

**Stanisław Barczak**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# ZASTOSOWANIE TEORII SZARYCH SYSTEMÓW DO PRZEWIDYWANIA PRZYSZŁYCH OFERT SKŁADANYCH NA AUKCJACH PIERWSZEJ CENY POPRAZ PRYZMAT MODELU SZAREGO GM(1,1)

## Wstęp

Uczestnictwo w licytacji odbywającej się w otwartym systemie angielskim aukcji pierwszej ceny [5; 7] wymaga ciągłego podejmowania decyzji w odniesieniu do kolejnej składanej oferty. Reguły licytacji są jasno określone, najwyższa oferta jest ofertą zwyciężającą. Istnieje wiele metod oceny wysokości składanych ofert ze względu na cenę wywoławczą, ze względu na liczbę uczestników biorących udział w licytacji czy też ze względu na racjonalność ich postępowania. Rozważania takie są prowadzone głównie na gruncie metodologii wywodzącej się z teorii gier. W artykule podjęto próbę zastosowania modelu szarego GM(1,1) do modelowania przyszłej realizacji oferty składanej na licytacji. Należy jednak pamiętać, że w przypadku proponowanego podejścia nie uwzględnia się takich aspektów, jak racjonalność postępowania uczestników czy też ich liczba. Istotą stają się kolejne realizacje ofert, których postęp na licytacji jest traktowany jako krótki szereg czasowy złożony z kilku realizacji. W artykule założono, iż minimalna długość szeregu czasowego to cztery złożone oferty, na podstawie których będzie budowana prognoza oferty na kolejny okres. Z punktu widzenia stosowania modelu GM(1,1) istotne są: dopasowanie modelu do postępu zgłaszanych na licytacji ofert oraz dopuszczalność prognozy na przyjętym przez uczestnika licytacji arbitralnym poziomie.

## 1. Teoria szarych systemów a metody ekonometryczne

Po raz pierwszy teoria szarych systemów (ang. Grey Systems Theory) zaistniała w 1982 roku. Jej prekursorem był chiński uczony J.L. Denga, który przedstawił jej założenia w pracy uważanej za fundamentalną pt. *Control Pro-*

*blems of Grey Systems* [2]. Teoria szarych systemów jest znana w świecie od 1990 roku z uwagi na fakt, iż pierwsze prace były publikowane w języku chińskim. Do rozpropagowania teorii szarych systemów w świecie przyczyniła się praca autorstwa J.L. Denga pt. *The Course of the Grey Systems Theory* [1]. Teoria szarych systemów zgodnie z przyjętą umownie nazwą koncentruje się na problemie niekompletnej informacji wykorzystywanej do opisu rozważanego problemu naukowego. W teorii szarych systemów wyróżnia się następujące cztery możliwe systemy z niekompletną informacją [2; 3]:

- informacja o poszczególnych elementach/parametrach systemu jest niekompletna,
- informacja o strukturze systemu jest niekompletna,
- informacja o granicach systemu jest niekompletna,
- informacja o zmianach/dynamice systemu (otoczenie/środowisko) jest niekompletna.

Z tego też względu teoria szarych systemów może stanowić podstawę do prognozowania przyszłych ofert w przypadku skrajnie krótkich szeregów czasowych, w których liczba obserwacji wynosi  $n \geq 4$  <sup>\*</sup>.

## 2. Model szary GM(1,1) w modelowaniu i prognozowaniu systemów dynamicznych

Istotą modelowania szarego jest opis zachowania systemu obserwowanego w rzeczywistości danego jako zmienna prognozowana/endogeniczna:  $x^{(0)}(k)$ , gdzie:  $k = 1, 2, \dots, n$  poprzez zbiór zmiennych objaśniających stanowiących czynniki determinujące stan zmiennej prognozowanej. Zatem proces endogeniczny obserwowalny w rzeczywistości dany jako  $x^{(0)}(k)$  jest wyjaśniany w czasie  $N$  zmiennymi niezależnymi (objaśniającymi). Stąd w sensie ogólnym model szary można zapisać jako  $GM(I, N)$ , co oznacza, że system jest opisany równaniem różniczkowym I-go rzędu przy  $N$  zmiennych niezależnych/objaśniających. Ogólna postać modelu szarego jest dana jako:

$$\frac{dx(t)^{(1)}}{dt} + ax(t)^{(1)} = b \quad (1)$$

gdzie:

$a, b$  – parametry modelu.

---

<sup>\*</sup> W skrajnych przypadkach zakłada się, że długość szeregu czasowego wynosi  $n \geq 2$ .

Z ogólnej postaci modelu szarego wynika, że:

- w przypadku gdy rząd równania różniczkowego jest równy 0, czyli  $I = 0$ , to zastosowanie modelu służy badaniu siły zależności pomiędzy zmienną prognozowaną/endogeniczną a zmienną/zmiennymi objaśniającymi; dodatkowo należy wspomnieć o analizie związków rozmytych zależności – rozmytych związkach przyczynowo-skutkowych,
- w przypadku gdy  $I \neq 0$ , zastosowanie modelu jest skoncentrowane na budowie modelu prognostycznego, modelu szeregu czasowego dla zmiennej prognozowanej danej jako  $x^{(0)}(k)$ .

W zastosowaniach praktycznych jest najczęściej przyjmowany model szary w postaci  $GM(1,1)$  dla  $I = 1$  oraz dla jednej zmiennej objaśniającej, czyli  $N = 1$ . Rozwiązanie zagadnienia danego równaniem (1) można przedstawić w postaci następującego algorytmu [1; 4; 8]:

*Krok 1.* Dany jest wierszowy wektor dodatnich rosnących obserwacji:

$$X^{(0)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(k)] \quad (2)$$

*Krok 2.* Tworzony jest wektor sum cząstkowych – AGO\*, takich że:

$$X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

W wyniku wykonania działania danego wzorem (3) otrzymano monotonicznie rosnący wektor AGO dany jako:

$$X^{(1)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)] \quad (4)$$

Przy założeniu, że  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ .

*Krok 3.* Dla danych wygenerowanych w postaci szeregu AGO w kroku 2 jest dokonywane rozwiązanie równania różniczkowego w następującej postaci:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = u \quad (5)$$

gdzie:

$t$  – zmienna czasowa z krokiem jeden,

$x^{(1)}(t)$  – zmienna reprezentująca proces AGO,

$a$  – parametr reprezentujący rozwój procesu w czasie (ang. develop parameter),

$u$  – parametr reprezentujący szarą informację (ang. grey input).

---

\* AGO – Accumulating Generating Operation.

*Krok 4.* Przy założeniu warunku początkowego (4) rozwiązaniem równania różniczkowego (5) jest równanie prognozy wektora wierszowego AGO dane jako:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left[ x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] \exp(-ak) + \frac{u}{a} \quad (6)$$

gdzie:

$\hat{x}^{(1)}(k+1)$  – wartość prognozy wektora AGO na moment  $k+1$ .

*Krok 5.* Równanie wsteczne oraz równanie progresywne można zapisać korzystając z równania (5), przy założeniu skończonego przyrostu równego 1 dla zmiennej czasowej  $t$ . Odpowiednio równanie wsteczne (7) i progresywne (8) są dane jako:

$$x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) + ax^{(1)}(k) = u \quad (7)$$

$$x^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) + ax^{(1)}(k+1) = u \quad (8)$$

Ostatecznie różniczkowy model szary pierwszego rzędu jest dany jako:

$$x^{(0)}(k) = -\frac{a}{2} [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k+1)] + u \quad (9)$$

dla  $k = 1, 2, \dots, n$

*Krok 6.* W celu oszacowania parametrów równania (9), czyli parametrów  $a, u$  dla pierwotnego szeregu czasowego  $x^{(0)}$ , jest stosowana metoda najmniejszych kwadratów. Wektor ocen parametrów równania jest dany jako:

$$[a, u]^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T [\mathbf{x}^{(0)}]^T \quad (10)$$

gdzie macierz realizacji zmiennych objaśniających jest dana w następującej postaci:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -[x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)]/2 & 1 \\ -[x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)]/2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -[x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n)]/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

*Krok 7.* Zdefiniowanie przekształcenia odwrotnego IAGO\* dla wektora AGO prognoz sum częściowych danego jako:

\* IAGO – Inverse Accumulating Generating Operation.

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - x^{(1)}(k) \quad (12)$$

Na podstawie równania (9) zostaje obliczona prognoza dla modelu GM(1,1) w następującej postaci:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left[ x^{(0)}(1) - \frac{u}{a} \right] \left( e^{-ak} - e^{-a(k-1)} \right), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

Procedura uzyskiwania prognoz na podstawie modelu szarego GM(1,1) sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego rzędu pierwszego. Rozwiązanie takie ma postać wykładniczą.

### 3. Zastosowanie modelu szarego GM(1,1) do prognozowania przyszłych ofert na aukcji angielskiej pierwszej ceny na przykładzie jednej licytacji

Rozważono licytację prowadzoną w systemie angielskim pierwszej ceny. Na licytacji jest wystawiany jeden niepodzielny obiekt. W licytacji uczestniczy dowolna liczba kupców. Wszyscy kupcy znają wartości kolejno składanych ofert przez konkurentów. Założono dalej, że zostały złożone kolejno cztery oferty. Przyjęto dla uproszczenia, że składane oferty pochodzą z rozkładu jednostajnego z przedziału  $[0, 1]$ , z tym że po wygenerowaniu realizacji ofert są one sortowane od najmniejszej do największej zgodnie z zasadami licytacji.

Zatem wektor wierszowy czterech kolejnych ofert złożonych na licytacji jest dany jako:

$$X^{(0)} = [0,276 \ 0,679 \ 0,709 \ 0,754]$$

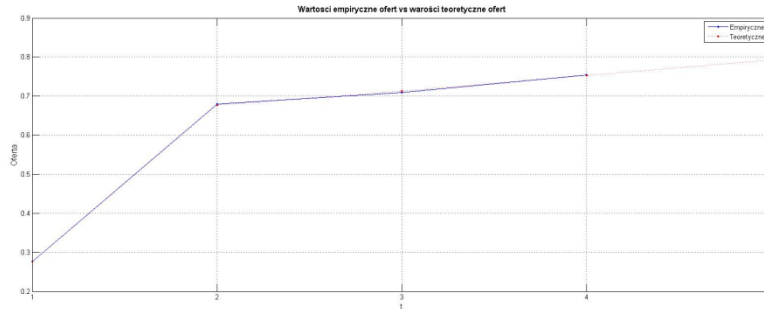
Po obliczeniu początkowych sum cząstkowych otrzymano:

$$X^{(1)} = [0,276 \ 0,955 \ 1,665 \ 2,419]$$

Po oszacowaniu parametrów modelu metodą najmniejszych kwadratów otrzymano następujące równanie prognozy:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left[ x^{(0)}(1) - \left( \frac{0,645}{-0,053} \right) \right] \left( e^{-(-0,053)k} - e^{-(-0,053)(k-1)} \right) \quad (14)$$

Dla kolejnych  $k$  ofert wartości empiryczne i teoretyczne przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Wartości rzeczywiste i teoretyczne ofert wraz z prognozą na moment 5.

Z punktu widzenia uczestnika licytacji najważniejszy jest rząd wartości, jaką przyjmie przyszła oferta. Z równania prognozy wynika, iż wartość przyszłej oferty wynosi:

$$\hat{x}^{(0)}(5) = 0,793 \quad (15)$$

W celu uniknięcia sztucznego zaniżania średniego względnego błędu *ex post* prognozy zdecydowano, by błąd był liczony od drugiej realizacji. Zatem względne błędy *ex post* zostały obliczone od drugiej oferty  $k = 2$  z uwagi na fakt, iż pierwsza realizacja teoretyczna oferty jest zawsze prognozą idealną z błędem równym zero. Dla oferty przyszłej piątej MAPE wynosi 0,436%.

Tabela 1

Wartości rzeczywiste i teoretyczne ofert, absolutne względne błędy oraz prognoza oferty na moment 5.

k	$x^{(0)}$	$\hat{x}^{(0)}$	$\left  \frac{x^{(0)} - \hat{x}^{(0)}}{x^{(0)}} \right $
1	0,276	0,276	---
2	0,680	0,677	0,004
3	0,709	0,714	0,006
4	0,755	0,752	0,003
5	---	0,793	---

W odniesieniu do tabeli 1 łatwo zauważyć, że w przypadku gdyby zostały policzone reszty modelu, ich suma nie byłaby równa zero. Oznacza to, iż nie jest w tym przypadku spełnione założenie odnośnie do wartości oczekiwanej reszt na poziomie zero, czyli:

$$E(\varepsilon) \neq 0, \quad (16)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{(k)} = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k) \quad (17)$$

jest resztą modelu. Z drugiej jednak strony niska liczba realizacji zmiennej prognozowanej uniemożliwia utrzymanie wspomnianych założeń. Zatem należy podkreślić, iż istotą modelu szarego GM(1,1) jest takie dopasowanie wartości teoretycznych do rzeczywistych, które z punktu widzenia dowolnego błędu *ex post* będzie akceptowalne i spowoduje tym samym, że prognozy budowane na jego podstawie będą dopuszczalne ze względu na arbitralnie przyjęty poziom błędu *ex post*.

#### 4. Symulacja modelu GM(1,1) ze względu na zachowanie się błędu *ex post* w odniesieniu do długości szeregu czasowego

Głównym celem prowadzonej symulacji jest próba wykazania, iż wzrost liczby obserwacji w szeregu czasowym powoduje wzrost poziomu błędu *ex post* w przypadku stosowania modelu GM(1,1) Dengi. Symulacje przeprowadzono w programie Matlab z wykorzystaniem skryptu/programu napisanego przez autora artykułu.

Do symulacji przyjęto arbitralnie następujące założenia:

- oferty pochodzą z rozkładu jednostajnego z przedziału  $[0,1]$ ,
- za poziom oceny prognozy przyjęto błąd *ex post* prognoz: MAPE wyrażony procentowo,
- każda symulacja obejmowała wygenerowanie 500 tysięcy szeregów czasowych, dla których zostały oszacowane modele GM(1,1) wraz z ich wartościami teoretycznymi i poziomem błędu MAPE wyrażonym procentowo,
- przyjęto arbitralnie następujące długości szeregów czasowych:  $k = 4$ ,  $k = 8$ ,  $k = 16$  oraz  $k = 40$ .

Wyniki symulacji w postaci wybranych miar struktury prezentuje tabela 2. Uzyskane wyniki świadczą, iż wraz ze wzrostem liczby obserwacji rośnie poziom błędu MAPE, a w ogólności rośnie poziom błędów prognozy. W symulacji rozpatrywano arbitralnie wybrane długości szeregów czasowych w celu przedstawienia zmiany poziomu błędu ze względu na ich długość.

Tabela 2

Wybrane charakterystyki błędu MAPE dla poszczególnych długości szeregu czasowego dla 500 tysięcy modeli GM(1,1)

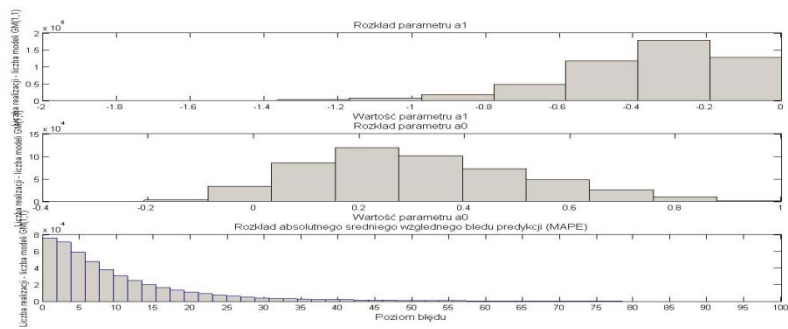
	Średnia	Odchylenie standardowe	Kwantyl 1	Kwantyl 2 Mediana	Kwantyl 3
$k = 4$	16,11	52,22	3,21	7,92	16,03
$k = 8$	25,48	77,77	8,54	14,65	27,19
$k = 16$	33,89	47,27	13,51	22,84	39,32
$k = 40$	47,55	51,91	24,60	36,73	55,88

Wyniki przeprowadzonej symulacji nasuwają w sposób naturalny następujące wnioski:

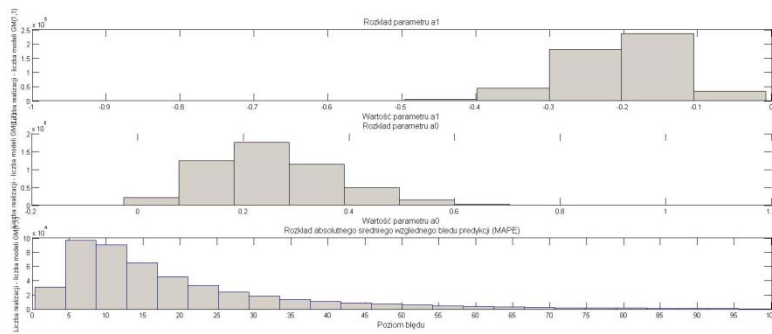
1. Z punktu widzenia licytacji i przewidywania przyszłej realizacji oferty szeregi czasowe, jakimi dysponuje uczestnik, są bardzo krótkie.
2. W przypadku gdy w szeregu czasowym wzrasta liczba obserwacji, a tym samym błąd prognozy, należy zmienić klasę modelu szerego na np. model szary z krótkim oknem prognoz, który przesuwają się po całym szeregu czasowym – model pełzający.
3. Z punktu widzenia uczestnika licytacji łatwo zauważyć, iż duża liczba prognoz mieści się poniżej błędu na poziomie około 8% (tabela 2) przy liczbie złożonych ofert  $k = 4$ . Wydaje się, iż w przypadku 500 tysięcy estymowanych modeli GM(1,1) dla każdej symulacji (innymi słowy jest rozpatrywanych 500 tysięcy licytacji) założenie 8% prognozy dopuszczalności prognoz jest wynikiem satysfakcjonującym.
4. Z punktu widzenia praktycznego zastosowania modelu Dengi do przewidywania przyszłych ofert należy podkreślić, iż złożoność algorytmu szacowania modelu jest niska i umożliwia budowę prognoz przyszłych ofert w trakcie trwania licytacji.
5. Ilustrację graficzną przeprowadzonych symulacji stanowią rysunki 2-5 dla poszczególnych  $k$ . Z rozkładu absolutnego względnego błędu predykcji widać, że w przypadku  $k = 4$  osiemdziesiąt tysięcy modeli dało prognozy z błędem poniżej 2,5%. Podsumowując, wydaje się, iż poprzez pryzmat prowadzonych analiz długość szeregu czasowego dla składanych ofert nie powinna przekraczać 10 realizacji. Jednak określenie optymalnej długości szeregu czasowego pod kątem stosowalności modelu GM(1,1) wymaga przeprowadzenia dalszych analiz.

Dodatkowym wynikiem prowadzonych symulacji jest przedstawienie rozkładów wartości szacowanych parametrów. W artykule aspekt zachowania poszczególnych parametrów modelu nie jest analizowany. Skoncentrowano się tu na możliwości budowy prognoz dla krótkich szeregów czasowych i analizie dokładności prognozy w świetle błędu MAPE.

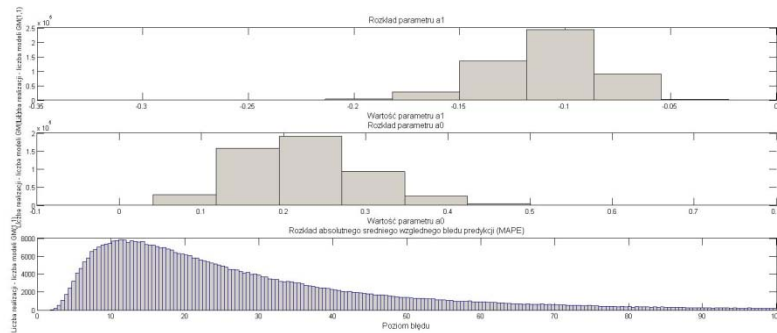




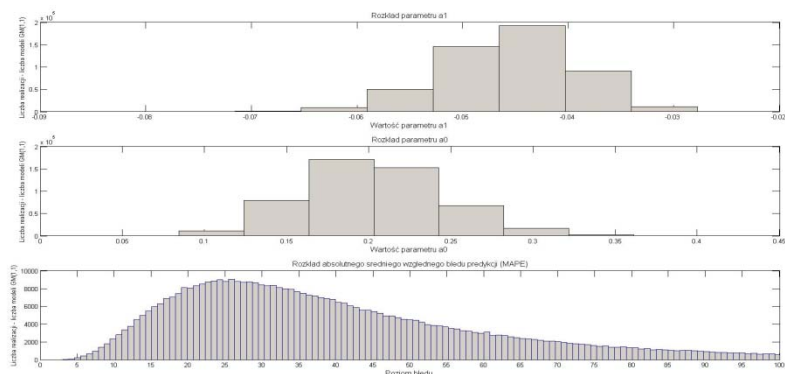
Rys. 2. Symulacja dla 500 tysięcy modeli GM(1,1) dla k = 4



Rys. 3. Symulacja dla 500 tysięcy modeli GM(1,1) dla k = 8



Rys. 4. Symulacja dla 500 tysięcy modeli GM(1,1) dla k = 16



Rys. 5. Symulacja dla 500 tysięcy modeli GM(1,1) dla  $k = 40$

Zastosowanie dużej liczby obserwacji w szeregu czasowym wymusza zmianę klasy modelu szarego. Klasami takimi mogą być szare modele w połączeniu ze sztucznymi sieciami neuronowymi czy też modele szare w odniesieniu do klasy modeli ARIMA szeregów czasowych.

## Podsumowanie

W artykule zaprezentowano metodę budowy prognoz dla krótkich szeregów czasowych na gruncie teorii szarych systemów. Z punktu widzenia wykorzystania tej klasy metod zaproponowano jej zastosowanie do przewidywania przyszłych ofert na licytacjach otwartych prowadzonych w systemie angielskim pierwszej ceny. W artykule rozważano możliwości zastosowania modelu szarego GM(1,1) Dengi. W rezultacie przeprowadzonej analizy można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Prognozy przyszłych ofert składanych na licytacji angielskiej pierwszej ceny mogą stanowić podstawę do optymalizowania indywidualnych ofert kupców ze względu na ich tzw. prywatne wyceny obiektu. Oznacza to, że za próg dopuszczalności można przyjąć prognozę na poziomie indywidualnej wyceny obiektu\*.
2. Prognozy ofert budowane na gruncie modelu GM(1,1) nie gwarantują racjonalności postępowania uczestnika licytacji.

Decyzja kupca o zgłoszeniu oferty o określonej wysokości jest decyzją indywidualną, na którą może się składać prognozowana realizacja oferty traktowana w kategorii punktu odniesienia.

\* Indywidualna wycena obiektu – waluacja kupiecka – z punktu widzenia teorii gier stanowi wartość graniczną, której przekroczenie w postaci złożenia wyższej oferty daje ujemną wypłatę uczestnikowi. Świadczy to o podjęciu przez gracza gry, która jest nieracjonalna ze względu na wypłatę.

Zalety budowy prognoz na podstawie modelu GM(1,1) są następujące:

- łatwość prowadzenia obliczeń, w tym krótki czas ich trwania, co umożliwia bieżącą budowę prognoz w trakcie trwania licytacji,
- możliwość oceny prognozy w kategoriach dopuszczalności poprzez pryzmat wielkości dowolnego błędu prognozy z grupy *ex post*.

Do wad modelu GM(1,1) w odniesieniu do licytacji można zaliczyć:

- niespełnienie warunków dotyczących składnika losowego modelu ekonometrycznego, za który model GM(1,1) jest uznawany,
- brak możliwości oceny jakości modelu z zastosowaniem klasycznego podejścia,
- prognozy nie uwzględniają liczby konkurentów; oferta jest traktowana jako niezależna realizacja zmiennej losowej; zakłada się, że oferty pochodzą z tego samego rozkładu prawdopodobieństwa.

Z punktu widzenia dalszych badań związanych z wykorzystaniem modeli szarych do prognozowania przyszłych ofert na licytacjach można zaproponować następujące ich kierunki:

- rozszerzenie analizy na inne modele szare, tj.: model Remmant, model Verhulsta [6], modele klasy GM(2,1), model dla szeregów czasowych powyżej 8 obserwacji,
- ustalenie optymalnej liczby obserwacji ze względu na próg dopuszczalności prognozy budowanej na podstawie modelu GM(1,1),
- rozszerzenie badań o uwzględnienie w modelowaniu optymalnych ofert ze względu na liczbę kupców uczestniczących w licytacji.

## Literatura

1. Cempel C., Tabaszewski M., *Teoria szarych systemów w zastosowaniu do modelowania i prognozowania w diagnostyce maszyn*, „Diagnostyka” 2007, 2(42).
2. Deng J.L., *Control Problems of Grey Systems*, „Systems and Control Letters” 1982, Vol. 1, No. 5, North Holland, Amsterdam.
3. Deng J., *Introduction to Grey System Theory*, „The Journal of Grey System” 1989, Vol. 1, No. I.
4. Kayacan E., Ulutas B., Kaynak O., *Grey System Theory Based in Time Series Prediction*, „Expert Systems with Applications” 2010, Vol. 37.
5. Krishna V., *Auction Theory*, Academic Press 2002.
6. Kun-Li Wen, Ting-Cheng Chang, *The Research of Completed GM(1,1) Model Toolbox Using Matlab*, „International Journal of Computational Cognition” 2005, Vol. 3, September.
7. Kuśmierczyk P., *Auctions*, Publishing House of Wrocław University of Economics, Wrocław 2010.

8. Lim D., Anthony P., Chong Mun H., Kah Wai N., *Assessing the Accuracy of Grey System Theory against Artificial Neural Network, w: Predicting Online Auction Closing Price*, Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, Vol. I, IMECS, 19-21 March, Hong Kong 2008.

## APPLICATION OF GRAY SYSTEM THEORY TO MODEL THE FIRST-PRICE AUCTION

### Summary

This paper presents the possibility of applying the theory of gray systems, with particular emphasis on the model GM (1,1) in the modeling of the first price auction. The paper presents the properties of the model GM (1,1) for the ultrashort time series representing the bid made by the participants at the first price auction. An analysis of the residuals simulation model based on the length of the time series and forecasting capabilities based on gray model GM (1,1). The analysis shows that with the decreasing the number of observations in time series (short time series) decreases the ex post forecast error. This property is very important in modeling the course of the auction and in particular predicting possible future offerings. Model GM (1,1) can be considered in applications for masterpieces auctions.