

Alicja Wolny-Dominiak

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZMODYFIKOWANA REGRESJA LOGARYTMICZNO-NORMALNA W SZACOWANIU REZERWY SZKODOWEJ *

Wprowadzenie

W pracy jest analizowany proces wyznaczania rezerwy uszkodowej na szkody zaistniałe i niezgłoszone (oz. rezerwa IBNR). Rezerwę tą definiuje się następująco: jest to wartość odpowiadająca wysokości odszkodowań, które zostaną wypłacone dla szkód zaszyłych w danym okresie sprawozdawczym, ale nie zostały dotychczas zgłoszone ubezpieczycielowi lub wartość szacunkowa ustalona na podstawie oceny stopnia kataklizmu (huraganu, suszy itp.). Wysokość i liczba odszkodowań nie jest znana i może być jedynie szacowana na podstawie danych historycznych, co daje duże możliwości jeżeli chodzi o zastosowanie metody do prognozowania. Przykładowo można stosować modele oparte na analizie falkowej stosowane w zagadnieniach aktuarialnych [Dyduch, 2011]. Oba parametry są istotne w ocenie działalności finansowej w każdej firmie ubezpieczeniowej [Szkutnik, 2004]. Zgodnie z wytycznymi Solvency II, które weszły w życie 01.11.2012 r., rezerwę IBNR należy wyznaczać zgodnie z zasadą „best estimate”. Zasada ta daje zakładom ubezpieczeń możliwość stosowania modeli stochastycznych w procesie wyznaczania rezerwy IBNR, które są szeroko opisywane w literaturze aktuarialnej [Wüthrich, Merz, 2008; England, Verrall, 2002; Wolny, 2005; Pobłocka, 2011].

W pracy przedstawiono stochastyczną metodę kalkulacji rezerwy IBNR, w której jest stosowana regresja logarytmiczno-normalna do szacowania wartości przyszłych odszkodowań (oz. RLN) – [Bradu, Mundlak, 1970]. Zaproponowano korektę obciążenia funkcją g_m oraz przeprowadzono studium przypadku.

* Praca częściowo finansowana przez grant Narodowego Centrum Nauki (nr NN 111461540).

1. Analiza rozwoju szkodowości

Do oszacowania wartości rezerwy IBNR wykorzystuje się najczęściej dane w postaci macierzy zwanej trójkątem szkód. Rozważmy trójkąt szkód, który przedstawia tab. 1

Tabela 1

Nieskumulowany trójkąt szkód

i	1	...	$n-1$	n
1	$S_{1,1}$...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
2	$S_{2,1}$...	$S_{2,n-1}$	
\vdots		\vdots		
n	$S_{n,1}$			

W powyższym trójkącie:

i – okres wystąpienia szkody (okres wypadkowy), $i = 0, \dots, n-1$,

j – opóźnienie w wypłacie odszkodowania (okres rozwoju szkody), $j = 0, \dots, n-1$,

$n-1$ – okres bieżący,

$S_{i,j}$ – wartość wypłaconych odszkodowań dla szkód, które zaszły w okresie i , wypłaconych z opóźnieniem j .

Celem rozważanej metody RLN jest prognoza wartości $\hat{S}_{i,j}$ leżących poniżej przekątnej trójkąta szkód (1), co w literaturze przedmiotu jest nazywane krótko analizą rozwoju szkodowości [Straub, 1988]. Prognozowaną wartość rezerwy IBNR wyznacza się następująco:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} \hat{S}_{i,j}. \quad (2)$$

Proces kalkulacji w rezerwy IBNR metodą RLN można zatem zapisać w etapach:

- (i) zdefiniowanie modelu stochastycznego,
- (ii) estymacja parametrów modelu,
- (iii) prognozowanie nieznanymi wartościami $S_{i,j}$,
- (iv) prognozowanie rezerwy IBNR,
- (v) wyznaczenie przedziału ufności.

2. Metoda RLN – estymacja parametrów modelu

Zakładamy, że elementy trójkąta szkód (1) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie logarytmiczno-normalnym [Kelly et. al, 1995]. W pierwszym etapie kalkulacji rezerwy IBNR definiujemy model stochastyczny, wykorzystując regresję logarytmiczno-normalną [Christofides, 1990]:

$$S_{i,j} = C_i P_j, \quad (3)$$

gdzie C_i oznacza efekt okresu wypadkowego, natomiast P_j oznacza efekt okresu rozwoju szkody. W modelu występuje zatem $2n$ parametrów. Logarytmując powyższe równanie, uzyskujemy postać liniowego modelu ekonometrycznego:

$$s_{i,j} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X_i + \sum_{j=n}^{2n-1} p_j X_j + \xi_{i,j}, \quad (4)$$

gdzie $\xi_{i,j}$ jest składnikiem losowym oraz $\ln S_{i,j} = s_{i,j}$, $\ln C_i = c_i$, $\ln P_j = p_j$. Zmienne objaśniające X_i są zmiennymi binarnymi, które definiuje się w zależności od numeru indeksu:

$X_i = 1$ dla wszystkich obserwacji w okresie wypadkowym i ,

$X_i = 0$ dla wszystkich obserwacji w okresie wypadkowym różnym od okresu i ,
gdzie $i = 0, \dots, n - 1$,

$X_j = 1$ dla wszystkich obserwacji w okresie opóźnienia j ,

$X_j = 0$ dla wszystkich obserwacji w okresie opóźnienia j , gdzie $j = n, \dots, 2n - 1$.

W drugim etapie estymujemy parametry modelu (4), stosując klasyczną metodę najmniejszych kwadratów (oz. KMNK). Dla danego trójkąta szkód konstruujemy zero-jedynkową macierz \mathbf{X} . Jedynki odpowiadają obserwacjom dla okresów wypadkowych oraz opóźnień spełniających warunek $j \leq n - i - 1$. Liczba wierszy macierzy jest równa liczbie wszystkich możliwych par (i, j) , dla których $j \leq n - i - 1$. W dalszych rozważaniach przez $\mathbf{X}_{i,j}$ będziemy oznaczać kolumnę macierzy, której odpowiada para (i, j) . Postać macierzowa modelu (4) jest następująca:

$$S_{i,j} = \mathbf{X}_{i,j} \cdot \mathbf{cp} + \xi, \quad (5)$$

gdzie \mathbf{cp} jest wektorem postaci $\mathbf{cp} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$. Estymator $\hat{\mathbf{cp}}$ uzyskany

KMNK dany jest wzorem:

$$\hat{c}_i = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T s_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, n-1 \quad (6)$$

Oszacowane wartości c_i to zatem n pierwszych elementów wektora $\mathbf{c}\hat{\mathbf{p}}$, natomiast p_j to n ostatnich elementów. Macierz wariancji i kowariancji jest natomiast dana wzorem:

$$\mathbf{D}^2(\mathbf{c}\hat{\mathbf{p}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}, \quad (7)$$

gdzie nieobciążonym estymatorem wariancji składnika losowego σ^2 jest wariancja resztowa. Korzystając z macierzy (7), obliczamy średni błąd szacunku dla parametrów modelu:

$$\sqrt{D^2(\hat{c}_i)}, \quad \sqrt{D^2(\hat{p}_j)}, \quad i, j = 0, \dots, n-1. \quad (8)$$

Estymatory (6) parametrów modelu są liniowe, nieobciążone oraz najefektywniejsze przy spełnieniu założeń KMNK.

3. Metoda RLN – prognozowanie rezerwy IBNR

Kolejnymi etapami w procesie wyznaczania wartości rezerwy IBNR jest prognozowanie elementów trójkąta szkód, a ostatecznie rezerwy. W pierwszej kolejności prognozujemy logarytmiczne wartości okresowych wypłat odszkodowań $s_{i,j}$ dla okresów i, j spełniających warunek $j > n - i - 1$. W tym celu konstruujemy macierz \mathbf{X}^* dla okresów $j > n - i - 1$, analogicznie jak w przypadku macierzy \mathbf{X} . Stosując zasadę predykcji nieobciążonej mamy:

$$S_{i,j} = \mathbf{X}_{i,j}^* \mathbf{c}\hat{\mathbf{p}}, \quad (9)$$

gdzie błąd średni tej predykcji wyraża się wzorem:

$$B_{i,j}^s = \sqrt{\sigma^2 (\mathbf{X}_{i,j}^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{i,j}^*}. \quad (10)$$

Dalej przechodzimy do prognozowania wartości wypłaconych odszkodowań $S_{i,j}$. W tym celu wykorzystujemy fakt, iż zmienne te posiadają rozkład logarytmiczno-normalny o parametrach [Green, 1993]:

wartość oczekiwana $E(S_{i,j}) = \exp(s_{i,j} + 0,5B_{i,j}^s)$,
 wariancja $D^2(S_{i,j}) = \exp[2s_{i,j} + (B_{i,j}^s)^2] \cdot [\exp(B_{i,j}^s)^2 - 1]$.

Stawiamy zatem prognozę na poziomie wartości oczekiwanej i otrzymujemy postać predykcji:

$$\hat{S}_{i,j} = \exp(\hat{s}_{i,j} + 0,5\hat{B}_{i,j}^s). \quad (11)$$

Jednakże powyższy estymator jest estymatorem obciążonym. Aby zlikwidować obciążenie, wprowadzamy korektę obciążenia za pomocą funkcji $g_m(x)$ [Finney, 1941], daną wzorem:

$$g_m(x) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{m^z (m+2z)x^z}{\prod_{l=0}^z (m+2l)z!}, \quad (12)$$

gdzie m jest liczbą stopni swobody rozkładu wariancji składnika losowego σ^2 . Funkcja ta koryguje obciążenie estymatora danego ogólnym wzorem [Bradu, Mundlak, 1970]:

$$\hat{e} = \exp(s_{i,j} + d\sigma^2), \quad (13)$$

gdzie d jest dowolną stałą. Nieobciążony estymator ma więc postać:

$$\hat{e} = \exp(\hat{s}_{i,j}) g_m[(a - 0,5(\mathbf{X}_{i,j}^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{i,j}^*) \hat{\sigma}^2]. \quad (14)$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy w dalszych rozważaniach oznaczenie $x_{i,j}^* = (\mathbf{X}_{i,j}^*)^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{i,j}^*$. Prognozowana okresowa wypłata odszkodowań ma zatem postać:

$$\hat{S}_{ij} = \exp(\hat{s}_{i,j}) g_m[0,5(1 - x_{i,j}^*) \hat{\sigma}^2]. \quad (15)$$

Średni błąd tej predykcji można przedstawić następująco:

$$D^2(S_{i,j} - \hat{S}_{i,j}) = D^2(S_{i,j}) + D^2(\hat{S}_{i,j}), \quad (16)$$

co wynika z niezależności zmiennych $S_{i,j}$ oraz $\hat{S}_{i,j}$ [Verrall, 1994]. Widzimy zatem, iż do szacunku tego błędu niezbędne jest oszacowanie zmiennych $D^2(\hat{S}_{i,j})$ oraz $D^2(S_{i,j})$. W pierwszym przypadku stosujemy estymator nieobciążony, dany wzorem:

$$\hat{D}^2(\hat{S}_{i,j}) = \exp(2\hat{s}_{i,j}) \{g_m[0,5(1 - x_{i,j}^*) \hat{\sigma}^2]^2 - g_m[(1 - 2x_{i,j}^*) \hat{\sigma}^2]\}. \quad (17)$$

Do oszacowania drugiej zmiennej stosujemy wzór na wariancję rozkładu logarytmiczno-normalnego, skorygowany funkcją g_m [Verrall, 1994]:

$$\hat{D}^2(S_{i,j}) = \exp(2\hat{S}_{i,j}) \{g_m[2(1-x_{i,j}^*)\hat{\sigma}^2]^2 - g_m[(1-2x_{i,j}^*)\hat{\sigma}^2]\}. \quad (18)$$

Ostatecznie przechodzimy do prognozowania wartości całkowitej rezerwy IBNR:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} \hat{S}_{i,j}. \quad (19)$$

Estymator ten jest nieobciążony pod warunkiem nieobciążoności estymatorów $\hat{S}_{i,j}$. Średni błąd B^r powyższej predykcji nieobciążonej obliczamy z następującej równości:

$$D^2(R - \hat{R}) = D^2(R) + D^2(\hat{R}). \quad (20)$$

Korzystając z niezależności zmiennych R i \hat{R} , analogicznie jak w przypadku zmiennych $S_{i,j}$ oraz $\hat{S}_{i,j}$. Przy założeniu niezależności zmiennych $S_{i,j}$ mamy:

$$D^2(R) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} D^2(S_{i,j}). \quad (21)$$

W przypadku zmiennych $\hat{S}_{i,j}$ nie jest już spełnione założenie o niezależności, gdyż oddziałują na nie parametry P_j , takie same dla każdego okresu wypadkowego j . W związku z tym do obliczenia $D^2(\hat{R})$ niezbędne jest wprowadzenie kowariancji:

$$D^2(\hat{R}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=n-i}^{n-1} D^2(\hat{S}_{i,j}) + 2 \sum_{i,j,k,l} \text{cov}(\hat{S}_{i,j}, \hat{S}_{k,l}). \quad (22)$$

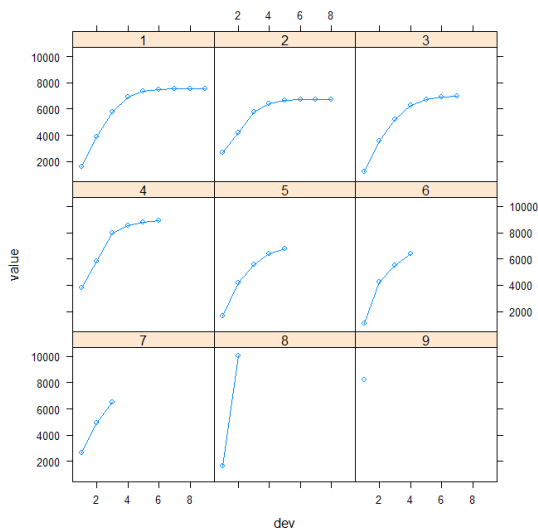
Druga suma zawiera dokładnie $\binom{n^2 - n}{2}$ elementów, takich że $(i, j) \neq (k, l)$. Widzimy że niezbędna jest zatem znajomość estymatora kowariancji $\text{cov}(\hat{S}_{i,j}, \hat{S}_{k,l})$. Aby otrzymać estymator nieobciążony, ponownie zastosowanie znajduje funkcja g_m :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{S}_{i,j}, \hat{S}_{i,k}) &= \exp(\hat{S}_{i,j} + \hat{S}_{i,k}) \{g_m[0,5(1-x_{i,j}^*)\hat{\sigma}^2]g_m[0,5(1-x_{i,k}^*)\hat{\sigma}^2] - \\ &- g_m[(1-0,5(\mathbf{X}_{i,j}^* + \mathbf{X}_{i,k}^*))(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}_{i,j}^* + \mathbf{X}_{i,k}^*)^T] \hat{\sigma}^2\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ostatecznie średni błąd prognozy rezerwy IBNR ma postać:

W pierwszej kolejności została zastosowana metoda RLN z korektą obciążenia funkcją g_m . Dalej w celach porównawczych skalkulowano rezerwę IBNR metodami: MackChainLadder (MCL) [Mack, 1994], BootChainLadder (BCL) [England, Verrall, 2002], MultiChainLadder (MultiCL) [Zhang, 2010]. Do obliczeń wykorzystano program R oraz pakiet {ChainLadder} [R Core Team, 2012].

W analizowanym trójkącie szkód, rozwój szkodowości graficznie obrazuje rys. 1.



Rys. 1. Skumulowane wartości wypłaconych odszkodowań w poszczególnych latach rozwoju szkody

W pierwszej kolejności zostały oszacowane parametry c_i oraz p_j za pomocą KMNK oraz również średnie błędy szacunku uzyskanych wartości estymatorów: $\sqrt{D^2(c_i)}$ oraz $\sqrt{D^2(p_j)}$. Wyniki przedstawia tab. 3.

Tabela 3

Oszacowane parametry modelu

	Oszacowanie	Średni błąd szacunku
1	2	3
c0	7,63	0,20
c1	7,11	0,20
c2	7,62	0,20
c3	7,55	0,21
c4	7,44	0,22
c5	7,35	0,23
c6	7,56	0,25
c7	8,05	0,29
c8	9,02	0,39
p1	0,34	0,20

cd. tabeli 3

1	2	3
p2	-0,08	0,21
p3	-0,73	0,22
p4	-1,70	0,23
p5	-2,66	0,25
p6	-4,09	0,28
p7	-5,28	0,33
p8	-6,51	0,44

Otrzymane wyniki pokazują, iż średnie błędy szacunku dla większości powyższych parametrów zawierają się w przedziale od 0,2 do 0,29. Wyjątkiem są parametry c_8 , p_7 oraz p_8 , dla których błędy są wyższe. Jest to efektem małej liczby obserwacji dla okresów opóźnień 7 oraz 8. Wariancja resztowa kształtuje się na poziomie $\hat{\sigma}^2 = 0,1529$. Często stosowaną praktyką jest pomijanie parametru p_0 , co daje pewność, iż macierz \mathbf{X} jest macierzą nieosobliwą, co również uczyniono w tym przykładzie [Verrall, 1994].

W kolejnym etapie szacowano wartości trójkąta szkód poniżej przekątnej, uzyskując następujące wyniki:

Tabela 4

Prognozy okresowych wartości wypłat odszkodowań

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1 592	2 256	1 942	1 116	415	143	43	12	3	
1	2 664	1 527	1 551	682	218	58	11	6	1,81	$\hat{S}_{i,j}$
									0,55	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
2	1 212	2 339	1 664	1 080	420	176	51	10,35	3,01	$\hat{S}_{i,j}$
								5,45	1,87	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
3	3 833	2 000	2 119	569	262	158	32	9,70	2,83	$\hat{S}_{i,j}$
							20,38	4,93	0,81	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$

cd. tabeli 4

4	1 687	2 503	1 370	859	337	120	29	8,71	2,54	$\hat{S}_{i,j}$
						81,83	17,35	4,23	0,69	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
5	1 086	3 142	1 306	835	286	109	26	7,94	2,31	$\hat{S}_{i,j}$
					195	68,88	14,73	3,62	0,59	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
6	2 631	2 328	1 532	936	353	135	32	9,81	2,86	$\hat{S}_{i,j}$
				594	213	75,60	16,33	4,06	0,65	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
7	1 655	8 391	2 898	1 514	571	218	53	15,92	4,64	$\hat{S}_{i,j}$
			1 524	769	277	99,60	21,73	5,44	0,79	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$
8	8 246	11661	7 653	4 000	1 509	577	139	42,11	12,28	$\hat{S}_{i,j}$
		3 541	2 259	1 142	412	147,00	31,47	7,19	1,45	$\hat{D}(\hat{S}_{i,j})$

Opierając się na powyższych wynikach, uzyskano prognozowaną wartość rezerwy IBNR, która wynosi $\hat{R} = 32\,989,21$. Średni błąd predykcji oraz przedział zmienności PZ na poziomie ufności 90% wynosi natomiast odpowiednio $\hat{B}^r = 11\,698,21$ oraz $PZ = [20\,014,1; 48\,301,85]$.

W analizie porównawczej przeprowadzono estymację punktową, uzyskując następujące wyniki.

Tabela 5

Wartości rezerwy IBNR w analizowanych modelach

	Wartość rezerwy IBNR	Średni błąd szacunku
RLN z korektą obciążenia	32 989,21	11 698,21
MCL	35 551,14	12 566,54
BCL	36 459,93	8 573,84
MultiCL	35 553,24	12 596,51

Widać, iż w metodzie RLN z korektą obciążenia funkcją g_m uzyskano najniższą wartość rezerwy IBNR, co jest korzystne z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń. Otrzymano również stosunkowo niski błąd prognozy. W analizowanym trójkącie szkód najniższy błąd uzyskał jednak model bootstrsapowy. Zgodnie z zasadą Solvency II – „best estimate”, należałoby zatem zawiązać rezerwę IBNR na poziomie uzyskanym w tym modelu.

Podsumowanie

Szacowanie wartości rezerwy IBNR za pomocą regresji logarytmiczno-liniowej jest alternatywą do klasycznego podejścia chain-ladder. Po zastosowaniu korekty obciążenia może dawać interesujące wyniki. W dobie rozwoju technik obliczeniowych techniczny problem kalkulacji rezerwy IBNR nie jest obecnie przeszkodą i pozwala na dalszy rozwój tego podejścia.

Literatura

- Bradu D., Mundlak Y., 1970: *Estimation in Lognormal Linear Models*. „JASA”, Vol. 6.
- Christofides E., 1989: *Claims Reserving Manual: Vol. II*. The Institute of Actuaries, London.
- Dyduch M.: *Niekonwencjonalna metoda prognozy wartości jednostek funduszy emerytalnych. W: Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*. Red. W. Ostasiewicz. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław 2011.
- England P.D., Verrall R.J., 2002: *Stochastic Claims Reserving in General Insurance With Discussion*. „British Actuarial Journal” 8, III.
- Green W.H., 1993: *Econometric Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York.
- Kelly M.V., 1992: *Practical Loss Reserving Method with Stochastic Development Factor*. CAS Discussion Paper Program.
- Mack T., 1999: *The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor*. „Astin Bulletin”, Vol. 29, No. 2.
- Pobłocka A., 2011: *Rezerwa IBNR w ubezpieczeniach majątkowych-praktyczne metody jej szacowania*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.
- R Core Team, 2012: *R: A language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Straub E., 1988: *Non-Life Insurance Mathematics*. Springer-Verlang, New York.
- Szkutnik W., 2004: *Ryzyko ubezpieczeniowe w aspekcie szczególnych warunków realizacji procesu szkód. W: Zastosowania metod ilościowych w ekonomii i zarządzaniu*. Red. J. Mika. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Verrall R.J., 1994: *Statistical Methods for the Chain-Ladder technique*. Casualty Actuarial Society Forum, Spring.

- Wolny A., 2005: *Podejście Aktuarialne do kalkulacji rezerwy szkodowej. Statystyczne zaawansowane metody kalkulacji rezerwy szkodowej*. W: *Metody kalkulacji ryzyka rezerw szkodowych w ubezpieczeniach majątkowo-osobowych*. Red. W. Szkutnik, A. Wolny. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Wüthrich M.V., Merz M., 2008: *Stochastic Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance*. John Willey & Sons, England.
- Zhang Y., 2010: *A General Multivariate Chain Ladder Model*. „Insurance: Mathematics and Economics”, 46.

MODIFIED LOG-NORMAL REGRESSION IN LOSS RESERVING

Summary

In the paper we consider the problem of loss reserving estimation in non-life insurance company. We focus on the log-normal regression as in [Bradu, Mundlak, 1970; Chrostofieds, 1989]. In order to reduce the bias of IBNR reserve estimator we propose some modification by introducing function. In the case study we compare few different methods of loss reserving with modified log-normal regression. It is now typical practice in insurance business according Solvency II and “Best Estimate” rule. In all calculation we apply R software and {ChainLadder} package.

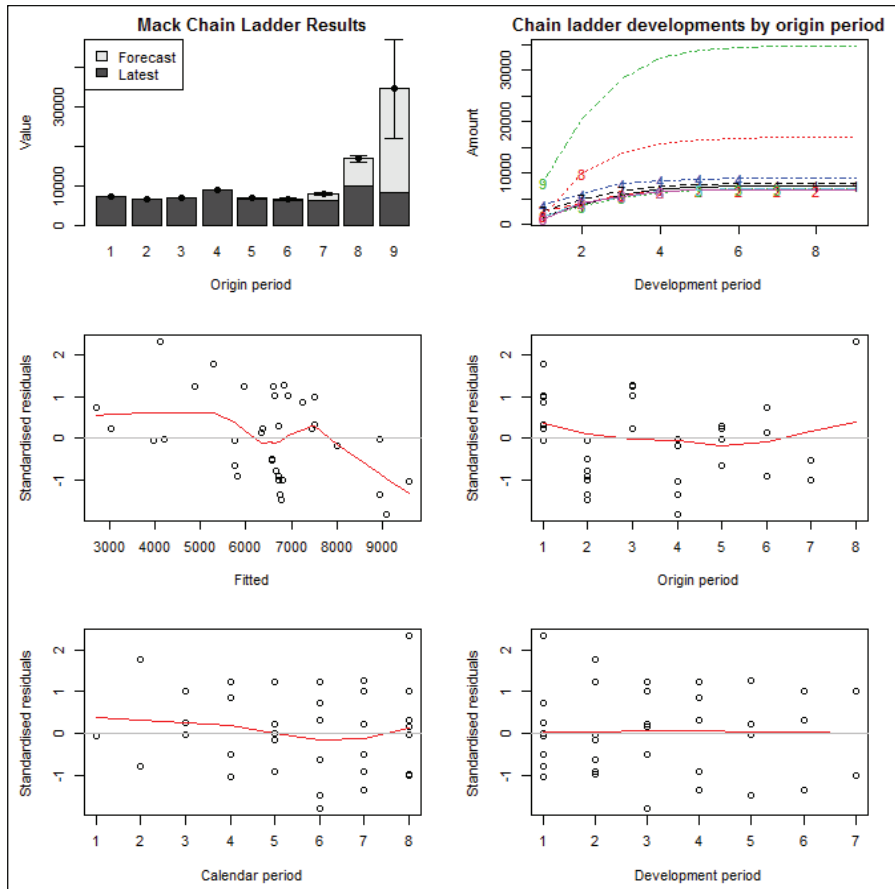
Załącznik A

Wyniki kalkulacji rezerwy szkodowej uzyskane w pakiecie {ChainLadder}
 <MackChainLadder(Triangle, weights = 1, alpha=1, est.sigma="log-linear",
 tail=FALSE, tail.se=NULL, tail.sigma=NULL)

```
$ByOrigin
  Latest Dev.To.Date Ultimate      IBNR  Mack.S.E CV(IBNR)
1  7521.727  1.0000000  7521.727   0.000000  0.000000      NaN
2  6715.970  0.9995935  6718.701   2.730817  2.186976  0.8008504
3  6942.089  0.9983817  6953.342  11.252450  4.864551  0.4323104
4  8941.373  0.9934317  9000.491  59.117897 28.206448  0.4771220
5  6755.411  0.9756945  6923.694 168.283564 59.255980  0.3521198
6  6369.897  0.9311650  6840.782  470.885029 132.933563  0.2823058
7  6490.848  0.8142385  7971.678 1480.830769 405.053393  0.2735312
8 10045.833  0.5931075 16937.625 6891.792023 948.520406  0.1376304
9  8245.677  0.2375460 34711.923 26466.246003 12468.263958  0.4711006

$Totals
      Totals
Latest:  6.802883e+04
Dev:     6.567759e-01
Ultimate: 1.035800e+05
IBNR:    3.555114e+04
Mack S.E.: 1.256654e+04
CV(IBNR): 3.534779e-01
```

Rys. A.1. Szczegółowe wyniki dla MCL



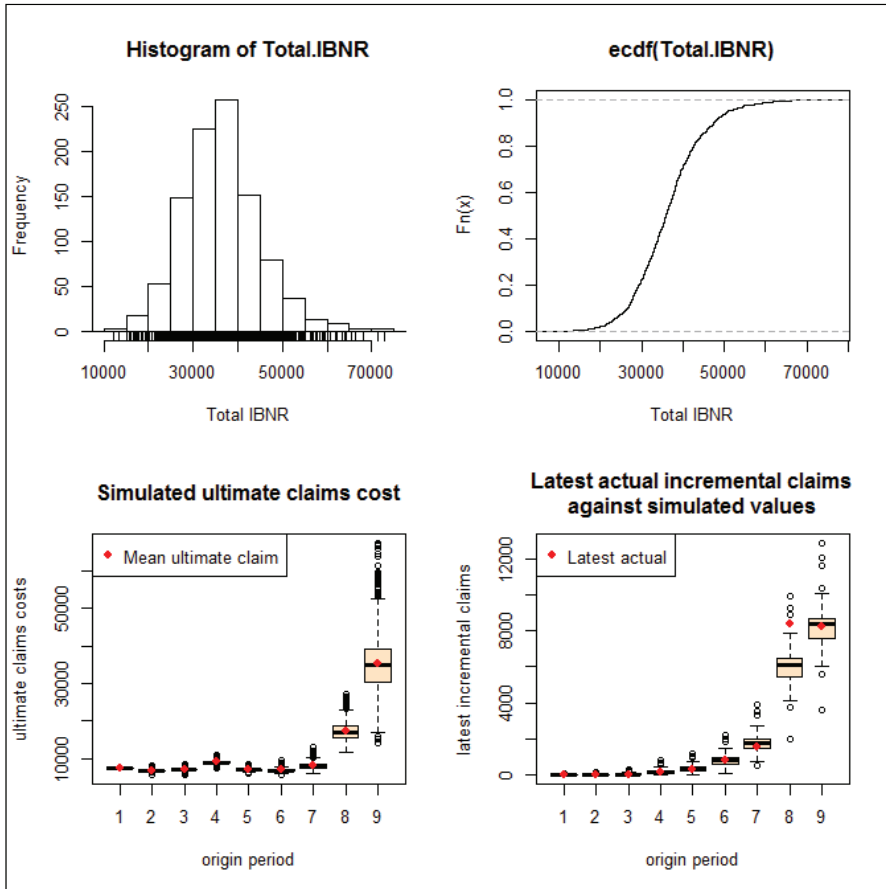
Rys. A.2. Analiza reszt dla MCL

```
<BootChainLadder(Triangle, R=999, process.distr="gamma")
```

```
$`Summary Statistics for Input Triangle`
```

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	S.E	CV
1	7,522	1.000	7,522	0.00	0.00	0.000
2	6,716	1.000	6,719	2.73	0.83	0.305
3	6,942	0.998	6,953	11.25	4.40	0.391
4	8,941	0.993	9,000	59.12	28.09	0.475
5	6,755	0.976	6,924	168.28	59.22	0.352
6	6,370	0.931	6,841	470.89	132.92	0.282
7	6,491	0.814	7,972	1,480.83	405.05	0.274
8	10,046	0.593	16,938	6,891.79	948.51	0.138
9	8,246	0.237	34,712	26,466.25	12,468.26	0.471
Total	68,029	0.657	103,580	35,551.14	12,566.53	0.353

Rys. A.3. Szczegółowe wyniki dla BCL



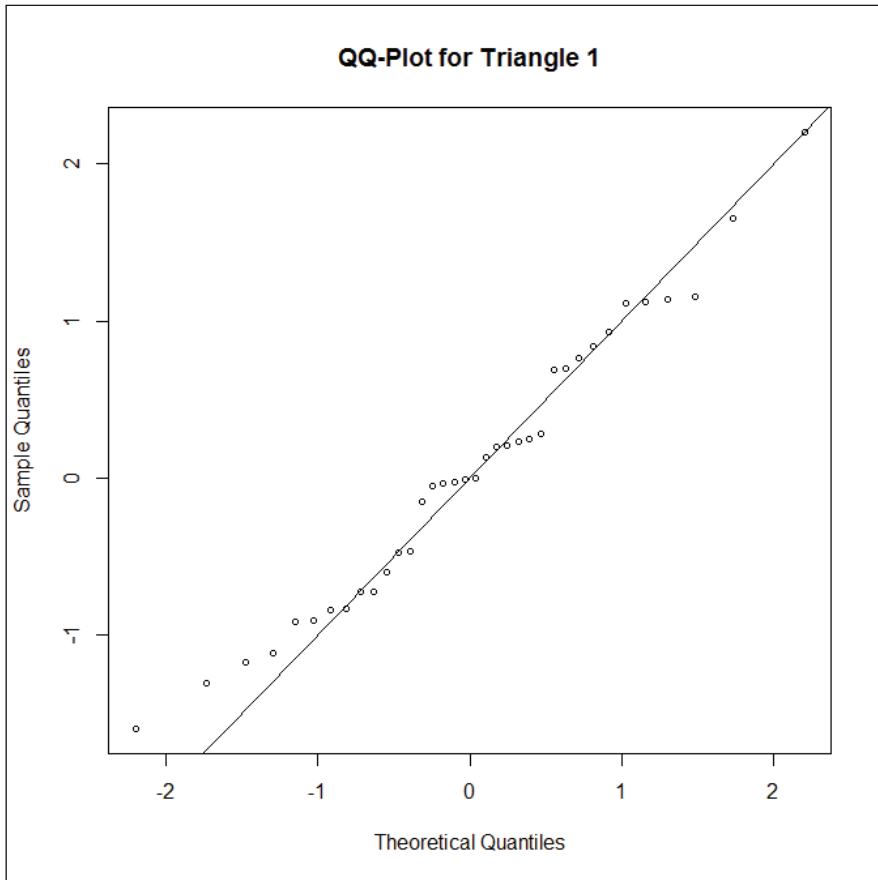
Rys. A.4. Symulacja dla BCL

```
<MultiChainLadder(list(Triangle), fit.method = „SUR”)
```

```
$`Summary Statistics for Input Triangle`
```

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	S.E	CV
1	7,522	1.000	7,522	0.00	0.00	0.000
2	6,716	1.000	6,719	2.73	0.83	0.305
3	6,942	0.998	6,953	11.25	4.40	0.391
4	8,941	0.993	9,000	59.12	28.09	0.475
5	6,755	0.976	6,924	168.28	59.22	0.352
6	6,370	0.931	6,841	470.89	132.92	0.282
7	6,491	0.814	7,972	1,480.83	405.05	0.274
8	10,046	0.593	16,938	6,891.79	948.51	0.138
9	8,246	0.237	34,712	26,466.25	12,468.26	0.471
Total	68,029	0.657	103,580	35,551.14	12,566.53	0.353

Rys. A.5. Szczegółowe wyniki dla MultiCL



Rys. A.6. Wykres kwantyli dla MultiCL