

**Ewa Dziwok**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# **ZNACZENIE ZMIENNOŚCI IMPLIKOWANYCH STÓP FORWARD W PROCESIE SZACOWANIA KRZYWEJ DOCHODOWOŚCI**

## **Wstęp**

Szacowanie struktury terminowej na podstawie modeli parametrycznych jest procesem statycznym i nie niesie żadnych informacji o dynamice wyznaczonych stóp procentowych. Ponieważ samo kryterium jakości dopasowania nie daje podstaw do wskazania najlepszej metody szacowania struktury terminowej, więc alternatywą może się stać analiza zmian implikowanych stóp forward, które są powszechnie wykorzystywane w badaniu oczekiwań oraz ryzyka [3, s. 154-156]. Możliwość wykorzystania implikowanej stopy forward wynika ze zgodności modeli parametrycznych z dynamicznymi modelami rynkowymi (klasy HJM) [1]. Dzięki tej własności do opisu ewolucji stóp forward wystarcza znajomość przebiegu funkcji zmienności (dynamika chwilowej stopy forward jest w pełni określona przez strukturę zmienności).

W artykule analiza implikowanych stóp forward została przeprowadzona z wykorzystaniem zmienności mierzonej odchyleniem standardowym. Graficzny obraz zmienności w relacji do terminu wykonania nosi nazwę struktury terminowej zmienności implikowanej stopy forward. Analiza przebiegu funkcji pozwala określić, jak dany typ modelu oraz wybór kryterium dopasowania wpływa na zmienność badanej stopy w zależności od terminu wykonania i czy poziom ten odzwierciedla warunki rynkowe.

## **1. Implikowana stopa forward jako wyznacznik oczekiwań rynkowych**

Przeprowadzona procedura szacowania krzywej doprowadziła do wyznaczenia trzech ocen wektora parametrów w zależności od przyjętego w chwili  $t$

kryterium dopasowania\*. Ponieważ badanie objęło dwa modele parametryczne, więc otrzymano sześć wektorów parametrów na każdy dzień badawczy dla każdego typu instrumentów. Aby wyniki były porównywalne, zakres czasowy przyjęty do badań obejmuje lata 2007-2009, dla których są dostępne dane dla czterech instrumentów: WIBOR, FRA 3M, FRA 6M oraz SWAP.

Niech  $\tau$  będzie dowolnym dniem, dla którego są pozyskane dane służące do szacowania krzywej. Na podstawie wyznaczonych parametrów oraz przyjętych kryteriów dopasowania szacowanej krzywej, dla dowolnego momentu  $\tau$  było możliwe oszacowanie sześciu implikowanych struktur forward  $f_\tau(s, s + \Delta s)$  o ustalonym z góry tenorze (długości)  $\Delta s > 0$  oraz momentu realizacji transakcji forward w chwili  $s$ .

Ze względu na fakt, że celem szacowania krzywej jest wyodrębnienie oczekiwań rynkowych, przedmiotem analizy są często stopy, które – z punktu widzenia banku centralnego – są kluczowe dla prowadzonej polityki pieniężnej. Ponieważ od stycznia 2005 roku jedną z oficjalnych stóp NBP jest minimalna rentowność 7-dniowego bonu pieniężnego emitowanego przez NBP, do analizy wybrano strukturę implikowanej 7-dniowej stopy forward dla wybranych terminów rozpoczęcia transakcji  $s$ .

Posługując się wzorem na implikowaną stopę forward dla  $t = s + \Delta s$ :

$$: f_\tau(s, s + \Delta s) = \frac{1}{\Delta s} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta(\tau, s + \Delta s)} \text{ oraz zakładając, że długość transakcji}$$

(tenor) wynosi  $\Delta s = \frac{7}{365}$ , otrzymano wzór na 7-dniową implikowaną stopę

forward:

$$f_\tau\left(s, s + \frac{7}{365}\right) = \frac{365}{7} \cdot \ln \frac{\delta(\tau, s)}{\delta\left(\tau, s + \frac{7}{365}\right)}, \quad (1)$$

gdzie:

$\delta(\tau, s)$  – czynnik dyskontowy,

$f_\tau\left(s, s + \frac{7}{365}\right)$  – implikowana 7-dniowa stopa forward,

$\tau$  – moment wyznaczania implikowanej stopy forward,

$s$  – moment rozpoczęcia transakcji forward.

---

\* Przyjęto szacowanie krzywej metodą Nelsona-Siegela oraz Svenssona, przy czym dla każdego z nich przyjęto trzy metody dopasowania krzywej do danych rzeczywistych, opartych na minimalizacji sumy kwadratów różnic: cen, rentowności oraz cen korygowanych o odwrotność duration.

Choć parametry modelu pozwalają oszacować poziom implikowanej stopy w dowolnym momencie w przyszłości  $s$ , na potrzeby analizy wyznaczono siedemnaście implikowanych tygodniowych stóp forward (dla każdego z trzech kryteriów dopasowania, dla obu modeli, w chwili  $\tau$ , w której są dostępne dane). Za moment realizacji  $s$  implikowanych stóp forward przyjęto kolejne dni w tygodniowych interwałach. W efekcie otrzymany ciąg ma postać:

$$\left\{ f_{\tau} \left( s, s + \frac{7}{365} \right) \right\}_{s=\frac{7}{365}, \frac{14}{365}, \dots, \frac{119}{365}}. \quad (2)$$

Przyjmując, że  $f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365})$ , gdzie  $s + \frac{7}{365}$  wyraża zapadalność tygodniowej stopy forward realizowanej w dniu  $s$  i wyznaczonej w momencie  $\tau$ , ciąg dany wzorem (2) można zapisać za pomocą wektora  $\mathbf{f}_{\tau}$ :

$$\mathbf{f}_{\tau} \left( s, s + \frac{7}{365} \right) = \left[ f_{\tau} \left( \frac{7}{365}; \frac{14}{365} \right); f_{\tau} \left( \frac{14}{365}; \frac{21}{365} \right); \dots; f_{\tau} \left( \frac{119}{365}; \frac{126}{365} \right) \right]. \quad (3)$$

Wektor ten odzwierciedla oszacowane w momencie  $\tau$  wartości tygodniowych implikowanych stóp forward, które miałyby obowiązywać za tydzień, dwa, aż do siedemnastego tygodnia. Należy więc podkreślić, że są to stopy o tej samej długości (tenorze), ale których realizacja przebiega w różnych momentach w przyszłości.

## 2. Badanie dynamiki implikowanych stóp forward

Aby badać dynamikę każdego z elementów ciągu, należy zdefiniować zmianę implikowanej stopy forward w kolejnych momentach. Jeżeli przyjmie się, że dane można pozyskać w czasie dyskretnym (w kolejnych dniach okresu 2007-2009) oznaczonych jako  $\tau = \{1, 2, \dots, 504\}$ , wówczas dzienna zmiana implikowanej stopy forward  $\Delta f_{\tau}(s, s + \frac{7}{365})$  ma postać logarytmicznej stopy zwrotu:

$$\Delta f_{\tau} \left( s, s + \frac{7}{365} \right) = \ln \frac{f_{\tau} \left( s, s + \frac{7}{365} \right)}{f_{\tau-1} \left( s, s + \frac{7}{365} \right)}. \quad (4)$$

Zbiór dziennych przyrostów implikowanej stopy forward można także zapisać w postaci wektorowej:

$$\Delta \mathbf{f}_{\tau} \left( s, s + \frac{7}{365} \right) = \left[ \Delta f_{\tau} \left( \frac{7}{365}; \frac{14}{365} \right); \Delta f_{\tau} \left( \frac{14}{365}; \frac{21}{365} \right); \dots; \Delta f_{\tau} \left( \frac{119}{365}; \frac{126}{365} \right) \right]. \quad (5)$$

Ponieważ charakterystyką opisującą dynamikę przyrostów implikowanej stopy forward (elementów wektora  $\Delta f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365})$ , gdzie  $s = \frac{7}{365}; \frac{14}{365}; \dots; \frac{119}{365}$ ) jest zmienność, więc za jej miarę przyjęto odchylenie standardowe mierzone w wartościach rocznych (odzwierciedlających liczbę dni transakcyjnych)\*, dane wzorem:

$$\sigma(s; s + \frac{7}{365}) = \sqrt{\frac{250}{503} \sum_{\tau=2}^{504} \left( \Delta f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365}) - \overline{\Delta f_{\tau}}(s; s + \frac{7}{365}) \right)^2}, \quad (6)$$

gdzie:

$\sigma(s; s + \frac{7}{365})$  – odchylenie standardowe,

$\Delta f_{\tau}(s; s + \frac{7}{365})$  – dzienna zmiana implikowanej stopy forward dana wzorem (4),

$\overline{\Delta f_{\tau}}(s; s + \frac{7}{365})$  – średnia dzienna zmiana implikowanej stopy forward.

Strukturę terminową zmienności stóp procentowych, nazywaną także funkcją implikowanej zmienności, można zdefiniować jako relację pomiędzy zmiennością stóp  $\sigma(s; s + \frac{7}{365})$  a ich zapadalnością w dniu  $s + \frac{7}{365}$  i zapisać w postaci:

$$\left\{ \sigma(s, s + \frac{7}{365}) \right\}_{s = \frac{7}{365}, \frac{14}{365}, \dots, \frac{119}{365}}. \quad (7)$$

Istnieje wiele możliwych funkcji pozwalających oszacować strukturę terminową zmienności implikowanych logarytmicznych stóp forward [5, s. 672-673]. Najpopularniejsza z nich charakteryzuje się przebiegiem rosnącym w krótkim terminie (do 1 roku), a następnie po osiągnięciu maksimum – przebiegiem malejącym wraz ze wzrostem  $s$  (kształt zbliżony do elementarnej formy charakterystycznej dla stóp procentowych – krzywej z garbem). Nierzadko występuje również typowy, malejący przebieg funkcji.

Uzasadnienie takiego przebiegu wynika z obserwowanych rynkowych zmienności stóp forward wyznaczanych z zastosowaniem instrumentów pochodnych na stopę procentową. Rebonato [4] twierdzi, że kształt z garbem jest charakterystyczny dla rynków stabilnych, natomiast malejący dla okresów zaburzeń\*\*. Ponieważ stopy krótkoterminowe są determinowane przez politykę pieniężną, więc ich zmienność jest ściśle uzależniona od stopnia przewidywalności decyzji władz monetarnych. W okresach stabilności finansowej banki centralne próbują sygnalizować (poprzez informacje słowne) potencjalne ruchy stóp, przez

\* Roczna zmienność jest iloczynem dziennego odchylenia standardowego oraz pierwiastka z przyjętej liczby dni (transakcyjnych) w roku. Stosuje się zarówno liczbę dni równą 250, jak i 260 oraz 365. Na potrzeby artykułu przyjęto liczbę 250. Za: [2, s. 185].

\*\* Szeroki opis funkcji zmienności można znaleźć w: [4, s. 153-172].

co niepewność, a zarazem i zmienność  $\sigma(s; s + \frac{7}{365})$  jest niewielka. Rośnie ona znacząco w przypadku wzrostu ryzyka, kiedy uczestnicy rynkowi nie są pewni potencjalnego ruchu banku centralnego. Jeśli jednak polityka pieniężna nie jest wystarczająco przejrzysta i nie ma konsensusu co do kolejnych decyzji, można oczekiwać wysokiej zmienności dla krótkich zapadalności stóp forward.

Wraz ze wzrostem  $s$  funkcja zmienności staje się w coraz większym stopniu obrazem oczekiwań inflacyjnych i w przypadku rynków stabilnych nie ulega zbyt dużym wahaniom. Zmienność może być wyższa w przypadku krajów mających problemy z utrzymaniem inflacji pod kontrolą, dla których niepewność dotycząca poziomu tego wskaźnika w przyszłości jest znaczna. Największy poziom zmienności odnotowuje się w okresie od 6-miesięcy do jednego roku, co jest wynikiem zróżnicowanych oczekiwań uczestników rynkowych dotyczących decyzji monetarnych. Wraz z wydłużaniem się okresu pomiędzy wyznaczeniem stopy forward a jego realizacją ( $s - \tau$ ) rośnie niepewność dotycząca przyszłych stóp, która z czasem ponownie maleje.

### 3. Analiza zmienności stóp forward w latach 2007-2009

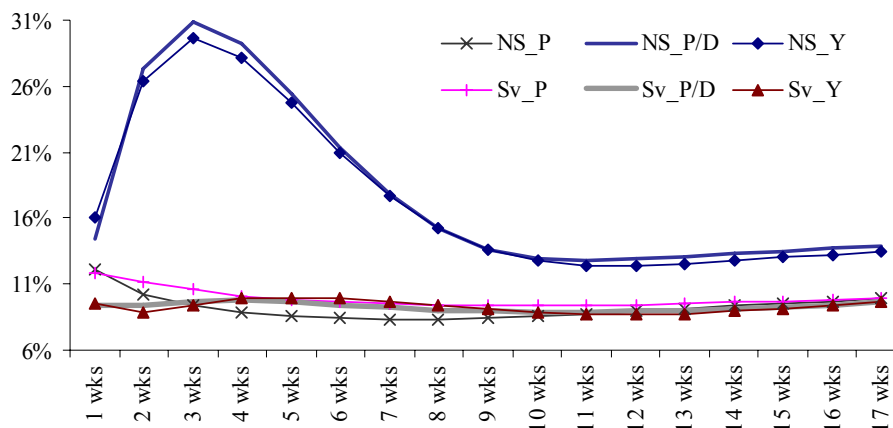
Celem analizy jest zbadanie, czy istnieją różnice w wykresie zmienności w zależności od przyjętego modelu estymacji krzywej oraz kryterium dopasowania funkcji do danych rzeczywistych. Współczynniki zmienności zostały wyznaczone dla każdego z elementów wektora  $\Delta \mathbf{f}_\tau(s; s + \frac{7}{365})$ , każdego typu modelu oraz kryterium dopasowania krzywej do danych rzeczywistych.

Przyjęto następujące oznaczenia:

- NS\_P – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Nelsona-Siegela z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen,
- NS\_P/D – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Nelsona-Siegela z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen korygowanych o odwrotność duration,
- NS\_Y – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Nelsona-Siegela z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic rentowności,
- Sv\_P – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Svenssona z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen,

Sv\_P/D – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Svenssona z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic cen korygowanych o odwrotność duration,

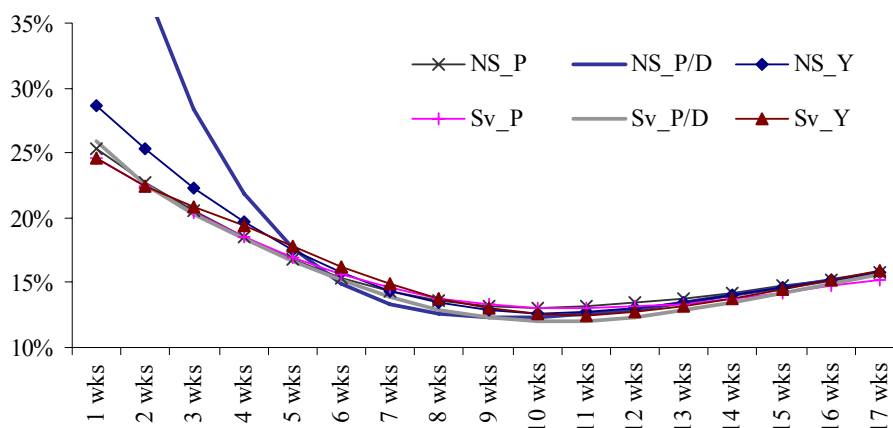
Sv\_Y – poziom zmienności implikowanych stóp forward wyznaczonych na podstawie modelu Nelsona-Siegelera z zastosowaniem kryterium minimalizacji kwadratu różnic rentowności.



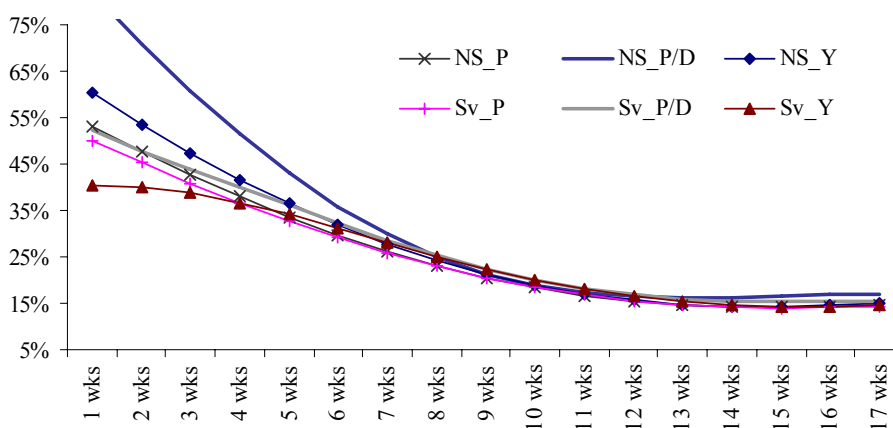
Rys. 1. Funkcja rocznej zmienności implikowanej dla stóp WIBOR

Najbardziej zróżnicowane wyniki – z punktu widzenia interpretacji funkcji implikowanej zmienności – zostały otrzymane z zastosowaniem kwotowań WIBOR. W przypadku modelu Nelsona-Siegelera zarówno dla kryterium minimalizacji kwadratów odchyłeń rentowności, jak i cen ważonych odwrotnością duration wykres tworzy charakterystyczne wzniesienie. Jest to efekt słabej elastyczności modelu Nelsona-Siegelera, którego zastosowanie nie zapewnia wystarczającego dopasowania dla zmiennych stóp krótkoterminowych, co przekłada się na dużą zmienność stóp forward. Ponieważ w latach 2007-2009 rynek lokat był bardzo zmienny, więc cztery parametry modelu Nelsona-Siegelera nie były wystarczające do opisu zjawisk zachodzących na rynku. Zupełnie inny przebieg ma funkcja zmienności implikowanych stóp forward oszacowanych na podstawie modelu Svenssona – okazuje się, że w horyzoncie 4-miesięcznym rynek prognozuje roczną zmienność stopy tygodniowej w przedziale 8-10%.

Należy podkreślić, że dla stóp WIBOR modele Nelsona-Siegelera generują znacznie wyższą zmienność implikowanych stóp forward niż w przypadku modelu Svenssona. Można przyjąć, że analiza wykresu implikowanej zmienności wskazuje ten ostatni jako model do szacowania stóp krótkoterminowych.



Rys. 2. Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 3M

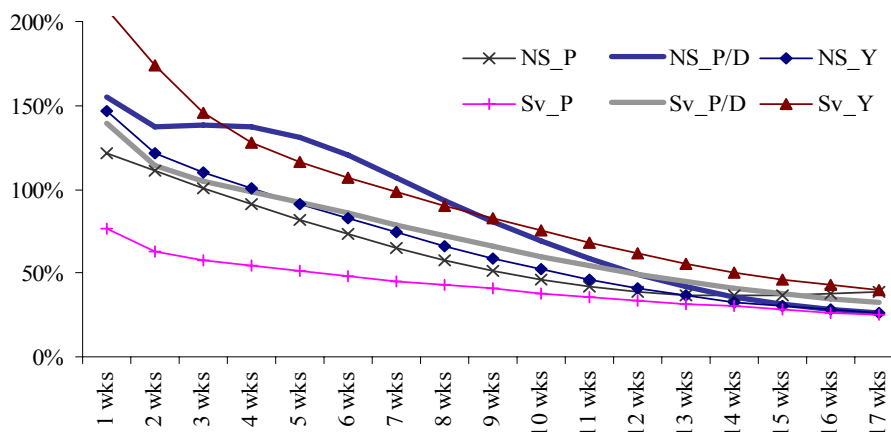


Rys. 3. Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp FRA 6M

Funkcje implikowanej zmienności wyznaczonej dla 3-miesięcznych stóp FRA 3M oraz 6-miesięcznych FRA 6M mają podobny przebieg, niezależnie od typu modelu oraz przyjętego kryterium dopasowania. Z podobnych przyczyn, jak to miało miejsce w przypadku analizy stóp WIBOR, modele Nelsona-Siegela generują wyższą zmienność implikowanej krótkoterminowej stopy forward, co jest konsekwencją braku możliwości poprawnego szacowania segmentu stóp krótkoterminowych (brak danych rzeczywistych o krótkiej zapadalności i konieczność ekstrapolacji).

Analiza poziomu implikowanej zmienności 7-dniowych stóp forward na podstawie stóp FRA pokazuje przede wszystkim punkty największej stabilności dla tego typu instrumentów. W przypadku FRA 3M krzywe zmienności stabili-

zują się od około 5 tygodnia (czas pomiędzy zawarciem a rozliczeniem transakcji forward), by osiągać minimum na przedziale 8-11 tygodni, natomiast dla FRA 6M podobna zmienność (niezależnie od doboru modelu i funkcji celu) jest osiągana od 8 tygodnia, a stabilizacja na przedziale 12-14 tygodni. Oznacza to, że w okresie 2007-2009 zmienność implikowanych 7-dniowych stóp forward była szacowana na poziomie około 15% rocznie.



Rys. 4. Poziom rocznej zmienności implikowanej dla stóp SWAP

W przypadku kwotowań swap zmienność implikowanej 7-dniowej stopy forward dla krótkiego okresu realizacji jest bardzo wysoka, determinowana zmiennością stopy POLONIA. Brak możliwości poprawnego szacowania krzywej w segmencie do 1 roku (co potwierdziły także wyniki jakości dopasowania w poprzednim podrozdziale) każe z dużą ostrożnością rozważać możliwości wykorzystania tego typu danych do prognozowania stóp krótkoterminowych.

## Zakończenie

Analiza modeli krzywych dochodowości ze względu na przebieg funkcji implikowanej zmienności 7-dniowej stopy forward pozwala na sformułowanie poniższych wniosków:

1. Zastosowanie kryterium szacowania krzywej opartego na minimalizacji kwadratów odchyłeń cen pozwala otrzymać zbliżone wyniki do tych otrzymanych w wyniku zastosowania kryterium opartego na minimalizacji kwadratów odchyłeń rentowności.



2. Wszystkie modele, niezależnie od danych wykorzystywanych w analizie, na porównywalnym poziomie 15% szacowały roczną zmienność implikowanej 7-dniowej stopy forward z terminem realizacji dłuższym niż 12-14 tygodni, co dowodzi znaczących różnic jedynie dla horyzontu krótkiego, nieprzekraczającego kilkunastu tygodni.
3. Im krótszy termin realizacji, tym bardziej zróżnicowane są wyniki implikowanej zmienności. Bardzo wysoka zmienność implikowanej 7-dniowej stopy forward może być efektem występującego w latach 2007-2009 kryzysu finansowego i spadku zaufania wśród uczestników rynkowych.
4. Porównanie obu modeli parametrycznych pozwala wnioskować, że w przypadku szacowania krótkoterminowych stóp forward wiarygodniejszy poziom zmienności jest generowany przez model Svenssona. Oparty na czterech parametrach model Nelsona-Siegela jest zbyt mało elastyczny, by dobrze mógł szacować segment stóp krótkoterminowych.
5. Wykres zmienności obrazuje skalę błędu dopasowania przełożonego poprzez stopy forward na zmienność („dziedziczy” tę własność). Stąd też dla instrumentu, który generuje największy błąd szacowania, notuje się największą zmienność.

## Literatura

1. Bjork T., *A Geometric View of Interest Rate Theory*, „Working Paper Series in Economic and Finance” 2000, No. 419, Stockholm School of Economics.
2. Fabozzi F.J., Mann S.V., Choudhry M., *Measuring and Controlling Interest Rate and Credit Risk*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey 2003.
3. Meucci A., *Risk and Asset Allocation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2005.
4. Rebonato R., *Modern Pricing of Interest-rate Derivatives*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2002.
5. Rebonato R., *Volatility and Correlations 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester 2004.

## THE ROLE OF IMPLIED FORWARD RATE IN YIELD CURVE MODELLING

### Summary

The aim of the paper is twofold – to construct the implied 7-days forward rate and then to utilize its volatility as a indicator both the situation on asset's market and the flexibility of the yield curve construction.

The research applies two parametric models: Nelson-Siegel with four and Svensson one with six parameters. The yield curve was created for WIBOR, FRA and swaps rate which let compare the situation on these markets during and after the financial crisis 2007-2009.