

Anna Janiga-Ćmiel

## WYZNACZENIE OKRESU RÓWNOWAGI I STABILIZACJI DŁUGOOKRESOWEJ

### Wprowadzenie

W rozwoju każdego zjawiska niezależnie od tego, jak rozwój ten jest ukształtowany przez trend i wahania, można wyznaczyć okres równowagi istotny dla krótkiego lub długiego okresu i okres ustabilizowanej zależności, również istotny dla krótkiego lub długiego okresu.

W okresie równowagi są zachowane parametry rozkładu charakteryzujące wartość oczekiwaną, wariancję i asymetrię, ponieważ w okresie tym ma się do czynienia z niezmienniczością rozkładu badanych zmiennych. Z kolei okres ustabilizowanej zależności dotyczy kolejnych lat, w których nie obserwuje się istotnych zmian w charakterze, sile i kierunku zależności. Długookresowa równowaga dotyczy okresu, w którym istnieją mechanizmy samoregulujące pozwalające osiągnąć stan oczekiwany. Jedną z metod wyznaczania przedmiotowych podokresów opiera się na analizie przyrostów badanych zmiennych.

Zarówno w przypadku gospodarki Polski, jak i gospodarek państw Unii Europejskiej zostanie wyznaczony najdłuższy możliwy okres ustabilizowanego rozwoju, czyli taki, w którym główne wskaźniki nie wykażą istotnych zmian. Taki okres jest potrzebny w celu dokonania porównania rozwoju gospodarki w Polsce i w krajach Unii Europejskiej.

Rozwój gospodarczy można scharakteryzować w dwojaki sposób. Jednym z nich jest analiza wielowymiarowa wybranego, możliwie najliczniejszego zbioru czynników. Mogą być one stymulantami lub destymulantami rozwoju gospodarczego. Podstawą drugiego ze sposobów jest zmienna charakteryzująca PKB ujmująca w pewnym sensie w sposób syntetyczny czynniki wykorzystane w pierwszym sposobie. W niniejszym artykule posłużono się drugą metodą wykorzystującą PKB. Ponadto analizie poddano gospodarki następujących krajów: Polski, Francji, Wielkiej Brytanii, Belgii, Holandii. Analizę wykonano na podstawie danych obejmujących lata 1949-2006 zaczerpniętych z Roczników Statystycznych i sprowadzonych uprzednio do postaci wzajemnie porównywalnych.

## 1. Wyznaczenie macierzy mnożników długookresowych

Badanie podobieństwa stanu gospodarki w różnych okresach oparto na macierzy wartości mnożników charakteryzujących wariacje i kowariancje stanów rozwoju gospodarek w poszczególnych krajach. Liczba obserwacji wyjściowego szeregu powinna obejmować długi okres. Wymiar szeregu czasowego odpowiada liczbie porównywanych krajów. W dalszej analizie przez  $m$  oznaczono ilość badanych krajów Unii Europejskiej z wyłączeniem Polski. Macierz danych empirycznych szeregu czasowego wielowymiarowego oznaczono przez  $W$ . Macierz  $W$  jest wielowymiarowym szeregiem czasowym jednostkowego PKB w rozpatrywanych krajach. Macierz  $W$  przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Wskaźniki poziomu jednostkowego PKB Polski i krajów UE

t	Lata	Polska	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
1	2	3	4	5	6	7
1	1958	0,0048	0,0099	0,0420	0,0056	0,0134
2	1959	0,0049	0,0157	0,0363	0,0033	0,0135
3	1960	0,0049	0,0185	0,0405	0,0041	0,0143
4	1961	0,0050	0,0208	0,0451	0,0048	0,0180
5	1962	0,0054	0,0160	0,0501	0,0082	0,0184
6	1963	0,0054	0,0187	0,0555	0,0085	0,0190
7	1964	0,0054	0,0291	0,0614	0,0082	0,0190
8	1965	0,0055	0,0327	0,0597	0,0115	0,0190
9	1966	0,0055	0,0378	0,0598	0,0122	0,0200
10	1967	0,0053	0,0464	0,0706	0,0178	0,0222
11	1968	0,0053	0,0487	0,0734	0,0213	0,0257
12	1969	0,0054	0,0503	0,0763	0,0236	0,0284
13	1970	0,0056	0,0525	0,0809	0,0255	0,0301
14	1971	0,0063	0,0417	0,0636	0,0206	0,0325
15	1972	0,0098	0,0573	0,0938	0,0220	0,0341
16	1973	0,0100	0,0607	0,1180	0,0234	0,0363
17	1974	0,0102	0,0642	0,1273	0,0248	0,0370
18	1975	0,0103	0,0751	0,1346	0,0261	0,0374
19	1976	0,0106	0,0781	0,1386	0,0324	0,0483
20	1977	0,0106	0,0798	0,1416	0,0365	0,0532
21	1978	0,0109	0,0814	0,1443	0,0406	0,0579
22	1979	0,0111	0,0838	0,1474	0,0461	0,0681
23	1980	0,0107	0,0858	0,1535	0,0505	0,0783
24	1981	0,0107	0,0887	0,1622	0,0555	0,0866
25	1982	0,0094	0,0921	0,1644	0,0566	0,0966
26	1983	0,0135	0,0956	0,1710	0,0625	0,1068
27	1984	0,0137	0,1000	0,1833	0,0682	0,1134

cd. tabeli 1

1	2	3	4	5	6	7
28	1985	0,0140	0,1050	0,1890	0,0732	0,1205
29	1986	0,0139	0,1098	0,1949	0,0787	0,1283
30	1987	0,0143	0,1151	0,2036	0,0842	0,1287
31	1988	0,0222	0,1221	0,2257	0,0877	0,1398
32	1989	0,0198	0,1279	0,2163	0,0915	0,1483
33	1990	0,0182	0,1324	0,2400	0,0933	0,1636
34	1991	0,0189	0,1494	0,2315	0,0975	0,1922
35	1992	0,0186	0,1436	0,2420	0,1149	0,1809
36	1993	0,0189	0,1470	0,2185	0,1052	0,1878
37	1994	0,0369	0,1655	0,2486	0,1049	0,2225
38	1995	0,0380	0,1847	0,2556	0,1217	0,2342
39	1996	0,0391	0,1870	0,2705	0,1181	0,2336
40	1997	0,0403	0,1900	0,2772	0,1369	0,2370
41	1998	0,0421	0,1929	0,2838	0,1286	0,2384
42	1999	0,0430	0,1965	0,2904	0,1296	0,2368
43	2000	0,0529	0,2008	0,2918	0,1478	0,2360
44	2001	0,0683	0,2055	0,3128	0,1504	0,2346
45	2002	0,0690	0,2101	0,2883	0,1734	0,2343
46	2003	0,0809	0,2157	0,2881	0,1691	0,2345
47	2004	0,0974	0,2217	0,3052	0,1757	0,2362
48	2005	0,1090	0,2266	0,3090	0,1983	0,2390
49	2006	0,1303	0,2372	0,3156	0,2060	0,2429

Na podstawie macierzy  $W$  wyznaczono macierz teoretyczną przybliżonych wartości mnożników długookresowych [5]. Macierz mnożników oznaczono przez  $\pi$ , przy czym:

$$\pi = \frac{1}{p} W^T W \quad (1)$$

gdzie  $p$  oznacza ilość okresów, jakich dotyczą szeregi czasowe. Jest to macierz w postaci:

$$\pi = \begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & S_{02} & S_{03} & S_{04} \\ S_{10} & \ddots & & & \\ S_{20} & & \pi_{mm} & & \\ S_{30} & & & \ddots & \\ S_{40} & & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{00} & \pi_0^T \\ \pi_0 & \pi_{mm} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dodatkowo przez  $\pi_0$  oznaczono wektor:

$$\pi_0 = \begin{bmatrix} S_{10} \\ S_{20} \\ S_{30} \\ S_{40} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Elementami macierzy są iloczyny skalarne w postaci:

$$s_{ij} = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p w_{it}^T w_{jt} \quad (4)$$

Dla  $i, j = 0, \dots, m$ , przy czym 0 oznacza wektor wskaźnika rozwoju gospodarczego w Polsce, a indeksy  $j = 1, \dots, m$  dotyczą wskaźników rozwoju gospodarczego w rozpatrywanych krajach. Przez  $B$  oznaczono podmacierz macierzy  $W$  dotyczącą krajów innych niż Polska. Przez  $\pi_{mm}$  oznaczono macierz powstałą z macierzy  $\pi$  przez skreślenie pierwszego wiersza i pierwszej kolumny.

## 2. Wyznaczenie macierzy wag

Poszczególne wariancje i kowariancje zawarte w macierzy  $\pi$  można odpowiednio zrangować przez przyporządkowanie im macierzy wag. Każda z wag będzie ilustrowała relację między stanem gospodarki w kraju  $i$  oraz stanem gospodarki w kraju  $j$ . Wyznaczoną macierz wag oznaczono przez  $K$ . Macierze  $K$  oraz  $B$  mają ten sam wymiar, tzn. mają po  $p$  wierszy i  $m$  kolumn.

Macierz wag [5] jest zdefiniowana następująco:

$$K = S_{00} (B \pi_{mm} B^T)^{-1} B \quad (5)$$

Jest tu rozpatrywany model jednorównaniowy, więc w powyższej definicji  $S_{00}$  jest macierzą jednoelementową określoną wzorem:

$$S_{00} = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p w_{0t}^T w_{0t} \quad (6)$$

Wartość  $S_{00}$  to czynnik stanowiący charakterystykę rozpatrywanego rozwoju gospodarczego w Polsce.

Uwzględniając przedstawione oznaczenia, otrzymano macierz struktury zrównoważonego rozwoju, która ma postać:

$$S = B \otimes K \quad (7)$$

Przedstawiony iloczyn  $\otimes$  macierzy  $B$  oraz  $K$  jest rozumiany jako macierz iloczynów skalarnych odpowiednich wektorów kolumn. Oznaczając elementy macierzy  $B$  przez  $[w_{ij}]$ , macierzy  $K$  przez  $[k_{ij}]$ , buduje się macierz  $S$  elementów w postaci:

$$s_{ij} = w_{ij} \cdot k_{ij} \quad (8)$$

Macierze  $B$  i  $K$  są jednakowych wymiarów i takie same wymiary ma macierz  $S$ , która jest macierzą iloczynów elementów na tych samych pozycjach w macierzach  $B$  i  $K$ .

Analiza macierzy  $S$  pozwala na wykrycie kolejnych podokresów z przedziału  $p$  okresowego, w którym współczynnik korelacji wyważonych kolumn PKB będzie najwyższy. Maksymalnej długości przedział wyznaczony w ten sposób będzie okresem równowagi i stałej zależności długookresowej w przedziale danych historycznych. Przedstawiona wyżej macierz  $S$  stanowi punkt wyjścia do wyznaczenia dalszych macierzy charakteryzujących relację między dynamiką rozwoju gospodarczego w poszczególnych państwach. Macierze te przedstawiają zasadniczą charakterystykę wielowymiarowego rozwoju i są oznaczone przez  $E$  i  $F$ . Macierz  $F$  dotyczy rozwoju gospodarczego w wybranych krajach, macierz  $E$  przedstawia wyważone różnice rozwoju gospodarczego w Polsce i w innych krajach Unii Europejskiej uwzględnionych łącznie. Macierz  $F$  jest wyznaczona zgodnie ze wzorem:

$$F = \frac{1}{p} (B \otimes K)^T (B \otimes K) = \frac{1}{p} S^T S \quad (9)$$

Macierz  $E$  wyznaczono według wzoru:

$$E = F - \pi_0 S_{00}^{-1} \pi_0^T \quad (10)$$

Macierze  $E$  i  $F$  są macierzami kwadratowymi o wymiarze  $m \times m$ , gdzie  $m$  to ilość krajów, z którymi porównuje się rozwój gospodarczy w Polsce.

Dla macierzy  $F$ ,  $E$  wyznacza się wartości własne. O zrównoważonym rozwoju zjawiska w porównywanych zbiorowościach można mówić wtedy, gdy macierze  $E$  i  $F$  (zgodnie z [2]) są jednakowe lub nie wykazują istotnej statystycznie różnicy. Ponadto jeśli w uporządkowanych ciągach wartości własnych stwierdza się różnice i dla kolejnych wartości własnych te różnice będą coraz to niższe, to ma się do czynienia ze zjawiskiem, które w określonych zbiorowościach dąży do równowagi. Natomiast jeżeli przyrosty względne kolejnych wartości własnych są coraz to większe, oznacza to, że zjawisko w badanych zbiorowościach nigdy nie osiągnie wzajemnej równowagi. Minimalny okres równowagi w zakresie danych historycznych można wyznaczyć jako:

$$t_{\min} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot p \quad (11)$$

gdzie mnożnik jest iloczynem wartości własnych  $\lambda_i$  macierzy  $E$ . Liczba wartości własnych odpowiada liczebności grupy krajów, z którymi łącznie porównuje się rozwój gospodarczy Polski.

### 3. Wyznaczenie macierzy struktury zrównoważonego rozwoju

Zgodnie z rozważaniami teoretycznymi analizę rozpoczyna się od wyznaczenia macierzy mnożników długookresowych  $\pi$ :

Tabela 2

Macierz mnożników długookresowych  $\pi$ 

	Polska	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
Polska	0,00146	0,00435	0,00632	0,00328	0,00482
Francja	0,00435	0,01613	0,02443	0,01153	0,01807
Wielka Brytania	0,00632	0,02443	0,03752	0,01727	0,02725
Holandia	0,00328	0,01153	0,01727	0,00844	0,01302
Belgia	0,00482	0,01807	0,02725	0,01302	0,02068

Na podstawie analizy otrzymanych mnożników można stwierdzić, że w Polsce słonność do długookresowej równowagi była najniższa, natomiast w krajach Unii Europejskiej znacząco wyższa.

W tabelach 3 i 4 przedstawiono charakterystykę podążania poszczególnych gospodarek do stanu równowagi. Widać, że w okresie ostatnich piętnastu lat wskaźniki te są odpowiednio niższe dla wybranych krajów Unii Europejskiej z wyjątkiem Holandii, co oznacza, że dla tych krajów istotne znaczenie ma równowaga rozwoju gospodarczego w okresie całego rozpatrywanego pięćdziesięciolecia. Wskaźnik dla Polski dla okresu pięćdziesięciu lat wynosi 7,22%, a dla ostatnich piętnastu lat wzrasta do 13,43%, co oznacza istotność równowagi w okresie piętnastu ostatnich lat.

Tabela 3

Udział mnożnika dla rozpatrywanego okresu

Kraje	Udział mnożnika
Polska	7,22%
Francja	21,48%
Wielka Brytania	31,24%
Holandia	16,21%
Belgia	23,85%

Spośród badanych krajów najwyższą skłonność do długookresowej równowagi wykazuje Wielka Brytania w skali 31,24% całkowitej zmienności w rozwoju gospodarki. Belgia i Francja charakteryzowały się podobnym poziomem, ponad 20%, Holandia 16%, Polska 7%. Wynik ten otrzymano z uwzględnieniem czterdziestu dziewięciu lat rozwoju gospodarczego tych krajów. Powtarzając tę samą analizę dla ostatnich piętnastu lat rozpatrywanego okresu, można stwierdzić istotne zmiany w dążeniu do równowagi:

Tabela 4

Udział mnożnika dla ostatnich piętnastu lat

Kraje	Udział mnożnika
Polska	13,43%
Francja	25,44%
Wielka Brytania	35,33%
Holandia	20,12%
Belgia	25,67%

Widać, że dążność do równowagi rozwoju gospodarczego w krótszym okresie jest wyższa, a spośród badanych krajów najwyższy wzrost notuje Polska. W celu dalszego i pogłębionego porównania rozwoju gospodarczego Polski i państw Unii Europejskiej wyznaczono macierz  $F$  zgodnie ze wzorem:

$$F = \frac{1}{p} (W \otimes K)^T (W \otimes K) = \frac{1}{p} S^T S \quad (12)$$

Jest to macierz w postaci:

Tabela 5

Mnożniki zrównoważonego rozwoju w UE

	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
Francja	2,9	-1,9	-0,7	-0,2
Wielka Brytania	-1,9	1,3	0,5	0,1
Holandia	-0,7	0,5	0,2	0,1
Belgia	-0,2	0,1	0,1	0

Macierz ta ilustruje mnożniki zrównoważonego rozwoju gospodarki w państwach Unii Europejskiej. W dalszej kolejności wyznaczono macierz  $E$  zgodnie ze wzorem:

$$E = F - \pi_0 S_{00}^{-1} \pi_0^T \quad (13)$$

Macierz  $E$  przedstawia mnożniki zrównoważonego rozwoju gospodarki z wyłączeniem wpływu Polski na rozwój gospodarki w tych krajach i odwrotnie, otrzymując tym samym macierz w postaci:

Tabela 6

Mnożniki zrównoważonego rozwoju gospodarczego krajów UE z wyłączeniem Polski

	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
Francja	2,92	-1,93	-0,739	-0,239
Wielka Brytania	-1,93	1,291	0,443	0,125
Holandia	-0,739	0,443	0,2	0,045
Belgia	-0,239	0,125	0,045	0,005

Jednak dla nas interesujący jest iloczyn wartości własnych jednej macierzy i drugiej; iloczyn wartości własnych jest równy wartości wyznacznika odpowiedniej macierzy:

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_4 = \det F = 0,00001708 \quad (14)$$

Natomiast dla macierzy  $E$  otrzymano:

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_4 = \det E = 0,00010795 \quad (15)$$

Przedstawione iloczyny wartości własnych nie mają zasadniczo interpretacji ekonomicznej. Interpretacji podlega jedynie ich zmiana. Przedstawione wartości wyznaczników spełniają następujący związek:

$$\det E = 6,3205 \cdot \det F \quad (16)$$

Oznacza to, że wyznacznik macierzy, w której pominięto powiązania rozwoju gospodarek Unii Europejskiej z rozwojem gospodarki w Polsce, zwiększył się 6,3205 razy, co oznacza brak jakiegokolwiek współzależności między rozwojem gospodarki w Polsce w okresie rozpatrywanych czterdziestu dziewięciu lat. Współzależność rozwoju występowałaby w przypadku, gdyby wartości  $\det E$  i  $\det F$  istotnie się różniły.

W dalszym toku analizy z okresu czterdziestu dziewięciu rozpatrywanych lat wyodrębniono krótszy podokres obejmujący piętnaście lat, tzn. lata dziewięćdziesiąte i po 2000 roku. Dla rozpatrywanych piętnastu lat powtórzono analizę równowagi rozwoju gospodarki Polski i wybranych krajów Unii Europejskiej. Macierz  $F$  przyjęła postać:

Tabela 7

Mnożniki zrównoważonego rozwoju w UE dla piętnastu lat

	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
Francja	-1936,67	-983,996	1154,162	1738,798
Wielka Brytania	-304,538	-92,003	167,692	233,593
Holandia	992,001	419,411	-569,027	-829,409
Belgia	1236,342	658,355	-744,711	-1136,102

Analogiczna macierz  $E$  przyjęła następującą postać:

Tabela 8

Mnożniki zrównoważonego rozwoju gospodarek krajów UE z wyłączeniem Polski dla piętnastu lat

	Francja	Wielka Brytania	Holandia	Belgia
Francja	-1936,704	-984,043	1154,136	1738,761
Wielka Brytania	-304,585	-92,069	167,655	233,54
Holandia	991,975	419,374	-569,048	-829,438
Belgia	1236,305	658,302	-744,74	-1136,145

Okazuje się, że w rozpatrywanym przypadku iloczyny wartości własnych również się zmieniły, przyjmując wartość dla macierzy  $F$  odpowiednio:

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_4 = \det F = 1817338,421 \quad (17)$$

Natomiast dla macierzy  $E$  otrzymano:

$$\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_4 = \det E = 1712559,000 \quad (18)$$

Relacja między wyznaczonymi wartościami wyznaczników jest następująca:

$$\frac{\det E}{\det F} = 0,9424 \quad (19)$$

Powyższa zależność oznacza, że pomiędzy wartościami wyznaczników macierzy  $E$  oraz  $F$  nie występują istotne statystycznie różnice. Z ekonomicznego punktu widzenia należy zaznaczyć, że rozwój gospodarki polskiej i rozwój gospodarek państw Unii Europejskiej wraz z upływem czasu stają się coraz bardziej do siebie zbliżony. Nie można jeszcze mówić o pełnej równowadze rozwoju gospodarek w Polsce i w państwach Unii Europejskiej.

## Podsumowanie

Przedstawiona w artykule metoda Johansena wyznaczania okresu równowagi i stabilizacji długookresowej pozwala na ocenę porównawczą dynamiki szeregów czasowych. Można ją rozpatrywać w całym okresie danych historycznych lub poszczególnych podokresach. Zastosowana metoda pozwala wyznaczyć minimalny okres równowagi lub odpowiedzieć na pytanie, w jakim okresie procentowym rozwój gospodarczy w rozpatrywanym czasie można uznać za ustabilizowany. Dla całego pięćdziesięciolecia otrzymano niskie wartości własne, a dla ostatnich piętnastu lat istotnie wyższe. Oznacza to, że w ostatnim piętnastoleciu występuje znacząca kointegracja rozpatrywanych gospodarek.

## Literatura

1. Grabowski W., Welfe A.: *Ekonometria. Zbiór zadań*. PWE, Warszawa 2010.
2. Johansen S.: *Likelihood Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press, Oxford 1996.
3. Rocznik Statystyczny GUS. Warszawa 1958-2006.
4. Welfe A., Karp P., Kęblowski P.: *Mechanizmy makroekonomiczne w gospodarce polskiej. Analiza ekonometryczna*. WUŁ, Łódź 2006.
5. Welfe A.: *Gospodarka Polski w okresie transformacji. Zasady modelowania ekonometrycznego*. PWE, Warszawa 2000.

## DETERMINATION OF THE PERIOD OF LONG-TERM EQUILIBRIUM AND STABILITY

### Summary

The study examines the development of the Polish economy as well as the economies of selected European Union countries in the period from 1949 to 2006. Much space is devoted to a comparative analysis of the development economies in the countries concerned. Based on statistical data appropriate synthetic variables were set. Much space is devoted to the theory of the Johansen's method, to present the dependencies occurring in the dynamics of economic development in subsequent subperiods. The method allows for a comparative assessment of the dynamics of time series. The methods are adopted to examine the level of economic development, to determine the period of long-term equilibrium and stability.