Joanna Utkin

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Analiz Matematycznych
Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
jutkin@sgh.waw.pl

METODA WYZNACZANIA STRATEGII UOGÓLNIONEJ OSŁONY KWANTYLOWEJ NA SKOŃCZONYM RYNKU NIEZUPEŁNYM

Streszczenie: Problem dotyczy zabezpieczenia zobowiązania na skończonym rynku niezupełnym, gdy budżet nie wystarczy na pokrycie zobowiązania we wszystkich stanach. Wykorzystuje się postępowanie dwustopniowe. Po pierwsze, dla danego zobowiązania maksymalizuje się średni współczynnik sukcesu, którego argumentem jest zrandomizowany test. Po drugie, dla zobowiązania zmodyfikowanego za pomocą otrzymanego zrandomizowanego testu poszukuje się optymalnej strategii zabezpieczającej.

W pierwszym etapie, po dyskretyzacji zbioru funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego i cen sprzedaży zobowiązania, sprowadzamy maksymalizację zrandomizowanego testu do skończonego ciągu zadań programowania liniowego. Wyprowadzamy także kryterium osiągalności zmodyfikowanego zobowiązania. Drugi etap zależy od osiągalności zmodyfikowanego zobowiązania. Jeżeli jest ono osiągalne, to może być zreplikowane i strategia replikująca jest rozwiązaniem problemu osłony. Jeżeli nie jest ono osiągalne, to szukamy strategii, która jest rozwiązaniem układu nierówności nadosłony. Warunki nadosłony są sformułowane przy użyciu cen sprzedaży zobowiązania charakterystycznych dla modelu zdyskretyzowanego.

Słowa kluczowe: rynek niezupełny, dyskretyzacja, osłona kwantylowa.

Wprowadzenie

Problem uogólnionej osłony kwantylowej na skończonym rynku zupełnym i niezupełnym ma podobne sformułowanie. Problem ten polega na maksymalizacji średniego współczynnika sukcesu dla danej wypłaty europejskiej przy danym dość niskim kapitale początkowym. Argumentem współczynnika sukcesu jest proces wartości strategii samofinansującej. Rozwiązanie problemu, zarówno w przypadku niezupełności, jak i zupełności rynku, jest dwuetapowe [Follmer, Leukert, 1990; Follmer, Schied, 2011]. Najpierw maksymalizuje się zrandomizowany test, a następnie dla zmodyfikowanej za jego pomocą wypłaty poszukuje się optymalnej strategii.

Na skończonym rynku zupełnym pierwszy etap sprowadza się do rozwiązania pewnego zadania programowania liniowego. W pracy [Utkin, 2013] przeanalizowano własności maksymalnego zrandomizowanego testu, uzależniając rozwiązanie od najmniejszej uogólnionej gęstości prawdopodobieństw, co umożliwiło pominięcie rozwiązywania zadania programowania liniowego. Drugi etap rozwiązania na rynku zupełnym jest banalny, gdyż zmodyfikowana wypłata posiada jednoznaczną replikację, a wówczas proces wartości w optymalnym współczynniku sukcesu jest jednoznacznie określony (replikacja jest jednoznaczna, przy założeniu, że walory tworzące model są pierwotne).

Na rynku niezupełnym w obu etapach postępowania pojawiają się komplikacje. Niniejsza praca poświęcona jest metodzie rozwiązania problemu osłony w przypadku niezupełnego rynku skończonego.

Na rynku niezupełnym pierwszy etap dotyczy maksymalizacji średniego zrandomizowanego testu spełniającego ograniczenie budżetowe dla wszystkich funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego. Jeżeli rynek ma N stanów końcowych, to zbiór wszystkich funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego może być przedstawiony jako pewien wypukły podzbiór R^N. W celu optymalizacji testu wykorzystamy dyskretyzację przedstawienia zbioru funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego.

W drugim etapie rozwiązania (w którym szukamy strategii inwestycyjnej), zmodyfikowana wypłata otrzymana na rynku niezupełnym może być nieosiągalna. W takim przypadku należy odwołać się do nierówności nadosłony, określających strategie nadosłony za pomocą cen sprzedaży zabezpieczonej wypłaty. Również w tym miejscu wykorzystamy dyskretyzację odniesioną do zbiorów funkcji prawdopodobieństw martyngałowych w podmodelach rynku skończonego. W przypadku osiągalnej zmodyfikowanej wypłaty, zastosowanie dyskretyzacji w postępowaniu optymalizacyjnym pozwala stwierdzić osiągalność.

Na końcu pracy zamieszczony jest przykład dotyczący rynku 2-okresowego, na którym w każdym okresie występuje pewien podmodel niezupełny. Na podstawie dyskretyzacji będzie wyznaczony maksymalny zrandomizowany test dla wypłaty europejskiej opcji call, a następnie będzie obliczona strategia nadosłony dla zmodyfikowanej wypłaty.

Ważnym zastosowaniem nadosłony kwantylowej jest optymalizacja spłaty zobowiązania w warunkach niedoboru.

1. Model rynku kapitałowego

Na rozważanym rynku kapitałowym transakcje odbywają się w chwilach $t = 0,1,...,W$. Przedmiotem transakcji jest $1 + A$ pierwotnych papierów wartościowych (papiery pierwotne charakteryzują się liniową niezależnością wektorów cen w każdym podmodelu 1-okresowym rynku). Ceny tych walorów oznaczamy przez $S_t(n), n = 0,1,...,A$. Wśród nich wyróżniamy instrument bezpieczny: $S_t(0) = K_t$ jest czynnikiem oprocentowującym za okres $\langle 0,t \rangle$ bezpiecznego konta bankowego. Na zbiorze stanów rynku w chwili $W, \Omega = \{\omega_1,...,\omega_N\}$, dana jest funkcja prawdopodobieństwa rzeczywistego P. Struktura informacyjna modelu jest dana za pomocą ciągu $I_t, t = 0,...,W$ podziałów zbioru Ω na coraz drobniejsze podzbiory [le Roy, Werner, 2000]. Każdemu elementowi zbioru I_t odpowiada jedno zdarzenie w chwili *t*. Jeżeli $N_t = Card(I_t)$, to dane zdarzenie można utożsamić z parą (t,k), gdzie $k \in \{1,...,N_t\}$. Każde zdarzenie (t,k), $k \in \{1,...,N_t\}, t \in \{0,...,W-1\}$, jest początkiem odpowiedniego *W* – *t*-okresowego podmodelu rynku, będącego pewnym modelem rynku, którego koniec przypada na moment *W*.

Zakładamy, że rynek jest pozbawiony możliwości arbitrażu i niezupełny. Każdy podmodel takiego rynku jest również pozbawiony możliwości arbitrażu. Rynek skończony jest niezupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje 1-okresowy podmodel niezupełny. Warunek ten jest spełniony, gdy liczba stanów podmodelu jest większa od liczby pierwotnych papierów wartościowych występujących na rynku. Jeśli przy założeniu niezupełności nie ma możliwości arbitrażu, to istnieje wiele funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego. Przez Q oznaczamy dowolną funkcję prawdopodobieństwa martyngałowego, gdzie M – zbiór funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego, *ClM* – domknięcie zbioru M.

Przyjmujemy następujące ustalenia dotyczące strategii inwestycyjnej na rozważanym rynku. Jeżeli przez χ oznaczamy strategię (inwestycyjną)[1], to jej wartość w chwili $t \in \{0,...,W-1\}$ jest równa:

$$V_t = \sum_{n=0}^{A} \chi_t(n) S_t(n),$$

[1] Strategia inwestycyjna jest ciągiem procesów $\chi = (\chi(0),...,\chi(A))$ [Pliska, 2005]. Natomiast $\chi_t(n)$ jest zmienną losową, oznaczającą ilość walorów *n* rodzaju kupionych/sprzedanych w chwili *t* i posiadanych do chwili *t* + 1, przy czym zmienna ta jest stała na zdarzeniach z elementów I_t, podobnie jak $S_t(n)$.

zaś w chwili $t = W$ równa się:

$$V_W = \sum_{n=0}^{A} \chi_{W-1}(n) S_W(n).$$

Strategię χ nazywamy strategią samofinansującą, jeżeli w chwilach $s = 1,\ldots,W-1$ spełnia równania samofinansowania:

$$\sum_{n=0}^{A} \chi_{s-1}(n) S_s(n) = \sum_{n=0}^{A} \chi_s(n) S_s(n). \tag{1}$$

Przez $Y_t = \frac{V_t}{K_t}$ oznaczamy zdyskontowaną wartość strategii w t.

2. Dyskretyzacja i ceny sprzedaży

Koncepcja dyskretyzacji zbioru ClM pochodzi z martyngałowej metody maksymalizacji oczekiwanej użyteczności majątku końcowego przy danej wpłacie początkowej [Pliska, 2005, s. 229]. Z uwagi na znaczenie dyskretyzacji w określeniu cen sprzedaży, koncepcję tę omówimy poniżej, odnosząc ją również do podmodeli.

Na rynku o N stanach końcowych bez możliwości arbitrażu zbiór funkcji prawdopodobieństwa martyngałowego może być utożsamiony z niepustym podzbiorem sympleksu w R^N. Ponadto, gdy rynek jest zupełny, M jest zbiorem 1-elementowym, gdy zaś jest niezupełny, M ma wiele elementów. Interesuje nas wówczas postać zbioru ClM .

W modelu W-okresowym każda współrzędna wektora $Q \in M$ jest iloczynem W prawdopodobieństw martyngałowych z podmodeli 1-okresowych na odpowiedniej trajektorii. Wektor Q ma więc postać iloczynu po współrzędnych W wektorów: $Q = Q_0 \cdot \ldots \cdot Q_{W-1}$. Jego czynniki mają współrzędne stałe lub dane za pomocą funkcji afinicznych, co zależy od zupełności lub niezupełności 1-okresowych podmodeli w odpowiednich chwilach. Zatem $Q \in M$ jest iloczynem wartości W przekształceń afinicznych, których argumenty należą do zbiorów jednoelementowych albo do wnętrza wielościanów wypukłych. W przypadku $Q \in ClM$ będą to ich domknięcia. Wobec tego ClM jest częścią wspólną pewnego wielościanu wypukłego i sympleksu, a więc ClM jest wielościanem wypukłym. Oznaczając wierzchołki ClM przez $Q(1),\ldots,Q(J)$, możemy napisać:

$$ClM = conv\{Q(1),\ldots,Q(J)\}. \tag{2}$$

Prawdopodobieństwo martyngałowe w $W-t$-okresowym podmodelu, którego początek jest zdarzeniem (t,k), oznaczamy symbolem $Q^{t,k}$. Zbiór prawdopodobieństw martyngałowych tego podmodelu oznaczamy przez $M^{t,k}$.

Podobnie jak w modelu *T*-okresowym, funkcję prawdopodobieństwa martyngałowego można przedstawić jako iloczyn $Q^{t,k}=Q_t^k\cdot\ldots\cdot Q_{T-1}^k$, gdzie Q_s^k jest wektorem utworzonym z tych współrzędnych wektora Q_s, które odpowiadają stanom końcowym możliwym do osiągnięcia po wyjściu z (t,k). Domknięcie zbioru prawdopodobieństw martyngałowych podmodelu $ClM^{t,k}$ jest wielościanem wypukłym i jeśli jego wierzchołki oznaczamy przez $Q^{t,k}(1),\ldots,Q^{t,k}(J_{t,k})$, to możemy je przedstawić jako:

$$ClM^{t,k}=conv\left\{Q^{t,k}(1),\ldots,Q^{t,k}(J_{t,k})\right\} \tag{3}$$

Dyskretyzację domknięcia zbiorów prawdopodobieństw martyngałowych wykorzystamy do wyznaczenia cen sprzedaży danej wypłaty.

Jeżeli C oznacza losową wypłatę w chwili W, to zdyskontowaną wypłatę oznaczamy przez $H=\dfrac{C}{K_W}$.

Cena sprzedaży w chwili t zdyskontowanej wypłaty H jest równa [Dana, Jeanblanc-Picque, 1998, s. 25][2]:

$$\overline{H_t}=\sup_{Q\in M}E_Q(H|I_t),\quad t=0,\ldots,W-1. \tag{4}$$

W chwili $t=0$ kres górny osiągnięty jest w wierzchołku wielościanu wypukłego ClM, skąd natychmiast otrzymujemy wniosek.

Wniosek 1

Początkowa cena sprzedaży zdyskontowanej wypłaty H może być przedstawiona w postaci:

$$\overline{H_0}=\max\left\{Q^T(j)H : j=1,\ldots,J\right\} \tag{5}$$

[2] R.-A. Dana i M. Jeanblanc-Picque używają terminu „le prix de vente" (cena sprzedaży) i oznaczają nakreślając wypłatę [1998, s. 25]. Z uwagi na to, ze zmienne losowe na rynku skończonym mogą być traktowane jak wektory, wartość oczekiwana jest zapisana za pomocą transpozycji zmiennej losowej. Por. też cena sprzedającego: [Jakubowski, 2006, s. 80].

Kryterium osiągalności wypłaty C, równoważnej stałości $E_Q H$ na M, możemy wyrazić za pomocą równości $E_Q H$ na wszystkich wierzchołkach domknięcia ClM.

Wniosek 2

Wypłata C jest osiągalna $\Leftrightarrow Q^T(1)H = \ldots = Q^T(J)H$.

Biorąc pod uwagę konstrukcję Q na rynku skończonym, możemy przedstawić cenę sprzedaży w chwili t jako:

$$\overline{H_t} = \sup_{Q_t,\ldots,Q_{W-1}} ((Q_t \ldots Q_{W-1})^T H | I_t). \tag{6}$$

Na podstawie znajomości stanów końcowych osiąganych przy starcie z (t,k), z odpowiednich kolejnych współrzędnych wektora H tworzymy wektor $H^{t,k}$. Możemy wówczas przedstawić cenę sprzedaży dla podmodelu analogicznie do (5). Cena sprzedaży dla tego podmodelu $W-t$-okresowego jest równa:

$$\overline{H}^{t,k} = \max\left\{(Q^{t,k}(j))^T H^{t,k} : j = 1,\ldots,J_{t,k}\right\} \tag{7}$$

Po wyznaczeniu cen sprzedaży $\overline{H}^{t,k}$ dla wszystkich $k = 1,\ldots,N_t$, tworzymy wektor $\overline{H}_t$ z odpowiednich współrzędnych wszystkich wektorów stałych $\overline{H}^{t,k}$.

Jeśli $t = k = 0$, to piszemy $N_0 = N, Q^{0,0} = Q, M^{0,0} = M, \overline{H}^{0,0} = \overline{H_0}$.

3. Dyskretyzacja w problemie maksymalizacji średniego zrandomizowanego testu

Problem dotyczy zabezpieczenia zobowiązania w sensie maksymalizacji średniego współczynnika sukcesu, gdy budżet nie pozwala na pokrycie zobowiązania we wszystkich stanach rynku. Zgodnie z terminologią stosowaną w inżynierii finansowej zobowiązanie nazywamy wypłatą europejską: daną, nieujemną wypłatę końcową C będziemy nazywać wypłatą europejską.

Celem proponowanego postępowania jest wykorzystanie dyskretyzacji (2) do wyznaczenia optymalnego zrandomizowanego testu na skończonym rynku niezupełnym. W przypadku rynku skończonego o N stanach końcowych zrandomizowany test jest elementem kostki $\langle 0,1\rangle^N$. Istnienie takiego testu oraz jego związek z uogólnioną osłoną kwantylową jest treścią twierdzenia o maksymalnym zrandomizowanym teście na rynku niezupełnym [Follmer, Schied, 2011, tw. 8.7].

Twierdzenie o maksymalnym zrandomizowanym teście.

Jeżeli H jest zdyskontowaną wypłatą europejską spełniającą warunek $0 < v < \overline{H_0}$, to istnieje zrandomizowany test ψ^*, dla którego:

$$\overline{(H\psi^*)}_0 = v, \tag{8}$$

$$P^T\psi^* = \sup\left\{P^T\psi : \psi \in \langle 0,1\rangle^N \wedge Q^T(H\psi) \le v \wedge Q \in M\right\} \tag{9}$$

Ponadto strategia nadosłony dla zmodyfikowanej wypłaty $H^* = H\psi^*$ o początkowej wartości $\overline{H_0^*}$ i procesie zdyskontowanych wartości Y^* maksymalizuje współczynnik sukcesu:

$$P^T\psi_{Y^*} = \max\left\{P^T\psi_Y : Y_0 \le v \wedge Y \ge 0\right\},$$

gdzie $\psi_Y = 1_{Y_W \ge H} + 1_{Y_W < H} Y_W / H.$

Na skończonym rynku niezupełnym zbiór M jest względnym wnętrzem pewnego wielościanu wypukłego w R^N. Kresy górne form liniowych w (8), (9) są osiągnięte w pewnych wierzchołkach domknięcia ClM. Dzięki dyskretyzacji przedstawienia tego zbioru za pomocą wierzchołków, wystarczy rozwiązać skończony ciąg zadań programowania liniowego i wybrać zrandomizowany test dla największej spośród optymalnych wartości średnich.

Jeżeli dysponujemy przedstawieniem ClM jako (2), to formułujemy J pomocniczych problemów optymalizacyjnych dotyczących poszukiwania zrandomizowanych testów $\psi^*(j), j = 1,\ldots,J$:

$$P^T\psi^*(j) = \max\left\{\begin{array}{l} P^T\psi : \psi \in \langle 0,1\rangle^N \wedge Q^T(j)(H\psi) = v \\ \wedge\left((i \ne j \wedge i = 1,\ldots,J) \Rightarrow Q^T(i)(H\psi)\right) \le v \end{array}\right\} \tag{10}$$

Spośród J zadań (10) rozwiązujemy K zadań niesprzecznych dla $j = j_k, k = 1,\ldots,K.$ Warunkiem niesprzeczności zadania (10) dla danego j jest istnienie punktów wspólnych kostki i hiperpłaszczyzny:

$$\langle 0,1\rangle^N \cap \left\{\psi \in R^N : Q^T(j)(H\psi) = v\right\} \ne O. \tag{11}$$

Jeżeli spełniony jest warunek (11), to zadanie pomocnicze (10) ma rozwiązanie, które oznaczamy $\psi^*(j_k)$.

Optymalne rozwiązanie problemu (9) otrzymujemy jako następujące maksimum:

$$P^T\psi^* = \max\left\{P^T\psi^*(j_k): k=1,...,K\right\}. \tag{12}$$

Jako optymalny zrandomizowany test ψ^* przyjmujemy dowolny test generujący maksymalną wartość oczekiwaną (12).

Ze sformułowania zadań (10) wynika, że:

$$\overline{\left(H\psi^*\right)}_0 = v. \tag{13}$$

Na podstawie wartości ceny sprzedaży (13) i wniosku 2 możemy wyciągnąć kolejny wniosek.

Wniosek 3

Zmodyfikowana wypłata optymalna $H\psi^*$ jest osiągalna $\Leftrightarrow$ $Q^T(j)\left(H\psi^*\right) = v, j = 1,..., J.$

4. Nierówności nadosłony na skończonym rynku niezupełnym

Jeżeli dla danej wypłaty europejskiej C zmodyfikowana wypłata optymalna $H\psi^*$ jest osiągalna, to szukana strategia będzie tą, która ją replikuje.

Jeżeli $H\psi^*$ nie jest osiągalna, to nie ma strategii replikującej. Zgodnie z twierdzeniem o optymalizacji zrandomizowanego testu na rynku niezupełnym, poszukuje się wówczas strategii nadosłony dla $H^* = H\psi^*$.

Przez strategię nadosłony dla danej europejskiej wypłaty C rozumie się dowolną strategię samofinansującą o procesie wartości spełniającym nierówności: $V_t \geq 0$ dla $t = 0,...,W-1$ i $V_W \geq C$.

Poniżej przytoczymy twierdzenie o nadosłonie wypłaty europejskiej, które znajduje się w cytowanej monografii [Follmer, Schied, 2011, tw.7.15, 7.16] jako wniosek otrzymany z twierdzeń o zabezpieczeniu wypłat amerykańskich.

Twierdzenie o nadosłonie wypłaty europejskiej

Dla danej zdyskontowanej wypłaty europejskiej H^* istnieje strategia χ spełniająca nierówności nadosłony:

$$\overline{H^*{}_t} + \sum_{n=1}^{A} \sum_{s=t+1}^{T} \chi_{s-1}(n) \left(\frac{S_s(n)}{K_s} - \frac{S_{s-1}(n)}{K_{s-1}} \right) \geq H^*, t = 0,\ldots,W-1. \quad (14)$$

Jeżeli ponadto strategia χ *jest samofinansująca i ma wartość początkową* $\overline{H^*{}_0}$ *, to zabezpiecza* H^*.

Występujący w nierównościach (14) wektor cen sprzedaży $\overline{H^*{}_t}$ w każdej chwili $t = 1,\ldots,W-1,$ tworzymy z odpowiednich współrzędnych wektorów $\overline{H^*}^{t,k}$ wyznaczonych według (7), a w $t = 0$ według (5).

Podsumowując, aby zabezpieczyć zdyskontowaną wypłatę europejską H^*, wystarczy znaleźć strategię χ spełniającą warunki:

– nierówności nadosłony (14) w $t = 0,\ldots,W-1$,
– równania samofinansowania (1) w $s = 1,\ldots,W-1$,
– równania wartości początkowej:

$$\sum_{n=0}^{A} \chi_0(n) S_0(n) = \overline{H^*{}_0}. \quad (15)$$

Zgodnie z definicją nadosłony, strategia spełniająca (1), (14), (15) przyniesie w chwili W kwotę wyższą lub równą wypłacie C. Jest to strategia sprzedającego wypłatę, który żąda za nią swojej ceny. Nierówności nadosłony (14) stanowią pewien układ nierówności liniowych. Cytowane twierdzenie gwarantuje istnienie rozwiązania. Na ogół istnieje wiele rozwiązań. Można usystematyzować procedurę poszukiwania rozwiązań układu złożonego z nierówności (14) i równań (1), (15). Rozwiązując najpierw nierówności nadosłony kolejno w chwilach $t = W-1,\ldots,0,$ wyznaczamy ilości akcji (na ogół wyrażone za pomocą parametrów) $\chi_t(n), n = 1,\ldots,A,$ w odpowiednich okresach $\langle W-1, W\rangle,\ldots,\langle 0,1\rangle$. Następnie wyznaczamy kwoty depozytów lub kredytów bankowych w okresach $\langle t, t+1\rangle$: dla $t = 0$ stosujemy równanie wartości początkowej (15), zaś dla $t = 1,\ldots,W-1,$ stosujemy równania samofinansowania (1).

5. Przykład zastosowania

Przykład dotyczy zastosowania dyskretyzacji na rynku 2-okresowym dobranym tak, aby zarówno w okresie $\langle 0,1\rangle$, jak też w okresie $\langle 1,2\rangle$, w jednym podmodelu występowała niezupełność. Na rynku tym, oprócz konta bankowego o stopie procentowej równej 0, będzie występować jeden rodzaj akcji. Wypłata będzie dotyczyć europejskiej opcji call na 1 akcję z ceną wykonania równą początkowej cenie akcji i terminem wykonania na koniec 2 okresu. Celem przykładu jest prezentacja dwóch etapów poszukiwania strategii maksymalizującej.

Przyjmujemy następujące dane:
$W=2, N=7; \Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_7\}, I_0=\{\Omega\}, I_1=\{\{\omega_1,\omega_2\}\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\},\{\omega_6,\omega_7\}\}$,
$I_2=\{\{\omega_1\},\dots,\{\omega_7\}\}; K_0=K_1=K_2=1; A=1$. Upraszczamy notację $S(1)=S$.
$S_0=7, S_1^T=(12,12,6,6,6,3,3), S_2^T=(14,10,8,6,4,4,2)$. Zakładamy jednostajny rozkład prawdopobieństwa rzeczywistego.

Z 1-okresowego podmodelu dla $\langle 0,1\rangle$ otrzymujemy:

$$Q_0^T=\left(x,x,\tfrac{4}{3}-3x,\tfrac{4}{3}-3x,\tfrac{4}{3}-3x,2x-\tfrac{1}{3},2x-\tfrac{1}{3}\right), x\in\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{4}{9}\right)$$

W $t=1$ są 3 zdarzenia (1,1), (1,2), (1,3). Na podstawie trzech podmodeli dla $\langle 1,2\rangle$ otrzymujemy:

$Q^{1,1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T, Q^{1,2}=(y,1-2y,y)^T, y\in\left(0,\frac{1}{2}\right), Q^{1,3}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T$, stąd
$Q_1^T=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},y,1-2y,y,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), y\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$
$ClM^{1,1}=ClM^{1,3}=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^T\right\}, ClM^{1,2}=conv\left\{(0,1,0)^T,\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)^T\right\}$
W $t=0$: $M=\{Q=Q_0\cdot Q_1\}$, $ClM=conv\{Q(1),Q(2),Q(3)\}$, gdzie
$Q^T(1)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},0,\frac{5}{6},0,0,0\right)$, $Q^T(2)=\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{5}{12},0,\frac{5}{12},0,0\right)$,
$Q^T(3)=\left(\frac{2}{9},\frac{2}{9},0,0,0,\frac{5}{18},\frac{5}{18}\right)$

Zabezpieczenie będzie dotyczyć wypłaty $H=(S_2-S_0)^+$, więc $H^T=(7,3,1,0,0,0,0)$. Cena sprzedaży wypłaty wynosi zgodnie z (5):

$$\overline{H_0}=\max\left\{\tfrac{5}{6},\tfrac{5}{4},\tfrac{20}{9}\right\}=\tfrac{20}{9}.$$

Zakładamy, że zabezpieczając wypłatę, dysponujemy budżetem niższym od $\overline{H}_0$, niech wynosi on $v=2$. Problem (10) zawiera trzy zadania pomocnicze. Sprawdzamy dla kolejnych *j* warunek (11):

Dla $j=1$ $\quad\langle 0,1\rangle^7\cap\left\{\psi\in R^7:\frac{1}{12}(7\psi_1+3\psi_2)=2\right\}=O$.

Dla $j=2$ $\quad\langle 0,1\rangle^7\cap\left\{\psi\in R^7:\frac{1}{12}(7\psi_1+3\psi_2+5\psi_3)=2\right\}=O$.

Dla $j = 3$ $\quad \langle 0,1\rangle^7 \cap \left\{\psi \in R^7 : \frac{1}{9}(14\psi_1 + 6\psi_2) = 2\right\} \neq O.$

Zatem dla $j = 1,2$ pomocnicze zadania są sprzeczne. Rozwiązanie optymalne zadania dla $j = 3$ jest równe $\psi^{*T}(3) = \left(\frac{6}{7},1,1,1,1,1,1\right) = \psi^{*T}$. Zmodyfikowana wypłata $H^{*^T} = \left(H\psi^*\right)^T = (6,3,1,0,0,0,0)$. Z wniosku 3 wynika, że nie jest ona osiągalna, gdyż $\overline{H_0}^* = \max\left\{\frac{3}{4},\frac{7}{6},2\right\} = 2$. Należy więc wyznaczyć strategię nadosłony χ dla zmodyfikowanej wypłaty H^*.

Poszukiwanie strategii nadosłony rozpoczniemy od obliczenia cen sprzedaży dla zmodyfikowanej wypłaty w $t = 1$. Zgodnie z (7) dla kolejnych zdarzeń otrzymujemy:

$\overline{H^{*^{1,1}}} = \frac{9}{2}, \overline{H^{*^{1,2}}} = \max\left\{(0,1,0)(1,0,0)^T, \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)(1,0,0)^T\right\} = \frac{1}{2}, \overline{H^{*^{1,3}}} = 0$. Stąd $\overline{H_1}^{*T} = \left(\frac{9}{2},\frac{9}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)$.

Nierówności nadosłony (14), równania samofinansowania (1) i wartości początkowej (15) w rozważanym przykładzie mają postać:

$$\begin{cases} \chi_1(1)(S_2 - S_1) \geq H^* - \overline{H_1^*} \\ \chi_1(1)(S_2 - S_1) + \chi_0(1)(S_1 - S_0) \geq H^* - \overline{H_0^*} \\ \chi_0(0) + \chi_0(1)S_1 = \chi_1(0) + \chi_1(1)S_1 \\ \chi_0(0) + \chi_0(1)S_0 = \overline{H_0^*}. \end{cases}$$

Otrzymujemy jedno rozwiązanie:

$$\chi_1^i(1) = \begin{cases} \frac{9}{4} \text{ dla } i = 1,2 \\ \frac{1}{4} \text{ dla } i = 3,4,5 \\ 0 \text{ dla } i = 6,7 \end{cases}, \quad \chi_0(1) = \frac{1}{2},$$

$$\chi_1^i(0) = \begin{cases} -\frac{9}{2} \text{ dla } i = 1,2 \\ 0 \text{ dla } i = 3,4,5,6,7 \end{cases}, \quad \chi_0(0) = -\frac{3}{2}.$$

Uzyskana strategia nadosłony odnosi się do zmodyfikowanej wypłaty, która różni się od wypłaty opcji call (jest od niej mniejsza w 1. stanie). Jednak przy danym niskim budżecie, wyznaczona strategia maksymalizuje średni współczynnik sukcesu dla danej wypłaty.

Literatura

Dana R.-A., Jeanblanc M., 2003, *Financial Markets in Continous Time*, Springer, New York.

Dana R.-A., Jeanblanc-Picque M., 1998, *Marches financiers en temps continu*, Economica, Paris.

Follmer H., Leukert P., 1999, *Quantile Hedging*, „Finance and Stochastics", No. 3, s. 251-273.

Follmer H., Schied A., 2011, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter, Berlin.

Jakubowski J., 2006, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, Warszawa.

le Roy S., Werner J., 2000, *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Pliska S., 2005, *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, Warszawa.

Utkin J., 2013, *Optymalny zrandomizowany test na skończonym rynku zupełnym,* „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Wydziałowe UE w Katowicach", No. 154, s. 111-123.

A METHOD OF DETERMINATION OF GENERALIZED QUANTILE HEDGING STRATEGY IN FINITE INCOMPLETE MARKET

Summary: The paper concerns the hedging of the claim in a finite incomplete market when the initial ammount is not sufficient to cover the claim in all states. We use the two steps procedure. First, for the given claim we maximize the average success ratio dependent on the randomize test. Second, for the modified optimal claim with the obtained above test, we look for the optimal strategy.

In the first step, after discretization of the martingale probability functions set and the upper hedging prices, we reduce the maximization of the randomized test to some finite set of linear programming problems. We also deduce the replicability criterion for the optimal modified claim. The second step depends on the replicability of the optimal modified claim. If it is replicable, then the replicating strategy is the solution of the hedging problem. If not, we need to look for the strategy solving the system of superhedging inequalities. The superhedging conditions are formulated using the upper hedging prices due to the discretization of the model.

Keywords: incomplete market, discretization, quantile hedging.