

**Krzysztof Targiel**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# **MODELOWANIE ZMIAN ZMIENNYCH STANU W MODELU DWUMIANOWYM DO CELÓW WYCENY OPCJI REALNYCH\***

## **Wprowadzenie**

Najpowszechniej stosowanym podejściem w wycenie opcji realnych jest wykorzystanie drzewa dwumianowego metodą zaproponowaną przez Coxa, Rossa i Rubinsteina [1979]. Przyjmuje się, że wartość opcji zależy od pewnej wielkości ekonomicznej nazywanej zmienną stanu. Dodatkowa wartość sytuacji opcyjnej wynika z faktu, iż zmienna stanu porusza się w pewnym procesie stochastycznym, mogąc dzięki temu osiągnąć korzystne wartości. Metoda drzew dwumianowych polega na pokryciu tego procesu drzewem, w którym za każdym razem wartość zmiennej stanu może wzrosnąć lub spaść. Utworzony graf wartości jest drzewem, w węzłach którego znajdują się rozważane wartości zmiennej stanu, natomiast łuki pokazują możliwe przejścia pomiędzy tymi wartościami. Bardzo istotne jest właściwe dopasowanie drzewa dwumianowego. Jest to jeden pierwszych etapów wyceny opcji realnych. Jest dokonywany na podstawie historycznych danych procesu stochastycznego. Niniejszy artykuł jest poświęcony problemowi doboru parametrów drzewa dwumianowego.

Rozdział pierwszy przedstawia istotę problemu. Na podstawie kilku przykładów pokazujących niewłaściwie dobrane drzewa jest zobrazowana waga problemu. Kolejny rozdział przedstawia rozważane w literaturze przedmiotu modele procesów stochastycznych. Wybór odpowiedniego procesu stochastycznego ma decydujące znaczenie dla sposobu obliczania węzłów drzewa dwumianowego, co jest przedmiotem kolejnego rozdziału. Całość kończy przykład oblicze-

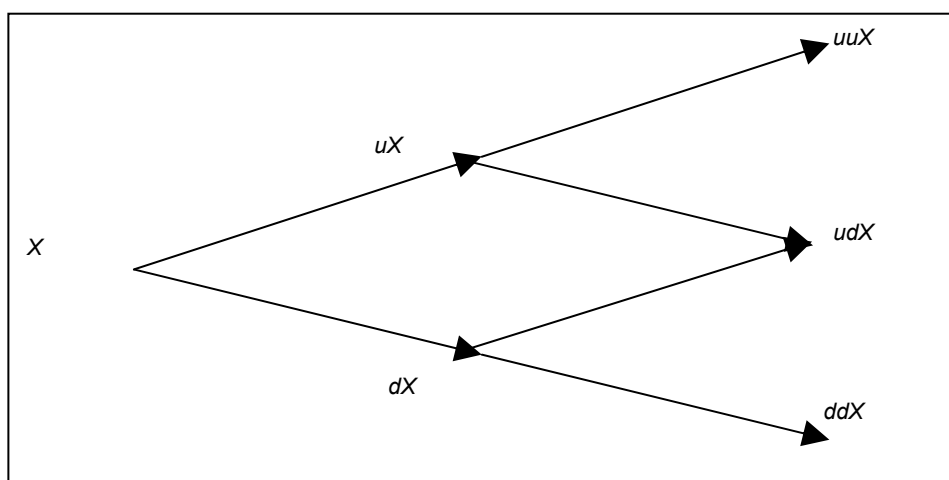
---

\* Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki jako projekt badawczy nr N N 111 477740.

niowy doboru drzewa dwumianowego do rzeczywistego szeregu czasowego przedstawiającego kurs wymiany euro do PLN. Przykład oparto na danych historycznych, dzięki czemu była możliwa weryfikacja procedury.

## 1. Drzewa dwumianowe

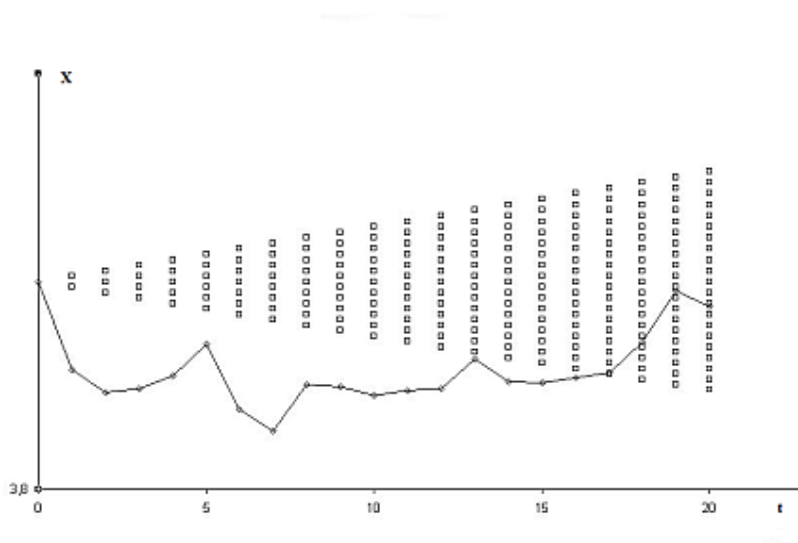
Drzewo dwumianowe, którego przykład pokazano na rys. 1, pełni rolę swojego scenariusza możliwych zmian zmiennej stanu. Rozpatruje się tylko wzrost w stopniu  $u$  oraz spadek wartości w stopniu  $d$ . Rozważania rozpoczyna się od znanej obecnej wartości zmiennej stanu ( $X$ ). Na podstawie historii zmian tej wielkości należy ustalić odpowiednie wartości  $u$  oraz  $d$ . Po ustaleniu horyzontu czasowego i podzieleniu go na okresy, reprezentowane przez węzły grafu, zostaje utworzone drzewo możliwych zmian zmiennej stanu, możliwych scenariuszy rozwoju sytuacji.



Rys. 1. Struktura drzewa dwumianowego

Źródło: Opracowanie własne.

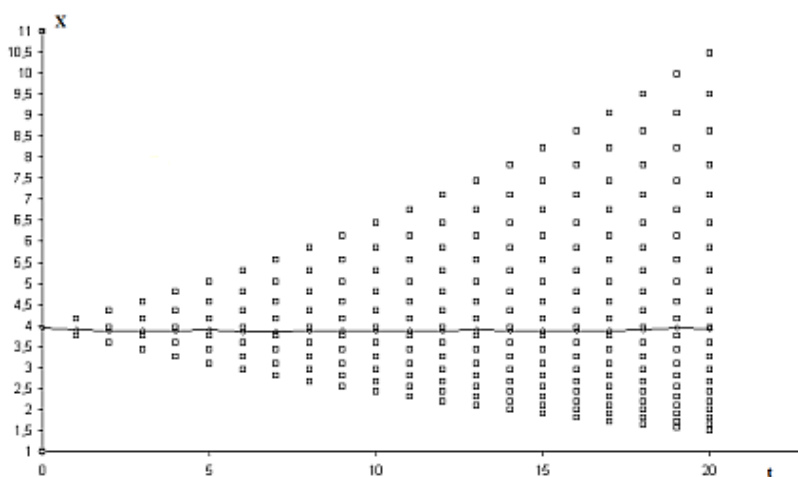
Dobranie zbyt małych wartości parametrów wzrostu i spadku może spowodować, iż drzewo dwumianowe nie pokryje przyszłych zmian procesu stochastycznego wartości  $X$ , jak pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Drzewo dwumianowe dla  $u = 1,001$  i  $d = 0,9990$

Źródło: Opracowanie własne.

Dobranie zbyt dużych wartości parametrów wzrostu i spadku może spowodować, iż drzewo dwumianowe obejmie zbyt duże spektrum wartości, nie pokrywając drobnych zmian zmiennej stanu, co jest widoczne na rys. 3 przedstawiającym ten sam proces zmiennej stanu  $X$ .

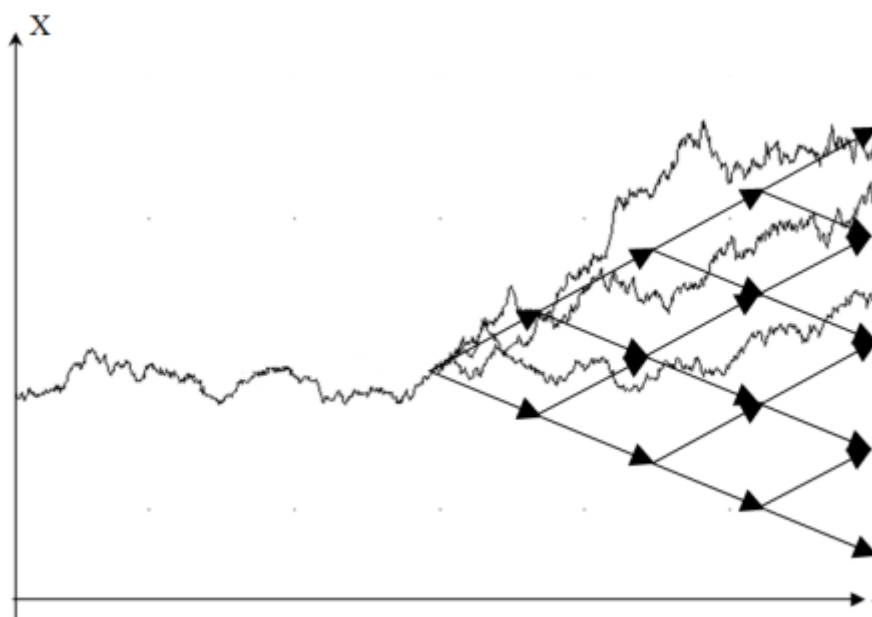


Rys. 3. Drzewo dwumianowe dla  $u = 1,05$  i  $d = 0,9523$

Źródło: Opracowanie własne.

Estymacja parametrów musi się rozpocząć od dobrania odpowiedniego procesu stochastycznego modelującego zmienność zmiennej stanu. Konsekwencją wybranego modelu jest sposób obliczania parametrów wzrostu i spadku oraz prawdopodobieństwa tych zmian. Na rysunku 4 pokazano drzewo dwumianowe dobrane na podstawie innego modelu, niż wygenerowane trzy ścieżki procesu stochastycznego. Niektóre ścieżki wychodzą poza obszar, który obejmuje drzewo. Dodatkowo wygenerowane procesy kształtują się w górnej części drzewa dwumianowego.

Wybór typu modelu jest nazywany modelowaniem, natomiast dobór parametrów modelu – kalibracją [Seydel 2009, s. 53].



Rys. 4. Błędnie dobrany model drzewa dwumianowego (drzewo dla procesu BM, ścieżki dla procesu GBM)

Źródło: Opracowanie własne.

## 2. Modele procesów zmian zmiennej stanu

W literaturze przedmiotu [Dixit, Pindyck 1994] są rozważane trzy zasadnicze grupy procesów stochastycznych wykorzystywanych do modelowania zmian zmiennej stanu. Są to procesy dyfuzyjne, procesy Poissona oraz procesy mieszane. W niniejszym artykule skupiono się na pierwszej grupie procesów. Omówiono tu procesy Arytmetycznego Ruchu Browna, Geometrycznego Ruchu

Browna oraz proces Orsteina-Uhlenbecka jako szczególny przypadek procesu z powrotem do średniej.

## 2.1. Arytmetyczny Ruch Browna

Proces stochastyczny nazywany Arytmetycznym Ruchem Browna (*Brownian Motion* – BM) jest dany równaniem różniczkowym [Weron, Weron 1998, s. 166]:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

gdzie:

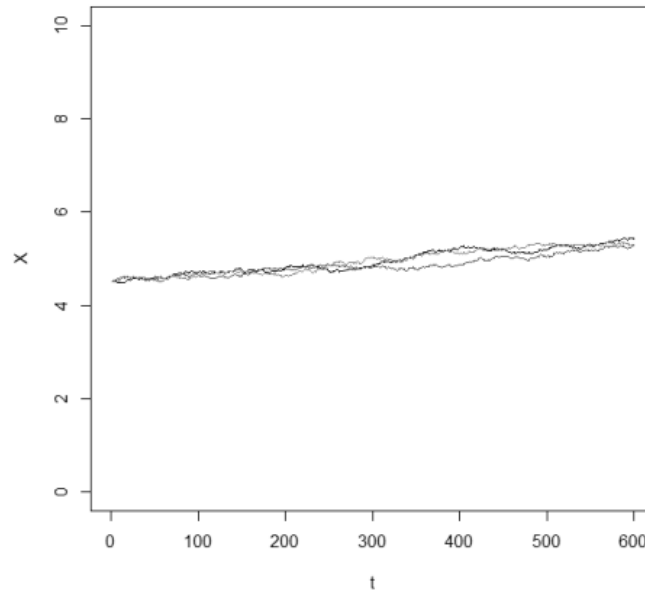
$W_t$  – proces Wienera,

$X_t$  – zmienna stanu,

$\mu$  – dryf procesu,

$\sigma$  – zmienność procesu.

Wybór tego typu modelu może mieć uzasadnienie zwłaszcza w przypadku wskaźników technicznych. Przykładowe trajektorie takiego procesu przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Arytmetyczny Ruch Browna dla  $X_0 = 4,5$ ,  $\mu = 0,08$  i  $\sigma = 0,1$

Źródło: Opracowanie własne w programie R.

## 2.2. Geometryczny Ruch Browna

Proces stochastyczny nazywany Geometrycznym Ruchem Browna (*Geometric Brownian Motion* – GBM) jest dany równaniem różniczkowym [Weron, Weron 1998, s. 167]:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (2)$$

gdzie:

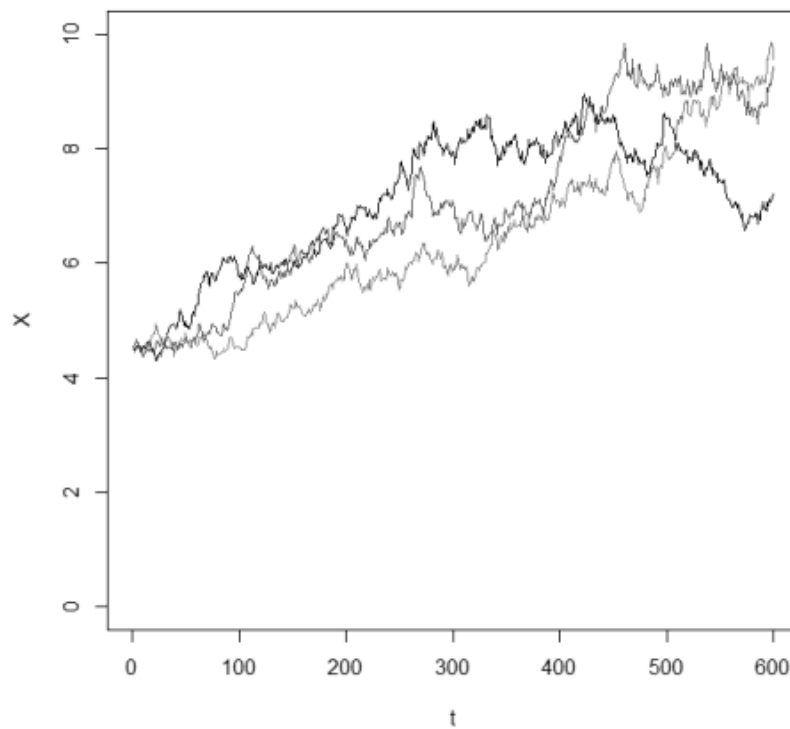
$W_t$  – proces Wienera,

$X_t$  – zmienna stanu,

$\mu$  – dryf procesu,

$\sigma$  – zmienność procesu.

Przykładowe trajektorie takiego procesu przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Geometryczny Ruch Browna  $X_0 = 4,5$ ,  $\mu = 0,08$  i  $\sigma = 0,1$

Źródło: Opracowanie własne w programie R.

Wykorzystanie tego procesu ma szczególne uzasadnienie w przypadku, gdy zmienną stanu jest instrument finansowy notowany na giełdzie, taki jak akcje, dla których jest obserwowany eksponentalny wzrost wartości.

### 2.3. Procesy z powrotem do średniej

Grupa procesów, w których obserwuje się powrót do średniej (*Mean Reverting Model* – MRM), jest dana równaniem różniczkowym [Seydel 2009, s. 39]:

$$dX_t = \lambda(R - X_t)dt + \sigma X_t^\beta dW_t \quad \text{dla } \lambda > 0 \quad (3)$$

gdzie:

$W_t$  – proces Wienera,

$X_t$  – zmienna stanu,

$\lambda$  – parametr określający szybkość powrotu do średniej,

$\beta$  – parametr,

$\sigma$  – zmienność procesu,

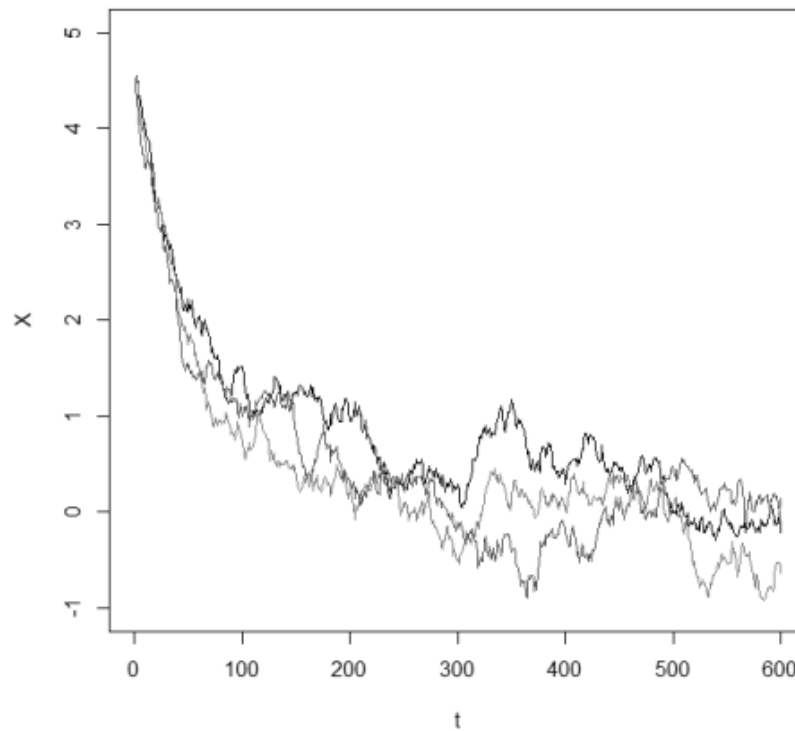
$R$  – średnia.

Dla szczególnych wartości parametrów uzyskujemy znane z literatury procesy [Gątarek, Maksymiuk 1998]:

- $\beta = 0, R = 0$  – proces Orsteina-Uhlenbecka,
- $\beta = 0, R > 0$  – model Vasička,
- $\beta = 1/2, R > 0$  – proces Coxa-Ingersolla-Rossa (CIR).

Wykorzystanie tej grupy procesów ma szczególne uzasadnienie ekonomiczne. Dla wielu wielkości ekonomicznych jest obserwowany efekt powrotu do pewnego ustalonego poziomu cen.

Przykładowe trzy trajektorie procesu Orsteina-Uhlenbecka przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Proces Orsteina-Uhlenbecka dla  $X_0 = 4,5$ ,  $\lambda = 1,0$  i  $\sigma = 0,5$

Źródło: Opracowanie własne w programie R.

### 3. Estymacja parametrów drzewa dwumianowego

Oceny właściwych wartości drzewa dwumianowego dokonujemy poprzez porównanie własności probabilistycznych wynikających z teoretycznego modelu oraz jego dyskretnego przybliżenia w postaci drzewa dwumianowego. Porównywane będą dwa pierwsze momenty, tj. wartość oczekiwana oraz wariancja procesu.

Dla ogólnej postaci procesu dyfuzyjnego:

$$dX_t = \alpha(X_t, t) dt + \sigma(X_t, t) dW_t \quad (4)$$

wartość oczekiwana jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}[dX_t] = \alpha(X_t, t) dt \quad (5)$$



natomiast wariancja procesu jest dana wzorem:

$$\mathbf{Var}[dX_t] = \sigma^2(X_t, t) dt \quad (6)$$

Poprzez porównanie powyższych zależności z wartościami dla modelu dyskretnego w postaci drzewa dwumianowego uzyskujemy wzory na parametry drzewa. Są one zależne od obserwowanej realizacji procesu stochastycznego, które Guthrie [2009, s. 267] zaleca obliczać jako średnią arytmetyczną ( $\hat{\nu}$ ) z danych historycznych dla dryfu ( $\hat{\mu}$ ), procesów GBM oraz BM:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\nu}}{\Delta t_d} \quad (7)$$

Natomiast zmienność procesu ( $\hat{\sigma}$ ) ocenia się na podstawie odchylenia standardowego ( $\hat{\phi}$ ) z danych historycznych:

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{\Delta t_d}} \quad (8)$$

W obydwu przypadkach  $\Delta t_d$  oznacza część roku, dla której są podawane dane historyczne. Dla danych dziennych jest to 1/250 część roku, przy założeniu, iż mamy 250 dni roboczych w roku.

### 3.1. Dla Arytmetycznego Ruchu Browna

Na podstawie znajomości estymatora zmienności Arytmetycznego Procesu Browna ( $\hat{\sigma}$ ) można obliczyć stopień wzrostu oraz spadku w drzewie dwumianowym obejmującym w najlepszym stopniu taki proces [Guthrie 2009, s. 327]:

$$u = \hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m} \quad (9)$$

$$d = -\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m} \quad (10)$$

W tym przypadku  $\Delta t_m$  oznacza część roku odpowiadającej etapowi siatki dwumianowej.

Węzły siatki drzewa dwumianowego są obliczane ze wzoru [Guthrie 2009, s. 327]:

$$X(i, n) = X_0 + (n - 2i) \cdot \hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m} \quad (11)$$

gdzie:

$i$  – liczba spadków,

$n$  – numer etapu.

### 3.2. Dla Geometrycznego Ruchu Browna

Na podstawie znajomości estymatora  $\hat{\sigma}$  można obliczyć stopień wzrostu oraz spadku w drzewie dwumianowym obejmującym w najlepszym stopniu proces GBM [Guthrie 2009, s. 268]:

$$u = e^{\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m}} \quad (12)$$

$$d = e^{-\hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m}} \quad (13)$$

Guthrie [2009, s. 268] podaje w przypadku wyboru Geometrycznego Ruchu Browna jako procesu zmian zmiennej stanu wzór na obliczanie węzłów siatki drzewa dwumianowego:

$$X(i, n) = X_0 e^{(n-2i) \hat{\sigma} \sqrt{\Delta t_m}} \quad (14)$$

gdzie:

$i$  – liczba spadków,

$n$  – numer etapu.

### 3.3. Dla procesów z powrotem do średniej

Do oceny estymatora zmienności ( $\hat{\sigma}$ ) Guthrie [2009, s. 272] dla procesu Orsteina-Uhlenbecka wykorzystuje model autoregresyjny stopnia pierwszego (AR(1)) w postaci:

$$x_{j+1} - x_j = \alpha_0 + \alpha_1 x_j + u_{j+1}, \quad u_{j+1} \sim N(0, \phi^2) \quad (15)$$

gdzie:

$$x_j = \ln(X_j)$$

Stąd estymatory modelu procesu stochastycznego mogą być obliczone ze wzorów [Guthrie 2009, s. 274]:

$$\hat{R} = \frac{-\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_1} \quad (16)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{-\ln(1 + \hat{\alpha}_1)}{\Delta t_d} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\phi} \sqrt{\frac{2 \ln(1 + \hat{\alpha}_1)}{\hat{\alpha}_1(2 + \hat{\alpha}_1)\Delta t_d}} \quad (18)$$

Dla procesów z powrotem do średniej sposób obliczania parametrów  $u$  i  $d$  jest identyczny jak dla procesu GBM (wzory 12 i 13). W ten sam sposób oblicza się także węzły siatki drzewa dwumianowego (wzór 14).

### 3.4. Weryfikacja modelu dyskretnego

Jakość pokrycia przez drzewo dwumianowe przyszłych zmian procesu stochastycznego ocenimy poprzez miernik średniokwadratowej odległości realizacji procesu od najbliższego węzła drzewa dwumianowego:

$$MAE_{min} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \left( \min_i |X(i, n) - x_n| \right) \quad (19)$$

gdzie:

$X(i, n)$  – dla  $n = 1, \dots, M$ ,  $i = 1, \dots, M - i$ -ty węzeł drzewa dwumianowego na  $n$ -tym etapie,

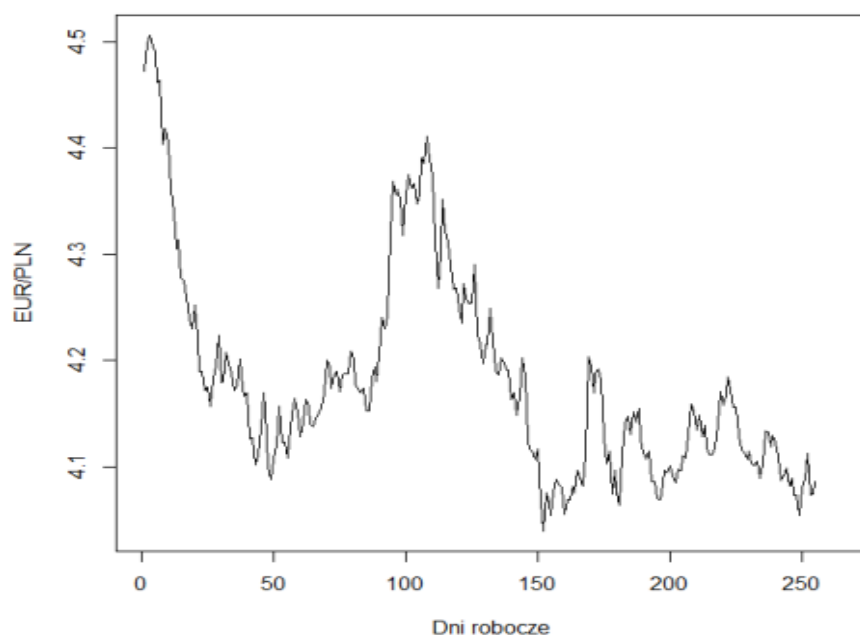
$x_n$  – realizacja procesu losowego w momencie rozpoczęcia  $n$ -tego etapu,

$M$  – liczba etapów w horyzoncie czasowym.

## 4. Przykład obliczeniowy

Jako przykład ilustrujący przedstawiane metody obliczono parametry siatki drzewa dwumianowego dla kursu wymiany euro do złotego (EUR/PLN). Na podstawie dziennych danych z 2012 r. (kursu wymiany pokazanego na rys. 8) wyestymowano parametry trzech rozważanych procesów stochastycznych, a na-

stępnie wykorzystano te parametry do utworzenia drzewa dwumianowego pokrywającego zmiany rozważanego kursu w styczniu 2013 r. Do weryfikacji uzyskanego rezultatu wykorzystano miarę  $MAE_{\min}$ .



Rys. 8. Proces zmian kursu wymiany EUR/PLN w 2012 r.

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie notowań kursu wymiany EUR/PLN z 2012 r. estymowano średnią oraz odchylenie standardowe z dziennych wartości kursu zamknięcia. Dane te posłużyły do oszacowania parametrów procesu stochastycznego. Na ich podstawie obliczono właściwy stopień wzrostu ( $u$ ) i spadku ( $d$ ) wartości zmiennej stanu. Parametry te posłużyły do utworzenia drzewa dwumianowego z etapami dziennymi ( $M = 20$ ). Na tak utworzone drzewo nałożono rzeczywisty przebieg kursów wymiany w styczniu 2013 r. Za pomocą wskaźnika  $MAE_{\min}$  oceniono, jak blisko proces ten przechodził obok węzłów utworzonego drzewa. Uzyskane wyniki dla procesów BM i GBM przedstawiono w tabelach 1-2.

Tabela 1

Obliczenia dla BM

$\Delta t_d$	$\hat{v}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\sigma}$	$\Delta t_m$	$u$	$d$	$MAE_{\min}$
1/250	-0,00035	-0,0875	0,0054	0,0851	1/250	0,0054	-0,0054	0,0060

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 2

Obliczenia dla GBM

$\Delta t_d$	$\hat{v}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\sigma}$	$\Delta t_m$	$u$	$d$	$MAE_{\min}$
1/250	-0,00035	-0,0875	0,0054	0,0851	1/250	1,0054	0,9946	0,0112

Źródło: Opracowanie własne.

Dla modelu MRM-OU (procesu Orsteina-Uhlenbecka) wyestymowano parametry modelu AR(1), a następnie wykorzystano je do obliczenia estymatora  $\hat{\sigma}$  zgodnie ze wzorem (18). Wyniki przedstawiono w tabeli 3.

Tabela 3

Obliczenia dla MRM-OU

$\Delta t_d$	$\hat{v}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\sigma}$	$\Delta t_m$	$u$	$d$	$MAE_{\min}$
1/250	-0,00035	-0,0875	0,0068	0,1375	1/250	1,0352	0,9660	0,0718

Źródło: Opracowanie własne.

Sumaryczne wyniki przedstawiono w tabeli 4.

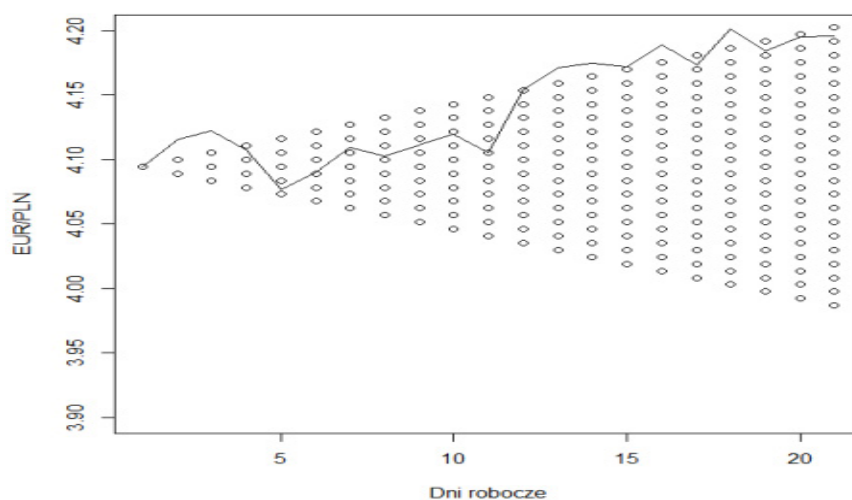
Tabela 4

Porównanie wyników dla modeli

Model	$u$	$d$	$MAE_{\min}$
BM	0,0054	-0,0054	0,0060
GBM	1,0054	0,9946	0,0112
MRM-OU	1,0352	0,9660	0,0718

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 9 przedstawiono najlepsze pokrycie uzyskane dla modelu dla węzłów drzewa generowanych dla każdego dnia stycznia 2013 r., które uzyskano dla modelu Arytmetycznego Ruchu Browna (BM).



Rys. 9. Drzewo dwumianowe najlepiej dopasowane do zmian kursu wymiany ( $M = 20$ ,  $u = 0,0054$ , model BM)

Źródło: Opracowanie własne.

Na przedstawionym rysunku widać, że pomimo najmniejszych odległości od węzłów uzyskanych dla procesu BM, siatka nie obejmuje całego spektrum zmian procesu kursu wymiany EUR/PLN.

## Wnioski

W artykule podjęto tematykę dopasowywania drzew decyzyjnych do przyszłych przebiegów pewnych wielkości ekonomicznych. Problem jest istotny w wycenie opcji realnych za pomocą metody Coxa-Rossa-Rubinsteina. Dopasowanie odbywa się najpierw poprzez wybór modelu procesu stochastycznego obserwowanego szeregu czasowego, a następnie obliczenie parametrów drzewa dwumianowego, którymi są stopień wzrostu ( $u$ ) i spadku ( $d$ ) na każdym etapie. Na przykładach pokazano, jak niewłaściwy dobór tych parametrów może wpłynąć na fakt, iż drzewo dwumianowe nie pokryje przyszłych ścieżek procesu stochastycznego opisującego zmiany rozważanej wielkości ekonomicznej nazywanej w wycenie opcyjnej zmienną stanu lub może pokryć zbyt mało dokładnie. Do ilościowej oceny dopasowania wykorzystano wskaźnik bezwzględnej odległości realizacji procesu od najbliższego węzła drzewa dwumianowego. Przedstawione przykłady pokazały jednak niedoskonałość wykorzystanego wskaźnika. Rodzi to konieczność dal-

szych badań nad metodami weryfikacji dopasowania drzewa dwumianowego do rozważanego szeregu czasowego.

## **Bibliografia**

- Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M., 1979: Option Pricing: A Simplified Approach. „Journal of Financial Economics”, No. 7, 229-263.
- Dixit A.K., Pindyck R.S., 1994: Investment under Uncertainty. Princeton University Press, Princeton.
- Gątarek D., Maksymiuk R., 1998: Wycena i zabezpieczenie pochodnych instrumentów finansowych. Wydawnictwo Liber, Warszawa.
- Guthrie G., 2009: Real Options in Theory and Practice. Oxford University Press, Oxford.
- Seydel R.U., 2009: Tools for Computational Finance. IV Ed. Springer-Verlag, Berlin.
- Weron A., Weron R., 1998: Inżynieria finansowa. WNT, Warszawa.

## **MODELING CHANGES IN STATE VARIABLE FOR PURPOSE OF REAL OPTIONS VALUATION**

### **Summary**

The concept of real options mean the actual (real) opportunities arising in business processes. We are not obliged to use them. Noticing these capabilities creates added value of the project. Its use depends on quantitative measurement. It is assumed that this value is dependent on some economic size called state variable. Additional value is derived from the fact, that the state variable moves in a stochastic process, thus being able to achieve a advantageous level.

Widely used method for the valuation of real options is binomial tree method (CRR – Cox, Ross and Rubinstein). The idea is to cover the future trajectory of the state variable with lattice. The size of the lattice depends on the nature of the stochastic process, which we can model the state variable changes.

The presented work is devoted to determining, on the basis of past changes, the type of stochastic process which is best for modeling the state variable changes, and determine on this basis of the best lattice covering the future trajectory of this variable.