

Paweł Błaszczyk

Uniwersytet Śląski

Tomasz Błaszczyk

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Maria B. Kania-Błaszczyk

Uniwersytet Śląski

DWUKRYTERIALNY ROZMYTY MODEL ŁAŃCUCHA KRYTYCZNEGO W PROJEKCIE – PODSTAWY TEORETYCZNE

Wprowadzenie

Analiza czasowo-kosztowa, pozwalająca na ustalenie takiego planu projektu, który spełnia oczekiwania decydentów co do jak najwcześniejszej daty zakończenia projektu z jak najniższym budżetem, jest jednym z podstawowych zagadnień rozpatrywanych podczas planowania projektu w ujęciu wielokryterialnym. Wyniki pierwszych badań w tym zakresie, prowadzonych przez Fulkersona [1961] i Kelley'a [1961], zostały opublikowane w latach 60. XX w. Szczegółowy przegląd wyników prac prowadzonych w obszarze analiz czasowo-kosztowych został opracowany m.in. przez Brückera et al. [1999]. Celem opisanego w dalszej części pracy badania jest rozpatrzenie możliwości wykorzystania podejścia łańcucha krytycznego (CCPM – Critical Chain Project Management), wprowadzonego przez Goldratta [1997] w aspekcie wielokryterialności problemów decyzyjnych w procesach zarządzania projektami, w szczególności podczas planowania zasobów, budżetu i harmonogramu. Pierwotny opis metody CCPM oparto raczej na języku werbalnym niż formalnym. Podejście kwantyfikujące czasy wykonania czynności, łańcuch krytyczny i bufory projektu zostały wprowadzone przez kolejnych autorów. Jedną ze szczegółowych propozycji została formalnie opisana przez Tukul et al. [2006]. Metody buforowania innych niż czas realizacji charakterystyk projektów zostały zaproponowane przez Leach'a [2003], Gonzaleza et al. [2009] oraz Błaszczyka i Nowaka [2008]. Ogólnie rozumiane podejście łańcucha krytycznego nie jest wolne od wad, co jest dyskutowane w szerokim gronie au-

torów prac badawczych (np. Herroelen i Leus [2009], Rogalska et al. [2008], Van de Vonder et al. [2005]). Ze względu na liczne i dające niejednoznaczne oceny dyskusje nad założeniami metody, jak również stosunkowo młody okres, w którym metoda CCPM jest znana i brak popularnych narzędzi informatycznych pozwalających na jej praktyczne zastosowanie, nie jest ona eksploatowana tak często jak dobrze znane szerokiej grupie użytkowników metody ścieżki krytycznej (CPM) i PERT. W odróżnieniu jednak od czysto ilościowej metody CPM i zakładającej losową zmienność oszacowań czasu metody PERT, CCPM wprowadza do procedur harmonogramowania kwestię wpływu czynnika ludzkiego, co jest ważnym i trudnym do pominięcia w praktycznych zastosowaniach aspektem wpływającym na jakość oszacowań i zdolność zespołu do realizacji projektu zgodnie z harmonogramem. Posiadając informację o wpływie czynnika ludzkiego na mierzalne cechy projektu, jesteśmy w stanie wykorzystać je do poprawy tychże, stosując odpowiednie mechanizmy motywacyjne. Przykład takiego rozwiązania, zakładającego konstrukcję i wykorzystanie nadzwyczajnego funduszu premiewego, został opisany przez Błaszczyka i Nowaka [2008]. Dalsza część niniejszego artykułu stanowi kontynuację badań nad możliwością buforowania innych cech projektu. Dla potrzeb zaproponowanej procedury przyjęto, że podawane przez przyszłych wykonawców zadań parametry terminowe i kosztowe dla konstrukcji budżetu oraz harmonogramu projektu zawierają w sobie nadatki bezpieczeństwa (przeszacowania) na poziomie oszacowań nakładów pracy. W opracowaniu wprowadzono rozmyte miary nakładów pracy w celu opisu niepewności oszacowań. Koncepcja wykorzystania podejścia rozmytego w modelowaniu łańcucha krytycznego była już rozważana przez Chena et al. [2010], Longa and Ohsato [2008], Shi i Gong [2010]. W odróżnieniu od powyższych prac, proponowany model zakłada możliwość motywowania wykonawców zadań i czynności w projekcie do partycypacji w ryzyku opóźnienia oraz przekroczenia budżetu w zamian za prawdopodobne korzyści, możliwe do osiągnięcia w przypadku szybszej i tańszej realizacji.

1. Pierwszy model matematyczny – bufory czasu i kosztu

Pod pojęciem czynników należy rozumieć w dalszej części pracy wszelkiego rodzaju zasoby, siły oraz okoliczności, których oddziaływanie na dany element projektu może mieć wpływ na wartości analizowanych charakterystyk projektu lub składających się na niego czynności. W przypadku większości projektów realizowanych w praktyce gospodarczej czynnikami takimi są np. zasoby ludzkie, wyspecyfikowane pod względem posiadanej wiedzy i doświadczenia, zróżnicowanych umiejętności czy efektywności pracy. Innym przykładem czynników w rozważanej koncepcji mogą być zasoby, np. materiałowe o zróżnicowanych właściwościach fizycznych i chemicznych, które wpływają na tempo

realizacji prac (przypadek często występujący w projekcie o charakterze inżynierskim), metody i techniki realizacji poszczególnych zadań czy wręcz ogólnie przyjmowane dla danych projektów technologie. W pewnej liczbie projektów istotną rolę mogą również odgrywać czynniki klimatyczne – minimalne lub maksymalne dopuszczalne temperatury, opady, siła i kierunek wiatru – których przekroczenie (lub zabezpieczenie przed ich niepożądanym wystąpieniem) także może generować wydłużenie prac lub dodatkowy koszt dla projektu. Przyjęta tutaj ogólna właściwość czynników, skutkująca ich wpływem na istotne dla oceniającego charakterystyki (w tym czasu i kosztu) projektu i składających się na niego czynności, pozwala na prowadzenie rozważań na wysokim poziomie ogólności, nie ograniczając możliwości ich zawężania dla skonkretyzowanych (i urealnionych) zastosowań.

Rozważmy zatem model projektu składającego się z n czynności oznaczonych x_1, \dots, x_n . Każda z czynności jest opisana przez parametr czasu i kosztu jej realizacji. Załóżmy, że jedynie q czynników może wywierać jakikolwiek wpływ na czas i bezpośredni koszt realizacji całego projektu. Zależności te zapiszmy w macierzy czynników:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nq} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Elementy występujące w macierzy X są zmiennymi binarnymi, co oznacza, że wyraz x_{ij} przyjmuje wartość 1 wtedy, gdy czynnik j posiada wpływ na czynność x_i .

Niech:

$$K = [k_{ij}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, q} \quad (2)$$

będzie macierzą kosztów, określającą koszt udziału poszczególnych czynników q w realizacji kolejnych czynności. Ponadto, niech:

$$W^m = [w_1^m, \dots, w_n^m] \quad (3)$$

będzie wektorem minimalnych nakładów pracy na wykonanie czynności x_1, \dots, x_n . Na podstawie macierzy X oraz wektora W^m możemy wyliczyć całkowity nakład pracy w_i jako:

$$w_i = f_{w_i}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, w_i^m), \quad (4)$$

gdzie f_{w_i} jest funkcją przydziału pracy. Załóżmy również, że istnieje wektor R :

$$R = [r_1, \dots, r_q], \quad (5)$$

opisujący ograniczenia dostępności czynników q dla całego projektu. Niech:

$$T = [t_{ij}]_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, q} \quad (6)$$

będzie macierzą nakładów (dla zasobów odnawialnych – nakładów pracy) dla każdego czynnika w każdej z czynności. Wykorzystując macierze X, T oraz K możemy obliczyć koszt oraz czas realizacji każdej z czynności poprzez:

$$k_i = f_{i_k}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, t_{i1}, \dots, t_{iq}, k_{i1}, \dots, k_{iq}) \quad (7)$$

oraz

$$t_i = f_{i_t}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, t_{i1}, \dots, t_{iq}), \quad (8)$$

gdzie f_{i_k} oraz f_{i_t} są pewnymi funkcjami, zdefiniowanymi przez decydenta. W najprostszych przypadkach będą to funkcje liniowe. Funkcje te będziemy nazywać odpowiednio funkcjami czasu i kosztu. Na ich podstawie całkowity koszt bezpośredni oraz czas realizacji projektu można obliczyć w sposób następujący:

$$K_c = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n f_{i_k}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, t_{i1}, \dots, t_{iq}, k_{i1}, \dots, k_{iq}) \quad (9)$$

oraz

$$T_c = \max_{i=1, \dots, n} (ES_i + t_i), \quad (10)$$

gdzie ES_i jest najwcześniejszym momentem rozpoczęcia czynności x_i . Na podstawie przyjętych założeń minimalizujemy całkowity koszt bezpośredni projektu. Jeżeli funkcje kosztu f_{i_k} oraz czasu f_{i_t} są funkcjami liniowymi, to tak

sformułowany problem można rozwiązać za pomocą metod programowania liniowego. W typowym przypadku model programowania liniowego zapisujemy w następującej postaci:

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = c \cdot x \rightarrow \max \quad (11)$$

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad (12)$$

$$x_j \geq 0, \quad (13)$$

gdzie $c = [c_1 \dots c_n]$, $x = [x_1 \dots x_n]$, $A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, $b = [b_1 \dots b_m]$ są odpowiednio: wektorem współczynników funkcji celu, wektorem zmiennych decyzyjnych, macierzą współczynników ograniczeń oraz wektorem wyrazów wolnych w ograniczeniach. W naszym przypadku mamy do czynienia z następującym modelem liniowym:

$$\sum_{i=1}^n f_{i_k}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, t_{i1}, \dots, t_{iq}, k_{i1}, \dots, k_{iq}) = \sum_{i=1}^n k_i \rightarrow \min \quad (14)$$

$$X_{\cdot, j} \cdot T_{\cdot, j} \leq R_j \text{ dla } j \in \{1, \dots, q\} \quad (15)$$

$$X_{k, \cdot} \cdot T_{k, \cdot} = W_k \text{ dla } k \in \{1, \dots, n\} \quad (16)$$

$$t_i \geq 0, \quad (17)$$

gdzie $X_{\cdot, j}$, $X_{k, \cdot}$ oznaczają odpowiednio j -tą kolumnę macierzy X , k -ty wiersz macierzy X , $T_{\cdot, j}$, $T_{k, \cdot}$ oznaczają odpowiednio j -tą kolumnę macierzy T , k -ty wiersz macierzy T natomiast R_j oraz W_j oznaczają j -ty element odpowiednio wektora R oraz W . Rozwiązanie optymalne powyższego modelu powinno wyznaczyć optymalny rozdział pracy na czynniki dla poszczególnych czynności. W przypadku uzyskania zbioru alternatywnych rozwiązań optymalnych wybieramy to, dla którego całkowity czas realizacji projektu jest najkrótszy. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie optymalne dla przypadku oszacowań bezpiecznych (zawierających naddatki bezpieczeństwa) nakładów pracy. Uwzględnienie oszacowań bezpiecznych prowadzi do przeszacowania kosztu i czasu realizacji czynności, a w konsekwencji całkowitego kosztu bezpośredniego i czasu trwania całego projektu. Oznacza to, że:

$$k_i = k_i^e + k_i^B \quad (18)$$

oraz

$$t_i = t_i^e + t_i^B, \quad (19)$$

gdzie k_i^e oraz t_i^e są uzasadnionymi (realnymi) wartościami kosztu oraz czasu realizacji czynności x_i oraz k_i^B i t_i^B są odpowiednio naddatkami bezpieczeństwa dla oszacowań kosztu i czasu czynności x_i . Tak więc całkowity koszt bezpośredni oraz całkowity czas realizacji projektu możemy zapisać jako:

$$K_c = K^e + K^B \quad (20)$$

oraz

$$T_c = T^e + T^B, \quad (21)$$

gdzie K^e, T^e są uzasadnionymi (realnymi) wartościami kosztu oraz czasu realizacji całego projektu. Analogicznie K^B, T^B są odpowiednio naddatkami bezpieczeństwa dla oszacowań kosztu i czasu dla całego projektu. W celu ustalenia wartości K^B, T^B musimy oszacować najbardziej prawdopodobne nakłady pracy na czynności. Następnie obliczymy wartości w_i dla każdej czynności i . W ten sposób otrzymujemy nową macierz czynników X^* oraz nowy wektor oszacowań W^* . Uruchamiając w dalszej kolejności tę samą procedurę dla najbardziej prawdopodobnych nakładów pracy, lecz z dodatkowym warunkiem $t_{ij} \geq t_{ij}^*$ dla $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, q$, gdzie $T^* = [t_{ij}^*]$ jest macierzą nakładów pracy dla każdej czynności, obliczoną dla nowych danych. Ze względu na niskie prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia wszystkich czynników ryzyka konsumujących założone zapasy czasu możemy zredukować pojemności buforów projektu korzystając ze współczynników redukujących $\alpha, \beta \in [0, 1]$:

$$K_r^B = \alpha K^B \quad (22)$$

oraz:

$$T_r^B = \beta T^B. \quad (23)$$

Ostatecznie dla całego projektu możemy przyjąć, że:

$$K^P = K^e + K_r^B \quad (24)$$

oraz

$$T^P = T^e + T_r^B . \quad (25)$$

Wykorzystując część zaoszczędzonych środków, możemy utworzyć specjalny fundusz premiiowy B , który zostanie rozdysponowany pomiędzy czynnik q (w szczególności zasoby ludzkie) w przypadku nieskonsumowania całości buforów. W celu dokonania sprawiedliwego i motywującego podziału funduszu B , określmy istotność poszczególnych zadań/czynności:

$$S = [s_i]_{i=1, \dots, n}, \quad (26)$$

gdzie $s_i \in [0, 1]$.] oraz zdefiniujmy funkcję rozdziału korzyści, uwzględniając istotność czynności i , jej krytyczność, zaoszczędzony nakład pracy oraz oszczędności w konsumpcji buforów czasu i kosztów. W ogólnym przypadku czynnik (zasób) j powinien otrzymać premię w wysokości b_j :

$$b_j = f_{b_j}(s_i, D_i^W, c, D_B^K, D_B^T). \quad (27)$$

Przykładowa funkcja rozdziału korzyści może przyjąć następującą postać:

$$b_j = \begin{cases} \frac{s_j}{s^1} \frac{D_j^W}{D^1} \gamma_1 B & \text{jeżeli } x_i \text{ znajduje się na ścieżce krytycznej} \\ \frac{s_j}{s^2} \frac{D_j^W}{D^2} \gamma_2 B & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases} \quad (28)$$

gdzie $\gamma_2 > \gamma_1$, $\gamma_2 + \gamma_1 = 1$, s_1 jest sumaryczną istotnością czynności krytycznych, s_2 jest sumaryczną istotnością czynności niekrytycznych, D_j^W jest całkowitym zaoszczędzonym nakładem pracy, D^1 jest sumarycznym zaoszczędzonym nakładem pracy czynności krytycznych, zaś D^2 analogicznie dla czynności niekrytycznych.

2. Drugi model matematyczny – bufory nakładu pracy

W tej sekcji zostanie zaprezentowany inny model matematyczny dla projektu przedstawionego powyżej. Model ten został opisany w pracy Błaszczyka et al. [2009]. Podobnie jak w pierwszym modelu, zakładamy, że dana jest macierz czynników X , macierz kosztów K , wektor minimalnego nakładu pracy W^m , wektor R opisujący ograniczenia dostępności zasobów oraz macierz nakładów pracy T opisująca nakład pracy zasobów w kolejnych zadaniach – por. (1)-(3), (5),(6). Na podstawie macierzy X, T, K obliczamy koszt i czas trwania każdego zadania korzystając ze wzorów (7) oraz (8), a następnie korzystając ze wzorów (9) oraz (10) obliczamy całkowity koszt i czas trwania projektu. Podobnie jak w pierwszym modelu, minimalizujemy całkowity koszt projektu. Zauważmy, że jeśli funkcje f_{i_k} oraz f_{i_t} są liniowe, to wówczas ten problem optymalizacyjny może być rozwiązany za pomocą metod programowania liniowego (LP). Ze zbioru alternatywnych rozwiązań optymalnych wybieramy to, dla którego całkowity czas trwania projektu jest najmniejszy. Dla zadania x_i nakład pracy może być wyrażony wzorem:

$$w_i = f_{w_i}(x_{i1}, \dots, x_{iq}, w_i^m) = w_i^e + w_i^B, \quad (29)$$

stąd całkowity nakład pracy w projekcie dany jest wzorem:

$$W_c = W^e + W^B, \quad (30)$$

gdzie W^e jest uzasadnionym nakładem pracy projektu, natomiast W^B jest ukrytym buforem nakładu pracy. W celu wyznaczenia wartości ukrytego bufora W^B musimy najpierw oszacować najbardziej prawdopodobny nakład pracy oraz wykorzystać funkcję w_i dla każdego zadania x_i w projekcie. W ten sposób dostajemy nową macierz czynników, którą będziemy oznaczać X^* oraz nowy wektor nakładów pracy W^* . Nieprawdopodobnym wydaje się zajście wszystkich niekorzystnych zdarzeń podczas realizacji projektu, dlatego możemy zredukować bufor nakładu pracy zgodnie z następującym wzorem:

$$W_r^B = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] W^B, \quad (31)$$

gdzie $\alpha \in [0,1]$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$ są współczynnikami zmniejszającymi wielkość bufora nakładu pracy odpowiednio dla zadań x_1, \dots, x_n . Stąd całkowity nakład pracy projektu jest dany wzorem:

$$W^P = W^e + W_r^B. \quad (32)$$

Przeszacowanie nakładów pracy prowadzi do przeszacowania spodziewanych kosztów i czasów realizacji zadań w projekcie, a w konsekwencji kosztu i czasu trwania całego projektu. W związku z tym, że zmienił się nakład pracy, zmienia się również czas trwania i koszt projektu, stąd możemy zapisać całkowity koszt i czas trwania projektu zgodnie ze wzorami (20) oraz (21). Podobnie jak w pierwszym modelu część zaoszczędzonych pieniędzy może zostać przeznaczona na utworzenie funduszu premiowego B i podzielona pomiędzy zasoby biorące udział w projekcie. Wektor istotności zadań S jest dany wzorem (26). Udział zasobu j jest obliczany zgodnie ze wzorem (27). Przykładowo, podobnie jak w poprzednim modelu, do podziału funduszu premiowego możemy wykorzystać funkcję (28).

3. Podejście rozmyte

Zwykle wartości deterministyczne w klasycznym modelu programowania liniowego nie odpowiadają rzeczywistym i niepewnym warunkom mogącym zajść podczas realizacji projektu. W celu rozwiązania tego problemu proponujemy rozszerzenie poprzedniego modelu. Proponowany model będzie wykorzystywał trapezowe liczby rozmyte (TrFN). Najpierw wprowadzimy kilka podstawowych definicji z teorii liczb rozmytych i wykorzystywanych w nowym modelu.

Definicja 1. Niech A będzie podzbiorem pewnej przestrzeni X . Zbiorem rozmytym A w X nazywamy zbiór uporządkowanych par:

$$\{(x; \mu_A(x)) : x \in X\}, \quad (33)$$

gdzie

$$\mu_A : X \rightarrow \mathbf{R} \quad (34)$$

jest funkcją przynależności do zbioru A .

Dla każdego $x \in A$, funkcja $\mu_A(x)$ określa stopień przynależności x do zbioru rozmytego A . W celu uproszczenia zapisu do oznaczania funkcji przynależności zbioru rozmytego A w literaturze często stosuje się równoważne oznaczenie $A(x)$. W celu zdefiniowania liczb rozmytych wprowadzimy najpierw kilka podstawowych pojęć.

Definicja 2. Zbiór A nazywamy normalnym, jeśli

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1. \quad (35)$$

Definicja 3. Zbiór

$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \quad (36)$$

nazywamy nośnikiem zbioru rozmytego A .

Definicja 4. Niech $\gamma \in [0, 1]$. Zbiór

$$A_\gamma = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \gamma\} \text{ dla każdego } \gamma \in [0, 1] \quad (37)$$

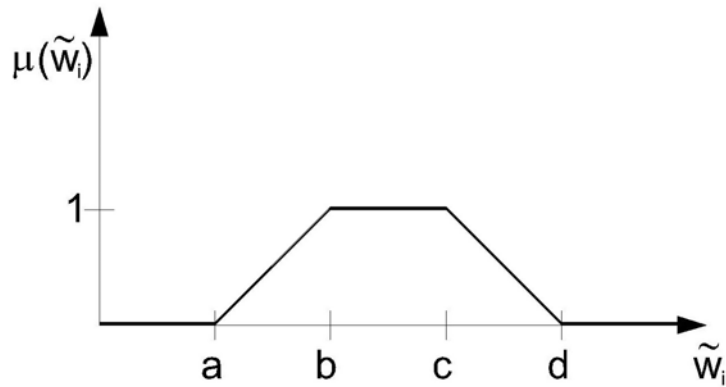
nazywamy warstwą na poziomie γ .

Definicja 5. Niech $X = \mathbb{R}$ oraz niech $F(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych zbioru \mathbb{R} . Liczbą rozmytą nazywamy zbiór rozmyty $A \in F(\mathbb{R})$ spełniający warunki:

1. A jest zbiorem normalnym,
2. A_γ jest domknięte dla każdego $\gamma \in [0, 1]$,
3. $\text{supp}(A)$ jest ograniczony.

Definicja 6. Trapezową liczbą rozmytą $\text{TrFN}(a, b, c, d)$ – porównaj rys. 1 – nazywamy liczbę rozmytą, której funkcja przynależności jest dana wzorem

$$\mu(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{dla } x \in [a, b] \\ 1 & \text{dla } x \in [b, c] \\ (d-x)/(d-c) & \text{dla } x \in [c, d] \\ 0 & \text{dla } x \notin [a, d] \end{cases} \quad (38)$$



Rys. 1. Przykład trapezowej liczby rozmytej (TrFN)

Postać funkcji przynależności μ będzie zależęć od decyzji eksperta na podstawie informacji o dostępnych technologiach, pracownikach, materiałach itd.

Definicja 7. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in [0,1]$ będą dowolnie małe. Trapezową liczbą rozmytą \tilde{x} bliską liczbie rzeczywistej x nazywamy liczbę rozmytą daną wzorem:

$$\tilde{x} = (x - \varepsilon, x, x, x + \varepsilon). \quad (39)$$

W dalszej części tego artykułu trapezową liczbę rozmytą bliską liczbie rzeczywistej x będziemy oznaczać jako \tilde{x} . Piszemy, że $A(a, b, c, d) \geq \delta$, gdzie δ jest pewną liczbą rzeczywistą, jeśli $a \geq \delta$. Ponadto $A > \delta$, jeśli $a > \delta$, natomiast $A \leq \delta$ dla $d \leq \delta$ i $A < \delta$ dla $d < \delta$. Jeśli A, B są dwoma podzbiórmi rozmytymi przestrzeni X , wówczas $A \leq B$ oznacza, że $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$, lub A jest podzbiorem B , warunek $A < B$ zachodzi, jeśli:

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \text{ dla każdego } x \in X.$$

Definicja 8. Dla dowolnych dwóch liczb rozmytych podstawowe cztery operacje arytmetyczne dane są wzorami

$$\mu_{B=A_1 \oplus A_2}(y) = \sup_{x_1, x_2 \in X, y=x_1+x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \quad (40)$$

$$\mu_{B=A_1 - A_2}(y) = \sup_{x_1, x_2 \in X, y=x_1-x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \quad (41)$$

$$\mu_{B=A_1 \square A_2}((y)) = \sup_{x_1, x_2 \in X, y=x_1 \cdot x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\} \quad (42)$$

$$\mu_{B=A_1 \otimes A_2}((y)) = \sup_{x_1, x_2 \in X, y=x_1/x_2} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2)\}. \quad (43)$$

We wszystkich powyższych przypadkach wynikiem działania również jest liczba rozmyta, ale niekoniecznie jest ona trapezową liczbą rozmytą. W przypadku kiedy zarówno funkcja celu, jak i ograniczenia są sformułowane za pomocą liczb rozmytych możemy wykorzystać metodę Rozmytego Programowania Liniowego (FLP) danego wzorem:

$$\tilde{c} \cdot x \rightarrow \min \quad (44)$$

$$\tilde{A} \cdot x \leq \tilde{b} \quad (45)$$

$$x \geq 0, \quad (46)$$

gdzie $\tilde{c}, \tilde{A}, \tilde{b}$ są odpowiednio wektorem rozmytych współczynników funkcji celu, macierzą rozmytych współczynników ograniczeń oraz wektorami liczb rozmytych.

Twierdzenie 1. *Niech $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}$ są liczbami rozmytymi. Zbiory rozmyte $\tilde{c}_1 x_1 + \dots + \tilde{c}_n x_n$ i $\tilde{a}_1 x_1 + \dots + \tilde{a}_n x_n$ zdefiniowane za pomocą reguły rozszerzania ponownie są liczbami rozmytymi.*

Szczegółowe informacje na temat rozwiązywania problemów rozmytego programowania liniowego można znaleźć w: [Buckey et al. 2002; Jamison i Loddwick 2001; Ramik 2006].

4. Trzeci model matematyczny – rozmyty nakład pracy i rozmyte bufory

W tej sekcji zostanie przedstawiony trzeci model dla projektu rozważanego powyżej. Podobnie jak w poprzednich dwóch modelach, zakładamy, że dana jest macierz czynników X , macierz kosztów K , wektor minimalnego nakładu pracy W^m , wektor R opisujący ograniczenia dostępności zasobów oraz macierz

nakładów pracy T opisująca nakład pracy zasobów w kolejnych zadaniach – por. (1)-(3), (5),(6). Na podstawie macierzy X, T, K obliczamy koszt i czas trwania każdego zadania, korzystając ze wzorów (7) oraz (8), a następnie korzystając ze wzorów (9) oraz (10) obliczamy całkowity koszt i czas trwania projektu. Podobnie jak w poprzednim modelu minimalizujemy całkowity koszt projektu. Zauważmy, że jeśli funkcje f_{i_k} oraz f_i są liniowe, to wówczas ten problem optymalizacyjny może być rozwiązany za pomocą metod programowania liniowego (LP). Ze zbioru alternatywnych rozwiązań optymalnych wybieramy te, dla którego całkowity czas trwania projektu jest najmniejszy. Podobnie jak w drugim modelu nakład pracy dla zadania x_i , może być obliczony za pomocą wzoru (29). Stąd całkowity nakład pracy w projekcie dany jest wzorem (30). W celu wyznaczenia wartości ukrytego bufora W^B musimy w pierwszej kolejności oszacować najbardziej prawdopodobny nakład pracy. W pewnych przypadkach oszacowanie nakładu pracy dla zadania x_i może okazać się trudne, a przypisanie wartości deterministycznej wręcz niemożliwe. W związku z tym w celu rozwiązania takiego problemu wprowadzamy trapezowe liczby rozmyte opisane we wzorze (38). Dla oszacowań bezpiecznych wartość nakładu pracy dla zadania x_i dana jest liczbą rzeczywistą. Przed przystąpieniem do szacowania uzasadnionej wartości nakładu pracy dla zadania x_i musimy zapisać tę liczbę rzeczywistą za pomocą liczby rozmytej bliskiej liczbie rzeczywistej – zgodnie z definicją 7 i wzorem (39). Nakład pracy może być wówczas zapisany za pomocą wzoru:

$$\hat{w}_i = w_i^{\sim e} + w_i^{\sim B}, \quad (47)$$

gdzie \hat{w}_i jest liczbą rozmytą bliską liczbie rzeczywistej w_i , $w_i^{\sim e}$ jest liczbą rozmytą opisującą uzasadnione oszacowanie nakładu pracy dla zadania x_i oraz $w_i^{\sim B}$ jest ukrytym buforem nakładu pracy dla zadania x_i . Stąd całkowity nakład pracy w projekcie możemy zapisać jako:

$$\tilde{W}_c = W^e + W^B, \quad (48)$$

gdzie W^e jest uzasadnionym nakładem pracy w projekcie, natomiast W^B jest ukrytym buforem nakładu pracy.

Na podstawie powyższych założeń minimalizujemy całkowity koszt projektu. Jeżeli funkcje f_{i_k} oraz f_{i_t} są funkcjami liniowymi, to w celu rozwiązania powyższego zadania optymalizacyjnego możemy wykorzystać metodę rozmytego programowania liniowego FLP. Ze zbioru alternatywnych rozwiązań dopuszczalnych wybieramy to, dla którego całkowity czas trwania projektu jest najmniejszy. Bardzo mało prawdopodobnym wydaje się jednoczesne wystąpienie wszystkich niekorzystnych zdarzeń podczas realizacji projektu, dlatego możemy zredukować bufor nakładu pracy zgodnie z następującym wzorem:

$$\tilde{W}_r^B = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \tilde{W}^B, \quad (49)$$

gdzie $\alpha \in [0,1]$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$ są współczynnikami redukującymi wielkość nakładu pracy dla zadań x_1, \dots, x_n . Wielkość bufora \tilde{W}_r^B jest ustalana przez eksperta na podstawie dostępności czynników macierzy X . Stąd też całkowity nakład pracy w projekcie jest dany wzorem:

$$\tilde{W}^P = \tilde{W}^e + \tilde{W}_r^B. \quad (50)$$

Przeszacowanie nakładów pracy prowadzi do przeszacowania spodziewanych kosztów i czasów realizacji zadań w projekcie, a w konsekwencji kosztu i czasu trwania całego projektu. Zmienił się nakład pracy, dlatego zmienia się również czas trwania i koszt projektu. Stąd możemy wyznaczyć całkowity koszt i czas trwania projektu w sposób następujący:

$$K_c = K^e + K^B \quad (51)$$

$$T_c = T^e + T^B, \quad (52)$$

gdzie K^e, T^e jest odpowiednio uzasadnionym kosztem i czasem trwania projektu, natomiast K^B, T^B odpowiednio buforami kosztu i czasu trwania projektu.

Ponadto T^e oraz T^B są liczbami rozmytymi.

Podobnie jak w pierwszym modelu część zaoszczędzonych środków może zostać przeznaczona na utworzenie funduszu premiewego B i podzielona po-

między zasoby biorące udział w projekcie. Wektor istotności zadań S jest dany wzorem (26). Udział zasobu j jest obliczany zgodnie ze wzorem (27). Przykładowo, podobnie jak w poprzednim modelu do podziału funduszu premiowego możemy wykorzystać funkcję (28).

Podsumowanie

Zdaniem autorów, dla potrzeb optymalizacji harmonogramu i budżetu projektu możliwe jest wyodrębnienie indywidualnych buforów bezpieczeństwa – naddatków ukrytych w oszacowaniach czasu podawanych przez przyszłych (potencjalnych) wykonawców zadań w projekcie i zastąpienie ich jednym buforem dla całego projektu. Wyniki wcześniejszych prac wskazują, że mechanizm wydzielania buforów jest przydatny również w przypadku konstruowania budżetu projektu. Pozwala nam to założyć, że również w przypadku gdy przeszacowanie dotyczy nie tyle wyceny zadania, co oszacowania niezbędnej do wykonania w jego zakresie pracy mechanizm ten właściwie spełni swoją rolę. Zaprezentowane w pracy rozważania teoretyczne są zgodne z zaproponowanym przez Błaszczyka i Nowaka [2008] mechanizmem wymiarowania bufora nakładu kosztów oraz rozdziału ewentualnych kosztów i korzyści. W pracy przedstawiono również rozszerzenie wcześniejszych modeli o element macierzy wpływów opisujący możliwy wpływ planowanych zasobów na poszczególne elementy czaso- i kosztotwórcze. Wprowadzenie rozmytych miar pozwoliło z kolei na poprawę wiarygodności oszacowań wymaganych nakładów pracy. Należy jednak podkreślić, że zaprezentowana procedura ma charakter czysto teoretyczny i nie jest możliwe jej pełne zweryfikowanie, szczególnie w aspekcie behawioralnym, bez przeprowadzenia badań empirycznych w warunkach, jakie zachodzą w pracach nad rzeczywistymi projektami. Zamierzeniem autorów jest kontynuacja badań nad przedstawionym problemem, ze szczególnym założeniem konieczności tejże weryfikacji.

Literatura

- Błaszczyk T., Nowak B. (2008): *Project Costs Estimation on the Basis of Critical Chain Approach (in Polish)*. W: Modelowanie Preferencji a Ryzyko '08. Red. T. Trzaskalik. Akademia Ekonomiczna, Katowice.
- Błaszczyk P., Błaszczyk T., Kania M.B. (2011): *The Bi-criterial Approach to Project Cost and Schedule Buffers Sizing*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. New state of MCDM in the 21st century. Springer.

- Błaszczyk P., Błaszczyk T., Kania M.B. (2009): *Task Duration Buffers or Work Amount Buffers*. The First Earned Value Analysis Conference for the Continental Europe (proceedings), Vol. 1.
- Brucker P., Drexel A., Möhring R., Neumann K., Pesch E. (1999): *Resource-constrained Project Scheduling: Notation, Classification, Models and Methods*. „European Journal of Operational Research”, Vol. 112.
- Buckley J.J., Eslami E., Feuring T. (2002): *Fuzzy Mathematics in Economy and Engineering*. Springer.
- Chen L., Liang F., Xiaoran S., Deng Y., Wang H. (2010): *Fuzzy-Safety-Buffer Approach for Project Buffer Sizing Considering the Requirements from Project Managers and Customers*. Information Management and Engineering (ICIME), 2010 The 2nd IEEE International Conference.
- Fulkerson D.R. (1961): *A Network Flow Computation for Project Cost Curves*. „Management Science”, Vol. 7.
- Goldratt E. (1997): *Critical Chain*. North River Press.
- Gonzalez V., Alarcon L.F., Molenaar K. (2009): *Multiobjective Design of Work-In-Process Buffer for Scheduling Repetitive Projects*. „Automation in Construction”, Vol. 18.
- Herroelen W., Leus R. (2009): *On the Merits and Pitfalls of Critical Chain Scheduling*. „Journal of Operations Management”, Vol. 19.
- Jamison K.D., Lodwick W.A. (2001): *Fuzzy Linear Programming Using a Penalty Method*. „Fuzzy Sets and Systems”, Vol. 119.
- Kelley J.E. (1961): *Critical-path Planning and Scheduling: Mathematical Basis*. „Operations Research”, Vol. 9.
- Leach L. (2003): *Schedule and Cost Buffer Sizing: How Account for the Bias Between Project Performance and Your Model*. „Project Management Journal”, Vol. 34.
- Long L.D., Ohsato A. (2008): *Fuzzy Critical Method for Project Scheduling under Resource Constraints and Uncertainty*. „International Journal of Project Management”, Vol. 26.
- Ramik J. (2006): *Duality in Fuzzy Linear Programming with Possibility and Necessity Relations*. „Fuzzy Sets and Systems” 157.
- Rogalska M., Bozejko W., Hejducki Z. (2008): *Time/cost Optimization Using Hybrid Evolutionary Algorithm in Construction Project Scheduling*. „Automation in Construction”, Vol. 18.
- Shi Q., Gong T. (2010): *An Improved Project Buffer Sizing Approach to Critical Chain Management Under Resources Constraints and Fuzzy Uncertainty*. Artificial Intelligence and Computational Intelligence, 2009. AICI '09. International Conference on.
- Tukel O.I., Rom W.O., Eksioğlu S.D. (2006): *An Investigation of Buffer Sizing Techniques in Critical Chain Scheduling*. „European Journal of Operational Research”, Vol. 172.

Van de Vonder S., Demeulemeester E., Herroelen W., Leus R. (2005): *The Use of Buffers in Project Management: The Trade-off Between Stability and Makespan*. „International Journal of Production Economics”, Vol. 97.

THE BI-CRITERIAL FUZZY PROJECT CRITICAL CHAIN MODEL – THEORETICAL PRINCIPLES

Summary

The aim of this research work was to develop an optimization model for the problem of time-cost trade-off, taking into account the impact of the planned tasks or activities of contractors on the project. As a methodological basis for the proposed model the concept of critical chain E. Goldratt, which introduces the behavioral aspect of estimating the time steps in the project, but does not indicate the specific methods of quantification estimations. The presented model assumes the possibility of quantifying the workload of the project components in a set of fuzzy numbers and the ability to extract from these estimates reasonable and acceptable level of risk of non-compliance and security allowances, administered only to increase the safety assessment. The mechanism operates on optimization of decision variables representing the amount of work assigned to each resource in order to minimize the criterion function summarizing the direct costs of the activities in the project the costs of acceleration (or delays).