., 2001: *Risk Management*. McGraw-Hill, New York.
- Denuit M., Maréchal X., Pitrebois S., 2007: *Actuarial Modelling of Claim Counts Risk Classification. Credibility and Bonus-Malus*. John Wiley & Sons.
- Grzybowska U., Karwański M., 2011: Wykorzystanie miar matematycznych i biznesowych do porównywania modeli macierzy migracji stosowanych w analizie ryzyka kredytowego. „Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych”, t. XII, nr 2, Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Gupton G., Finger C., Bhatia M., 1997: *CreditMetrics – Technical Document*. J.P. Morgan.
- Hull J., Nelken I., White A., 2004: *Merton’s Model, Credit Risk, and Volatility Skews*. University of Toronto.
- Iosifescu M., 1987: *Skończone łańcuchy Markowa*. WNT, Warszawa.
- Lemaire J., 1998: *Bonus-Malus Systems: The European and Asian Approach to Merit-Rating*. „North American Actuarial Journal”, Vol. 2, No. 1.
- Miszczyńska D., Miszczyński M., 2006: *Systemy ubezpieczeń Bonus-malus. Podejście symulacyjne*. W: *Modelowanie preferencji a ryzyko*. T. Trzaskalik (red.). AE, Katowice, s. 387-398.
- Podgórska M. (red.), 2008: *System Bonus-Malus sprawiedliwy w sensie przejść między klasami*. *Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu*, Wrocław, nr 1 (1201), s. 206-231.
- Saunders A., 2001: *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*. Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Schuermann T.: *Credit Migration Matrices*. W: *Encyclopedia Quantitative Risk Analysis & Assessment*. <http://www.wiley.com/legacy/wileychi/risk/>.

MIGRATION MATRICES AND THEIR APPLICATION IN RISK MANAGEMENT

Summary

Migration matrices are widely used in various areas of risk management. In credit risk management an obligor is assigned to one of several rating classes and his future rating is determined by a transition matrix of a Markov chain. The probability that an obligor will change his credibility can be read off a migration matrix. The most important aspect of credit risk management is estimation of the probability that the obligor will not be able to meet his financial commitments, i.e., estimation of the probability of his default. The other field where migration matrices are used are insurance Bonus-Malus systems. The aim of the paper is to present applications of migration matrices in credit risk management, automobile insurance and in investigation of credit card users profiles.