

Agata Gluzicka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

PROBLEM NARUSZANIA ZASAD TEORII OCZEKIWANEJ UŻYTECZNOŚCI NA PRZYKŁADZIE PARADOKSU ALLAIS

Wprowadzenie

W teorii podejmowania decyzji ważną rolę odgrywają twierdzenia dotyczące racjonalnego podejmowania decyzji, zgodnie z którymi ludzie kierują się zasadą maksymalnej korzyści. Zasada ta jest związana z maksymalizacją oczekiwanej użyteczności i została sformułowana przez Nicholasa Bernoulli'ego w 1713 r. Począwszy od końca pierwszej połowy XX w. naukowcy na podstawie licznych eksperymentów wielokrotnie formułowali reguły, jakimi rządzi się teoria oczekiwanej użyteczności. Pierwszy zbiór aksjomatów związanych z modelem Bernoulli'ego zaproponowali, przy okazji prac związanych z rozwojem teorii gier, John von Neumann i Oscar Morgenstern (1944). Aksjomatyka ta była modyfikowana m.in. przez Hersteina i Milnora oraz Jensena. Tematyka tego artykułu nawiązuje do aksjomatów sformułowanych przez Fishburna oraz Savage'a. Za najważniejszy aksjomat zaproponowany w 1970 r. przez Fishburna uważa się aksjomat niezależności (ang. *independence axiom*), natomiast w przypadku aksjomatyki według Savage'a (1954) istotnym jest aksjomat wartości pewnej (ang. *sure thing principle*) – [Abdellaoui 2002; Machina 2004].

Przeprowadzone liczne badania oraz eksperymenty pokazały, że ludzie podejmując decyzje, często łamią aksjomaty racjonalnego podejmowania decyzji. Badania te doprowadziły do sformułowania m.in. paradoksów racjonalności, czyli niezgodności między teorią a rzeczywistością. Jeden z takich paradoksów przedstawił w swoich eksperymentach w latach 50. ubiegłego wieku francuski ekonomista Maurice Allais.

W artykule przedstawiono wybrane z literatury przedmiotu eksperymenty związane z paradoksem Allais. Przegląd tych eksperymentów miał na celu prezentację samego paradoksu oraz związanego z nim efektu pewności, efektu wspólnych konsekwencji i efektu wspólnego czynnika. Omówione zostały również wybrane sposoby redukcji stopnia naruszenia zasad teorii oczekiwanej użyteczności.

1. Paradoks Allais

Jednym z najsłynniejszych przykładów niezgodności z teorią oczekiwaney użyteczności jest eksperyment zaprezentowany na początku lat 50. ubiegłego wieku przez francuskiego ekonomistę Maurice'a Allais (1953). Eksperyment ten zwany paradoksem Allais miał na celu pokazanie wyborów niezgodnych z aksjomatem niezależności, a tym samym wykazanie braku liniowości funkcji oczekiwaney użyteczności. Oryginalny paradoks Allais składa się z dwóch wyborów, a każdy z nich zawiera dwie alternatywne loterie zwane również prospektami. W pierwszej kolejności należy dokonać wyboru pomiędzy loterią z wynikiem pewnym a loterią ryzykowną, przy czym zakłada się, że loteria ryzykowna ma trzy możliwe wyniki. Następnie należy dokonać wyboru pomiędzy loteriami powstałymi z poprzednich loterii po wyeliminowaniu części szans na określoną wygraną. Maurice Allais zaproponował następujący eksperyment [Andreoni i Sprenger 2010; Conlisk 1989; Shu 1993]:

Wybór 1:

Loteria A: masz 100% szans na wygranie 1 000 000 dolarów.

Loteria B: masz 10% szans na wygranie 5 000 000 dolarów, 89% szans na wygranie 1 000 000 dolarów oraz 1% szans na wygraną równą 0.

Wybór 2:

Loteria A*: masz 11% szans na wygranie 1 000 000 dolarów oraz 89% szans na wygraną równą 0.

Loteria B*: masz 10% szans na wygranie 5 000 000 dolarów oraz 90% szans na wygraną równą 0.

W tym przypadku loterie w wyborze 2 powstają przez eliminację 89% szans na wygranie 1 miliona dolarów w obu loteriach z wyboru 1. Zgodnie z teorią oczekiwaney użyteczności, jeśli loteria A jest preferowana nad loterię B, to loteria A* powinna być preferowana nad loterię B*. Przeprowadzony eksperyment pokazał, że w sytuacji wyboru 1 większość osób preferuje loterię A, natomiast w przypadku wyboru 2 jest preferowana opcja B*. Maurice Allais udowodnił w ten sposób, że wybór opcji A i B* ujawnia preferencje, które kształtują się niezgodnie z aksjomatami teorii użyteczności. Niezgodność tę można wykazać korzystając z zasady oczekiwaney użyteczności, według której loteria A jest preferowana nad B wtedy i tylko wtedy, gdy oczekiwana użyteczność loterii A przekracza wartość oczekiwaney użyteczności loterii B, co można symbolicznie zapisać następująco:

$$A \succ B \Leftrightarrow E[u(A)] > E[u(B)],$$

gdzie $u()$ oznacza funkcję użyteczności (zakładamy, że $u(0) = 0$), a E jest operatorem wartości oczekiwanej. Dla loterii analizowanej przez Allais mamy następujące warunki:

- ponieważ A jest preferowane nad B , to

$$u(1\text{mln}) > 0,1u(5\text{mln}) + 0,01u(0\text{mln}) + 0,89u(1\text{mln}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 0,11u(1\text{mln}) > 0,1u(5\text{mln})$$
- ponieważ B^* jest preferowane nad A^* , to

$$0,1u(5\text{mln}) + 0,9u(0\text{mln}) > 0,11u(1\text{mln}) + 0,89u(0\text{mln}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 0,1u(5\text{mln}) > 0,11u(1\text{mln})$$

Otrzymujemy dwie przeciwne nierówności, co dowodzi niezgodności wyniku eksperymentu z aksjomatyką teorii oczekiwanej użyteczności. Doświadczenie Allais pokazuje niespójność decyzyjną, która uwidacznia się przy porównywaniu wyborów między dwiema parami loterii A i B oraz A^* i B^* . Jak zauważył m.in. Conlisk oferowane w eksperymencie wypłaty są bardzo duże, dlatego wyniki eksperymentu odzwierciedlają tylko hipotetyczne wybory badanych [Conlisk 1989].

2. Efekt pewności Allais i efekt wspólnych konsekwencji

W eksperymencie zaproponowanym przez Allais zakłada się, że jedna z loterii jest loterią z pewnym wynikiem. Część badań nad paradoksem Allais dotyczyło tzw. zasady efektu pewności (ang. *certainty effect*). Badania takie prowadzili m.in. Kahneman i Tversky, którzy wyniki swoich eksperymentów przedstawili w swojej pracy [1979]. W artykule tym, uznawanym za krytykę teorii oczekiwanej użyteczności, autorzy na podstawie wyników przeprowadzonych eksperymentów stwierdzili, że wybór między ryzykownymi loteriami prowadzi do wyboru loterii z pewnymi wygranymi, a takie postępowanie nie jest zgodne z głównymi zasadami teorii oczekiwanej użyteczności. W teorii oczekiwanej użyteczności zakłada się, że użyteczności wyników są ważone prawdopodobieństwami ich wystąpienia. Kahneman i Tversky zauważyli, że zazwyczaj ludzie zawyżają wagi dla pewnej wygranej w stosunku do wag dla wyników prawdopodobnych. Ta tendencja jest nazywana efektem pewności lub efektem pewności Allais i powoduje, że awersja do ryzyka pojawia się w wyborach, gdzie mamy loterie z pewną wygraną, natomiast postawa ryzykanta pojawia się w wyborach związanych ze stratami. Jednym z analizowanych przez Kahneman'a i Tversky'ego [1979] przykładów był następujący eksperyment:

Wybór 3:

Loteria A: możesz wygrać 2500 z prawdopodobieństwem 0,33, 2400 z prawdopodobieństwem 0,66 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,01.

Loteria B: możesz wygrać 2400 z prawdopodobieństwem równym 1.

Wybór 4:

Loteria A*: możesz wygrać 2500 z prawdopodobieństwem 0,33 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,67.

Loteria B*: możesz wygrać 2400 z prawdopodobieństwem 0,34 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,66.

W tym przykładzie mamy do czynienia z efektem pewności oraz z ewidentnym naruszeniem zasad teorii oczekiwanej użyteczności. W powyższym eksperymencie większość respondentów (82%) wybrało loterię B w wyborze 3, natomiast w problemie 4 preferowaną loterią była loteria A* (wybrana przez 83% respondentów).

Eksperyment przedstawiony powyżej jest również przykładem tzw. efektu wspólnych konsekwencji (ang. *common consequence effect*). Loterie A* i B* powstały odpowiednio z loterii A i B przez eliminację w obu tych loteriach 66% szans na wygraną 2400. Ta redukcja zmieniła loterię z wynikiem pewnym na loterię z wynikiem możliwym, co w dalszej kolejności wpłynęło na wybór preferowanych loterii.

Wśród licznych eksperymentów dotyczących paradoksu Allais można odnaleźć przykłady takich, w których nie występuje naruszenie zasad teorii oczekiwanej użyteczności. Poniżej przedstawiono przykład takiego eksperymentu [Shu 1993]:

Wybór 5:

Loteria A: masz 100% szans na wygraną 3000.

Loteria B: masz 10% szans na wygraną 3000, 45% szans na wygraną 6000 oraz 45% szans na wygraną 0.

Wybór 6:

Loteria A*: masz 90% szans na wygraną 3000 i masz 10% szans na wygraną 0.

Loteria B*: masz 45% szans na wygraną 6000 i 55% szans na wygraną 0.

W przypadku wyboru 5 mamy co prawda loterię z pewną wygraną, ale wyniki otrzymane w tym eksperymencie nie potwierdzają naruszenia zasad teorii użyteczności, ponieważ preferowanymi loteriami okazały się loteria A (63% respondentów) oraz loteria A* (89% respondentów).

Kolejny eksperyment jest przykładem zaprzeczenia wniosków sformułowanych m.in. przez Kahnemana i Tversky'ego. Eksperyment ten wykazał, że nie zawsze loteria ryzykowna jest preferowana nad loterię z pewnym wynikiem [Shu 1993]:

Wybór 7:

Loteria A: masz 100% szans na wygraną 150.

Loteria B: masz 11% szans na wygraną 150, 24% szans na wygraną 230 oraz 55% szans na wygraną 120.

Wybór 8:

Loteria A*: masz 89% szans na wygraną 150 i 11% szans na wygraną 0.

Loteria B*: masz 24% szans na wygraną 230, 65% szans na wygraną 120 oraz 11% szans na wygraną 0.

65% respondentów preferowało loterię B w problemie 7, dlatego nie mamy tutaj do czynienia z efektem pewności. Co więcej, w wyborze 8 była preferowana loteria B* (62% respondentów), co wskazuje, że dokonano wyboru bez naruszania zasad teorii oczekiwanej użyteczności. Autor eksperymentu podkreśla, że większość ludzi preferowała loterię ryzykowną, czyli pewność wygrania kwoty 150 okazała się mniej atrakcyjna niż loteria losowa o niższej wartości oczekiwanej. Nawet po redukcji wyniku pewnego, preferowaną loterią okazała się loteria bardziej ryzykowna.

W badaniach nad paradoksem Allais, postać analizowanych loterii była wielokrotnie modyfikowana ze względu na wielkość wygranej czy prawdopodobieństwo. Grupę takich badań stanowią eksperymenty, w których nie brano pod uwagę loterii z wynikiem pewnym. W takim przypadku są rozważane dwie pary loterii, gdzie jedna para powstaje z drugiej przez wyeliminowanie określonej szansy na wygraną w obu loteriach. Przykład takiego eksperymentu przedstawiono poniżej [Shu 1993]:

Wybór 9:

Loteria A: masz 21% szans na wygraną 3000, 78% szans na wygraną 2500 oraz 1% szans na wygraną 0.

Loteria B: masz 21% szans na wygraną 3000 i masz 79% szans na wygraną 2400.

Wybór 10:

Loteria A*: masz 78% szans na wygraną 2500 i 22% szans na wygraną 0.

Loteria B*: masz 79% szans na wygraną 2400 i 21% szans na wygraną 0.

Ten przykład jest kolejnym zaprzeczeniem twierdzenia sformułowanego przez Kahnemana i Tversky'ego [1979], które mówi, że redukcja prawdopodobieństw otrzymania określonych wyników o stały współczynnik ma większy skutek w przypadku, gdy wynik początkowo był wynikiem pewnym, niż w sytuacji kiedy redukujemy prawdopodobieństwo wyniku możliwego. W przedstawionym eksperymencie preferowanymi loteriami były loterie B (66%) i A* (69%), co zaprzecza prawdziwości powyższego stwierdzenia.

3. Efekt wspólnego czynnika i odwrócony efekt wspólnego czynnika

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów Maurice Allais [1953] zauważył, że ryzykowne perspektywy stają się bardziej atrakcyjne, jeśli prawdopodobieństwa wygranej w obu loteriach zostaną przemnożone przez ten sam wspólny czynnik. W ten sposób otrzymujemy loterie, w których występuje efekt wspólnego czynnika (ang. *common ratio effect*). Efekt ten jest kolejnym przykładem naruszenia zasad teorii oczekiwanej użyteczności. W tym przypadku mówimy o naruszeniu zasady podstawiania.

Przykłady eksperymentów z efektem wspólnego czynnika można odnaleźć m.in. w artykule Kahnemana i Tversky'ego, którzy analizowali następujące loterie [1979]:

Wybór 11:

Loteria A: możesz wygrać 4000 z prawdopodobieństwem 0,80 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,20.

Loteria B: możesz wygrać 3000 z prawdopodobieństwem równym 1.

Wybór 12:

Loteria A*: możesz wygrać 4000 z prawdopodobieństwem 0,20 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,80.

Loteria B*: możesz wygrać 3000 z prawdopodobieństwem 0,25 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,75.

Podobnie jak w większości analizowanych problemów, również i w tym przypadku ponad połowa respondentów przy dokonywaniu wyboru naruszyła zasady teorii oczekiwanej użyteczności. W sytuacji wyboru 11 większość respondentów (80%) wybrało loterię B, natomiast w problemie 12, 65% respondentów preferowało loterię A*.

Zauważmy, że loterię A* można wyrazić jako (A; 0,25), czyli jako możliwość zagrania w loterię A z prawdopodobieństwem 0,25. Aksjomat podstawiania w teorii oczekiwanej użyteczności mówi, że jeśli loteria B jest preferowana nad loterię A, to dowolna kombinacja loterii (B; p) powinna być preferowana nad kombinację postaci (A; p). W powyższym przykładzie większość ludzi dokonała jednak wyboru nie stosując tej zasady. Autorzy zauważyli, że redukcja prawdopodobieństwa z 1 do 0,25 ma większy efekt niż redukcja prawdopodobieństwa z 0,8 do 0,2, mimo że dokonujemy proporcjonalnej zmiany. W tym przypadku, w wyniku redukcji z loterii z wynikiem pewnym otrzymujemy loterię z wynikiem możliwym.

Przykład efektu wspólnego czynnika został również przedstawiony w poniższym eksperymencie [Kahneman i Tversky 1979], gdzie loterie A* i B* powstały z loterii A i B przez podzielenie prawdopodobieństw wygranej przez 450.

Wybór 13:

Loteria A: możesz wygrać 6000 z prawdopodobieństwem 0,45 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,55.

Loteria B: możesz wygrać 3000 z prawdopodobieństwem 0,90 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,10.

Wybór 14:

Loteria A*: możesz wygrać 6000 z prawdopodobieństwem 0,001 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,999.

Loteria B*: możesz wygrać 3000 z prawdopodobieństwem 0,002 lub możesz wygrać 0 z prawdopodobieństwem 0,998.

Zauważmy, że w sytuacji wyboru 13 prawdopodobieństwa wygranej są znaczące, równe odpowiednio 0,90 i 0,45. W tym przypadku większość respondentów (86%) wybrała loterię B, co oznacza, że preferowali oni loterię, w której wygrana jest bardziej prawdopodobna. W problemie 14, gdzie istnieją tylko niewielkie szanse na wygraną (zaledwie 0,001 i 0,002) większość ludzi wybrało jednak loterię oferującą większą kwotę wygranej – loteria A* była preferowana przez 73% respondentów.

Problem efektu wspólnego czynnika analizował również w swoich pracach Blavatsky [2010], który rozszerzył ten problem i wprowadził rozróżnienie na efekt wspólnego czynnika i odwrócony efekt wspólnego czynnika (ang. *reverse common ratio effect*). W jednym ze swoich eksperymentów analizował loterie przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1

Loterie analizowane w eksperymentach

Eksperyment	Loterie			
	A	B	A*	B*
1	(\$60, 1)	(\$100, 0.75)	(\$60, 0.33)	(\$100, 0.25)
2	(\$50, 1)	(\$100, 0.75)	(\$50, 0.33)	(\$100, 0.25)
3	(\$40, 1)	(\$100, 0.75)	(\$40, 0.33)	(\$100, 0.25)
4	(\$30, 1)	(\$100, 0.25)	(\$30, 0.33)	(\$100, 0.08)
5	(\$20, 1)	(\$100, 0.25)	(\$20, 0.33)	(\$100, 0.08)
6	(\$10, 1)	(\$100, 0.25)	(\$10, 0.33)	(\$100, 0.08)

Źródło: [Birnbbaum i Schmidt 2010].

Wszystkie pary loterii analizowane w tym eksperymencie są podobnie skonstruowane. Loteria A jest loterią z wynikiem pewnym, loteria B jest loterią ryzykowną, loteria A* jest loterią bezpieczniejszą, a loteria B* jest loterią bardziej ryzykowną. Pary loterii A i B Blavatsky nazwał loteriami „skalowanymi w górę”, natomiast pary loterii A* i B* loteriami „skalowanymi w dół”. W każdym przypadku loterie A* i B* powstały odpowiednio z loterii A i B, przez redukcję prawdopodobieństw (prawdopodobieństwo wygranej zostało podzielone przez 3). W przypadku kiedy są preferowane loterie A i B* lub loterie A* i B mamy do czynienia z naruszeniem zasad teorii oczekiwanej użyteczności. Wybór pierwszej pary loterii jest przykładem efektu wspólnego czynnika, natomiast wybór loterii A* i B to odwrócony efekt wspólnego czynnika. Eksperymenty przeprowadzone przez Blavatsky’ego wykazały, że odwrócony efekt wspólnego czynnika występuje zdecydowanie częściej niż klasyczny efekt wspólnego czynnika. Przykładowo w eksperymencie 1 zaledwie 3% respondentów wybrało loterie A i B*, natomiast 47% ankietowanych preferowało loterie A* i B. Dla eksperymentu 6 wyniki te wyniosły odpowiednio 7% i 26%. Podobne eksperymenty były prowadzone dla innych danych (przyjęto niższe kwoty wygranych), jednak otrzymane wyniki tylko potwierdziły sformułowane wcześniej wnioski [Blavatsky 2010].

4. Wybrane sposoby redukcji stopnia naruszania zasad teorii użyteczności

W większości eksperymentów dotyczących paradoksu Allais analizowano loterie hipotetyczne. W pewnych przypadkach przeprowadzono badania, w których respondenci po udziale w eksperymencie mieli jednak możliwość otrzymania rzeczywistych wypłat. Wartości wypłat zazwyczaj były uzależnione od wyników loterii preferowanych przez respondentów podczas eksperymentu. Przeprowadzone w tym kierunku badania wykazały, że jeśli analizowano tylko loterie hipotetyczne, czyli bez rzeczywistych wypłat, wówczas procent naruszenia teorii oczekiwanej użyteczności był wyższy niż w przypadku loterii z rzeczywistymi wypłatami. Taki eksperyment został przeprowadzony m.in. przez Harrisona, który analizował następujący problem [Harrison 1994]:

Wybór 15:

Loteria A: masz 100% szans na wygraną \$5.

Loteria B: masz 1% szans na wygraną 0, masz 89% szans na wygraną \$5 oraz 10% szans na wygraną \$20.

Wybór 16:

Loteria A*: masz 89% szans na wygraną 0 i 11% szans na wygraną \$5.

Loteria B*: masz 90% szans na wygraną 0 i 10% szans na wygraną \$20.

Wybór loterii B i B* jest zgodny z regułami teorii oczekiwanej użyteczności i taka decyzja została podjęta przez 65% respondentów. Wybór loterii A i B* jest z kolei naruszeniem tych zasad, a taką decyzję podjęło 35% badanych. Przedstawione wyniki otrzymano w przypadku eksperymentów bez wypłat rzeczywistych. W powtórzonym eksperymencie, gdy uczestnicy wiedzieli, że ich decyzje są związane z prawdziwymi wypłatami, 85% respondentów przy podejmowaniu decyzji kierowało się zasadą maksymalizacji oczekiwanej użyteczności, w związku z czym odsetek naruszenia teorii użyteczności spadł do 15%.

Podobne eksperymenty, gdzie wyniki loterii hipotetycznych były porównywane z wynikami otrzymanymi w loteriach z rzeczywistymi wypłatami zostały zaprezentowane w pracy Burke'a et al. [1996]. W tym przypadku było analizowanych kilka loterii, w których wygrane były równe 5 lub 10 dolarów oraz zmieniono prawdopodobieństwa wygrania poszczególnych kwot. Jeden z analizowanych eksperymentów był następujący [Burke et al. 1996]:

Wybór 17:

Loteria A: masz 100% szans na wygraną \$5.

Loteria B: masz 20% szans na wygraną 0 i 80% szans na wygraną \$10.

Wybór 18:

Loteria A*: masz 75% szans na wygraną 0 i 25% szans na wygraną \$5.

Loteria B*: masz 80% szans na wygraną 0 i 20% szans na wygraną \$10.

W tym przypadku dla loterii bez rzeczywistych wypłat, procent naruszenia zasad teorii użyteczności był równy 36%, z kolei w sytuacji kiedy respondenci wiedzieli o możliwości rzeczywistej wygranej, zaledwie 8% ankietowanych podjęło decyzję w sposób naruszający zasadę oczekiwanej użyteczności. Otrzymano w ten sposób potwierdzenie wniosku, że bodziec w postaci wypłat pieniężnych ma zasadniczy wpływ na wybór loterii. Dokładniej mówiąc zamiana loterii hipotetycznych na loterie rzeczywiste powoduje redukcję stopnia naruszenia teorii oczekiwanej użyteczności.

Innym czynnikiem wpływającym na rezultaty eksperymentów, zarówno dla loterii hipotetycznych, jak i loterii rzeczywistych, jest wartość wygranej. Przykład takiego eksperymentu został zaprezentowany w pracy Hucka i Mullera [2007], gdzie autorzy analizowali zarówno loterie z oryginalnymi kwotami zaproponowanymi przez Maurice'a Allais (1 milion oraz 5 milionów dolarów), jak

i loterie z dużo niższymi wygranymi, równymi 5 i 25 dolarów. Dodatkowo analizowali przykład loterii z wypłatami rzeczywistymi. W przypadku loterii z oryginalnymi kwotami procent naruszenia teorii użyteczności był równy 30%. Kiedy decyzje były związane z niższymi wartościami już tylko 15% respondentów podjęło decyzję niezgodną z regułą maksymalnej użyteczności. Zarówno te badania, jak i wiele im podobnych wykazały, że jeśli wypłaty są bliższe rzeczywistości (np. wypłaty są bliskie średniemu dochodowi wśród ankietowanych), wówczas otrzymujemy niższy poziom naruszenia teorii oczekiwanej użyteczności.

Na wyniki przeprowadzonych eksperymentów, a tym samym na procent naruszenia teorii oczekiwanej użyteczności ma również wpływ forma prezentacji analizowanych loterii. Inne wyniki otrzymujemy, kiedy loterie są przedstawiane w sposób opisowy (tak jak w przypadku tego artykułu), a inne wyniki mamy, gdy te same loterie są prezentowane w postaci graficznej (np. wykresów kołowych).

Wyniki eksperymentów zależą również od tego czy analizujemy loterie proste czy loterie złożone. Jako przykład poniżej przedstawiono trzystopniowy paradoks Allais zaproponowany przez Conliska [1989]:

Wybór 19:

Loteria A: masz 100% szans na wygranie 1 miliona dolarów.

Loteria B: masz 89% szans na wygranie 5 milionów dolarów.

Wybór 20:

Loteria A*: masz 89% szans na wygranie 1 miliona dolarów i 11% szans na zagranie w loterię A.

Loteria B*: masz 89% szans na wygranie 1 miliona dolarów i 11% szans na zagranie w loterię B.

Wybór 21:

Loteria A:** masz 11% szans na zagranie w loterię A i 89% szans na wygraną równą 0.

Loteria B:** masz 11% szans na zagranie w loterię B i 89% szans na wygraną równą 0.

Conlisk porównał otrzymane wyniki z powyższego eksperymentu z wynikami eksperymentu zaproponowanego przez Allais. W przypadku klasycznej postaci paradoksu poziom naruszenia teorii oczekiwanej użyteczności wyniósł 50%, natomiast dla paradoksu w postaci trzystopniowej procent naruszenia był równy 28.

Część badań nad paradoksem Allais dotyczyła doboru prawdopodobieństw, z jakimi można wygrać określone kwoty. Eksperymenty związane z wpływem wartości prawdopodobieństw na wybór preferowanych loterii zostały zaprezentowane w pracy Birnbauma i Schmidta [2010].

Wybór 22:

Loteria A: masz 20% szans na wygranie \$40 oraz masz 80% szans na wygranie \$2.

Loteria B: masz 10% szans na wygranie \$98 oraz masz 90% szans na wygranie \$2.

Wybór 23:

Loteria A*: masz 10% szans na wygranie \$40, 10% szans na wygranie \$40 oraz 80% szans na wygranie \$2.

Loteria B*: masz 10% szans na wygranie \$98, 10% szans na wygranie \$2 oraz 80% szans na wygranie \$2.

Loterie A* i B* powstały z loterii A i B odpowiednio przez rozbitcie prawdopodobieństwa jednej wygranej (w loterii A – 20% szans na wygranie \$40), na dwie możliwe wygrane o równych kwotach i prawdopodobieństwach. O loteriach A* i B* mówimy, że są przykładem kanonicznej formy podziału (ang. *canonical split form*) – [Birnbau 2004; Birnbau i Schmidt 2010]. W eksperymencie tym 59% respondentów preferowało loterię B oraz 63% respondentów preferowało loterię A*.

Wyniki eksperymentów są także zależne od grupy ankietowanych osób. Paradoks Allais może być analizowany zarówno w grupie osób znających w pewnym stopniu zasady teorii podejmowania decyzji, jak również paradoks ten może być analizowany w grupie ludzi, którzy nie mają nic wspólnego z tą dziedziną. Wiele eksperymentów przeprowadzanych było równocześnie w dwóch lub więcej grupach, jednak różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi w poszczególnych grupach dla danego eksperymentu w żadnym z przypadków nie były znaczące [Blavatsky 2010; Shu 1993].

O paradoksie Allais można mówić również w przypadku loterii bezgotówkowych. Jednym ze słynniejszych przykładów jest problem ekspedycji wspinaczkowej, gdzie jako wygraną przyjmuje się liczbę osób, jaką można ocalić w zależności od zastosowanego planu ratunkowego [Shu 1993]. W innym przykładzie jako wygrane w loteriach przyjmuje się np. różne propozycje wycieczek turystycznych [Kahneman i Tversky 1979].

Podsumowanie

Badania empiryczne wykazały, że ludzie przy podejmowaniu wyborów spośród ryzykownych alternatyw często naruszają zasady oczekiwanej użyteczności. Na podstawie tych obserwacji zostały sformułowane paradoksy racjonalności. Jednym z takich paradoksów jest paradoks Allais. Niezgodność z aksjomatyką teorii użyteczności stała się inspiracją do rozwoju alternatywnych teorii, takich jak: teoria prospektów (ang. *prospect theory*) – [Kahneman i Tversky

1979], model RDEU – (ang. *rank dependent expected utility*) – [Quiggin 1981], *rank- and sign- dependent utility*, skumulowana teoria prospektów (ang. *cumulative prospect theory*) – [Tversky i Kahneman 1992; Wakker i Tversky 1993] czy modele ważne TAX (ang. *Transfer of Attention Exchange*) oraz RAM (ang. *Rank-Affected Multiplicative Weights*) – [Birnbaum i Schmidt 2010]. We wszystkich tych teoriach badacze bezskutecznie podejmowali próby wyjaśnienia paradoksu Allais.

Literatura

- Abdellaoui M. (2002): *Economic Rationality under Uncertainty*. GRID-CNRS, ENS de Cachan.
- Andreoni J., Sprenger C. (2010): *Certain and Uncertain Utility the Allais Paradox and Five Decision Theory Phenomena*. „Levine’s Working Paper Archive”.
- Birnbaum M.H. (2004): *Causes of Allais Common Consequence Paradoxes: An Experimental Dissection*. „Journal of Mathematical Psychology”, 48(2).
- Birnbaum M.H., Schmidt U. (2010): *Allais Paradoxes can be Reversed by Presenting Choices in Canonical Split Form*. „Kiel Working Paper”, No. 1615.
- Blavatsky P.R. (2010): *Reverse Common Ratio Effect*. „Journal of Risk Uncertain”, No. 40.
- Burke M.S., Carter J.R., Gomniak R.D., Ohl D.F. (1996): *An Experimental Note on the Allais Paradox and Monetary Incomes*. „Empirical Economics”, No. 21.
- Conlisk J. (1989): *Three Variants on the Allais Experiments*. „The American Economic Review”, No. 79.
- Harrison G.W. (1994): *Expected Utility and the Experimentalists*. „Empirical Economics”, No. 19.
- Huck S., Muller W. (2007): *Allais for All: Revisiting the Paradox*. „ELSE Working Papers” No. 289.
- Kahneman D., Tversky A. (1979): *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*. „Econometrica”, Vol. 47, No. 2.
- Machina M.J. (2004): *Nonexpected Utility Theory*. W: *Encyclopedia Of Actuarial Science*. Red. J.L. Teugels, B. Sundt. John Wiley & Sons, Chichester.
- Quiggin J. (1981): *A Theory of Anticipated Utility*. „Journal of Economic Behavior and Organization”, 3.
- Shu L. (1993): *What is Wrong with Allais’ Certainty Effect?* „Journal of Behavioral Decision Making”, Vol. 6.
- Tversky A., Kahneman D. (1992): *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*. „Journal of Risk and Uncertainty”, 5.
- Wakker P., Tversky A. (1993): *An Axiomatization of Cumulative Prospect Theory*. „Journal of Risk and Uncertainty”, 7.

THE ALLAIS PARADOX AS AN EXAMPLE OF THE INCOMPATIBILITY WITH THE EXPECTED UTILITY THEORY

Summary

Theorems about the rational decision making play very important role in the decision theory. According to these theorems people make their decisions by using the rule about maximum benefits. However in the literature we can find conclusions from research and experiments which indicate that when people are making decisions, they are very often breaking that rule about maximum profits. According to that research a few paradoxes of rationality were formulated.

In this article experiments concerning the Allais paradoxes are analyzed. The incompatibility between paradox and the expected utility theory were discussed. Also the certainty effect and the common consequence effect were analyzed.