

**Daniel Iskra**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# MAKSYMALNY OCZEKIWANY CZAS PRZEBYWANIA PORTFELA INWESTYCYJNEGO W ZADANYM OBSZARZE – BADANIA EMPIRYCZNE

## Wprowadzenie

Wraz z rozwojem teorii inwestycji finansowych, inwestorzy otrzymali wiele narzędzi umożliwiających rozwiązanie zadania wyboru optymalnej struktury portfela inwestycyjnego (zgodnie z zadaną funkcją celu) – [Alexander, 2008; Bayraktar, Young, 2010; Markowitz, 1991; Rockafellar, Uryasev, 2000; Wilmott, 2006]. Proponowane w pracy modele służące do wyznaczania optymalnego portfela opierają się na miarach atrakcyjności lub miarach ryzyka związanego z daną inwestycją [Czernik, Iskra, 2012; Iskra, 2011; Rockafellar, Uryasev, 2000]. W części z nich funkcja celu jest kombinacją tych miar [Markowitz, 1991]. W artykule poddano również analizie zadanie wyboru optymalnej struktury portfela ze względu na maksymalny oczekiwany czas przebywania w zadanym obszarze [Bayraktar, Young, 2010].

## 1. Czas przebywania

Czas przebywania (ang. *occupation time*) – [Bayraktar, Young, 2010; Cai, Chen, Wan, 2010; Darling, Kac, 1957]  $T_t(A_t)$  procesu  $X_t$  w obszarze  $A_t$  definiuje się następująco [Pechtl, 1999]:

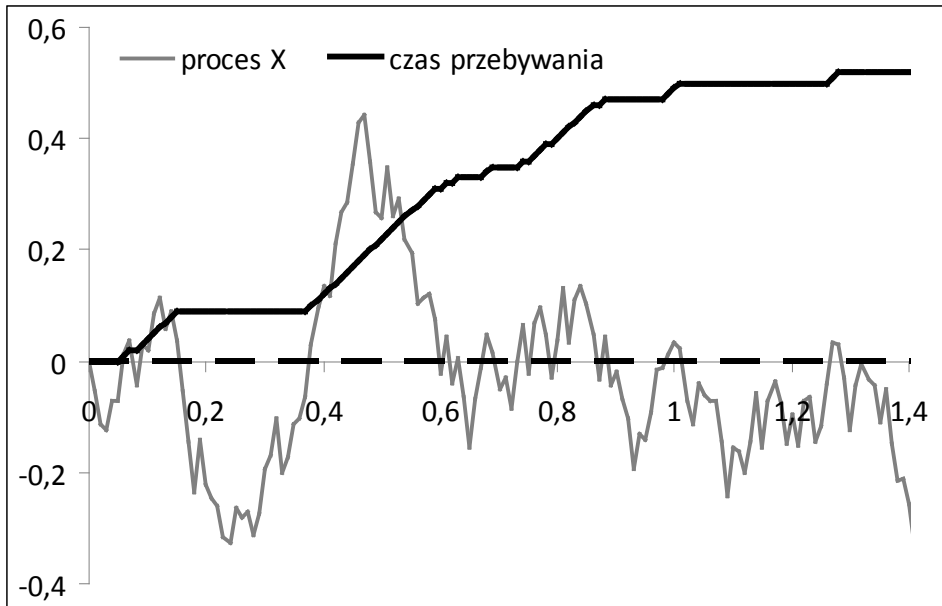
$$T_t(A_t) = \int_0^t 1_{A_s}(X_s) ds, \quad (1)$$

gdzie:

$$1_{A_t}(X_t) = \begin{cases} 1 & X_t \in A_t \\ 0 & X_t \notin A_t \end{cases} - \text{funkcja charakterystyczna zbioru,}$$

$A_t$  – obszar, dla którego wyznaczamy czas przebywania procesu  $X_t$ , kształt obszaru może być stały lub zależeć od czasu (deterministycznie lub losowo).

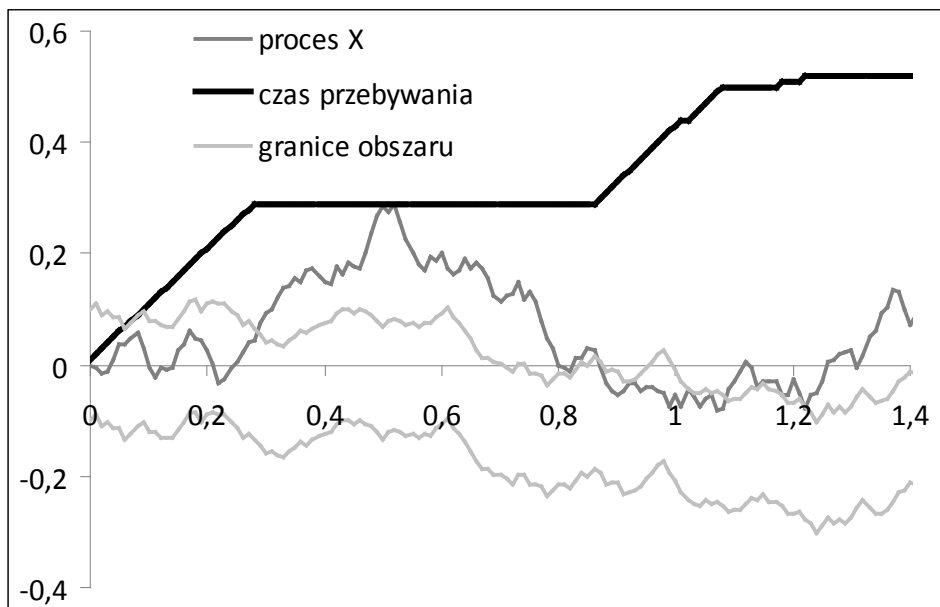
Czas przebywania jest procesem losowym, którego wartość zależy od procesu podstawowego  $X_t$  i zadanego obszaru  $A_t$ . Poniższy rys. przedstawia poglądowo czas przebywania dla przykładowej realizacji procesu  $X_t$  i obszaru  $A_t = (0, \infty)$ .



Rys. 1. Wykres wartości przykładowego procesu  $X_t$  oraz czasu przebywania  $T_t$  w obszarze  $A_t = (0, \infty)$

Jeżeli proces  $X_t$  byłby np. procesem stopy zwrotu instrumentu finansowego, to w powyższym przykładzie czas przebywania określałby, jak długo w horyzoncie czasu  $[0, t]$  stopa zwrotu byłaby dodatnia.

Jak zaznaczono powyżej, obszar  $A_t$  może być zależny od czasu zarówno deterministycznie, jak i stochastycznie. Na rys. 2 przedstawiono przykład z obszarem ograniczonym przez inny proces stochastyczny  $Y_t$ ,  $A_t = (Y_t, Y_t + 0,2)$ .



Rys. 2. Wykres wartości przykładowego procesu  $X_t$  oraz czasu przebywania  $T_t$  w obszarze  $A_t = (Y_t, Y_t + 0,2)$

Czas przebywania jest procesem niemalejącym i ograniczonym przez horyzont inwestycji  $t$  [Czernik, w druku]. Występuje w wielu pracach o tematyce ekonomicznej, jednak zdecydowana większość odnosi się do instrumentów pochodnych [Cai, Chen, Wan, 2010; Sharp, Johnson, Newton, Duck, 2009]. W analizie portfelowej wielkość jaką jest czas przebywania występuje sporadycznie [Bayraktar, Young, 2010].

W artykule rozpatrywano względny czas przebywania:

$$WT_t(A_t) = \frac{1}{t} T_t(A_t) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{A_s}(X_s) ds, \quad (2)$$

czyli odsetek czasu przebywania (w zadanym obszarze) w danym horyzoncie  $t$ . W przeprowadzonych badaniach wyznaczano taką strukturę portfela, dla której oczekiwany względny czas przebywania w zadanym obszarze jest maksymalny.

W tym celu, w pierwszej kolejności należy określić obszar ( $A_t$ ), w którym przebywanie procesu cen instrumentu finansowego będzie pożądane (lub niewskazane, jeżeli konstruujemy miarę ryzyka opartą na czasie przebywania). Należy także wybrać horyzont inwestycji, dla którego będzie wyznaczany względny czas przebywania. Do oszacowania wartości oczekiwanej względnego czasu przebywania trzeba znać jego rozkład – teoretyczny lub empiryczny (w badaniach użyto rozkładów empirycznych), co w tym drugim przypadku oznacza konieczność podziału całego horyzontu inwestycji na części, a następnie wyznaczenie

względny czasu przebywania dla każdej z nich. Z tak uzyskanego rozkładu względnego czasu przebywania można oszacować jego wartość oczekiwaną, a w konsekwencji dobrać taki skład portfela, aby była ona maksymalna.

## 2. Badania empiryczne

W przeprowadzonych badaniach estymację wartości oczekiwanej oparto na rozkładzie empirycznym względnego czasu przebywania. W symulacjach użyto spółek wchodzących w skład indeksu S&P100, notowanych pomiędzy początkiem 2000 r. a końcem 2011 r. Do badań weszły 83 spółki. Cały okres 11 lat podzielono na dni (sesyjne) i dla każdego dnia wyznaczono względny czas przebywania w zadanym obszarze. Baza danych zawierała notowania minutowe; jeżeli dla jakiejś minuty notowanie nie wystąpiło, uzupełniano lukę notowaniem z minuty poprzedniej (w ten sposób wszystkie spółki posiadały w każdym dniu tyle samo notowań). Opisywanych luk w notowaniach minutowych było niewiele, średnio około 97% wszystkich notowań występowało w odstępach minutowych, około 2% miało odstępy dwuminutowe, pozostałe 1% notowań mogło wystąpić z dłuższymi przerwami. Uzupełnienie brakujących notowań w poszczególnych spółkach pozwoliło na usprawnienie obliczeń, wyeliminowano bowiem przypadki, w których część spółek wchodzących w skład portfela mogła być w danej minucie notowana, a część nie. Względny czas przebywania w wybranym obszarze zliczano na podstawie wartości portfela (wyznaczanych co minutę) znajdujących się w zadanym obszarze w stosunku do wszystkich notowań z danego dnia. W wersji ciągłej można opisać przypadek porównać do skokowego procesu losowego, który nie zmienia swojej wartości co najmniej przez minutę.

W obecnej części artykułu zostanie opisana konstrukcja obszaru  $A_t$ . W badaniach obszar mógł zmieniać się tylko w kolejnych dniach i był definiowany na podstawie pierwszej wartości portfela z danego dnia:

$$A_i = [P_0^i, \infty), \quad (3)$$

gdzie:

$P_0^i$  – wartość początkowa portfela w  $i$ -tym dniu,

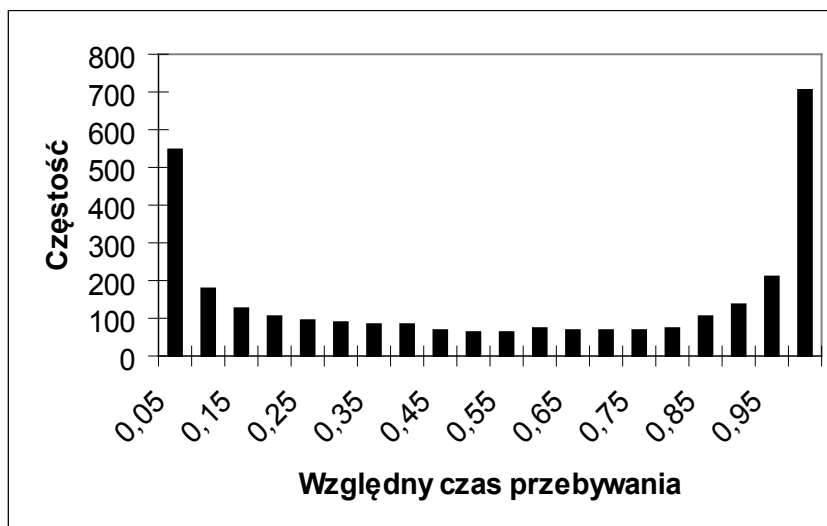
$i$  – numer dnia (indeks czasu zastąpiono kolejnymi numerami dni).

Opisana powyżej konstrukcja obszaru oznacza, iż w każdym dniu wyznaczano czas przebywania procesu wartości portfela ponad jego wartość początkową (z danego dnia). Wartości portfela w każdym dniu normowano dzieląc je przez

jego wartość początkową (z danego dnia). Po unormowaniu wartości portfela, obszar  $A_i$  dla każdego dnia jest jednakowy:

$$A_i = [1, \infty). \quad (4)$$

Poniżej przedstawiono przykładowy histogram względnego czasu przebywania dla portfela, w skład którego weszły spółki (po jednej akcji każda): Amazon.com (AMZN), Allegheny Technologies (ATI), Cisco Systems (CSCO), Dell (DELL), International Business Machines Corporation (IBM).



Rys. 3. Przykładowy histogram względnego czasu przebywania

Z powyższego histogramu wynika, iż w przytoczonym przykładzie bardzo często wartość portfela była w ciągu dnia cały czas nad jego wartością początkową (lub była jej równa). Przypadki, w których wartość portfela bardzo szybko spadała poniżej jego wartości początkowej i przez pozostałą część dnia była od niej niższa są równie częste. Pozostałe odsetki czasu przebywania nie różnią się znacznie między sobą.

W przeprowadzonych badaniach konstruowano portfele inwestycyjne, w skład których mogło wejść pięć losowo wybranych spółek. W symulacjach autor stosował strategię „kup i trzymaj”, co oznacza, że raz ustalony skład ilościowy portfela (tzn. stała ilość akcji) nie zmieniał się w badanym okresie. Wcześniejsze unormowanie wartości portfela uniezależnia go od jego wartości początkowej. Utrzymanie stałego stosunku ilości akcji poszczególnych spółek w portfelu gwarantuje, że szereg unormowanych wartości portfela zawsze jest taki sam, a wartość portfela w ustalonym momencie czasu można dowolnie skalować. W tym

celu wystarczy ilość akcji poszczególnych spółek przemnożyć przez odpowiedni skalar, wyznaczony adekwatnie do wartości portfela, którą chcemy otrzymać. Oczywiście podejście takie wymusza założenie o podzielności instrumentów finansowych.

W badaniach rozważano sto różnych portfeli o losowo dobranych spółkach mogących wejść w ich skład. Zadbano, aby w żadnym portfelu nie powtórzyły się tych samych pięć spółek. Następnie wyznaczano taką strukturę ilościową dla każdego portfela, aby wartość oczekiwana względnego czasu przebywania w danym obszarze była maksymalna.

W pierwszej kolejności sprawdzono prognostyczne własności czasu przebywania, dokładniej średnich wartości względnego czasu przebywania. W tym celu w symulacjach okres z notowaniami podzielono na dwie części: od początku 2000 r. do końca 2006 r. oraz od początku 2007 r. do końca 2011 r. W pierwszym okresie optymalizowano strukturę portfela (zgodnie z opisaną procedurą) ze względu na oczekiwany względny czas przebywania, natomiast w kolejnym okresie estymowano oczekiwany względny czas przebywania dla wyznaczonego optymalnego składu portfela (z części pierwszej). Symulacje wykazały, że oszacowany maksymalny oczekiwany względny czas przebywania dla optymalnych portfeli jest z zakresu 0,496-0,562. Średnia i odchylenie standardowe policzone dla stu portfeli (z maksymalnych wartości średnich względnego czasu przebywania) wynoszą odpowiednio: 0,527 i 0,014, co oznacza, że w optymalnych portfelach w ciągu dnia średnio około 53% czasu proces wartości portfela jest powyżej lub równy wartości początkowej (z danego dnia). W przypadku drugiej części badanego okresu (lata 2007-2011) w portfelach utrzymywano wyznaczoną strukturę (stałe ilości akcji). Obecnie średni względny czas przebywania dla portfeli jest pomiędzy wartościami 0,445 i 0,578. Średnia i odchylenie standardowe wynoszą odpowiednio: 0,517 i 0,027.

Sprawdzono istotność różnic pomiędzy wartościami średnimi względnego czasu przebywania portfeli, oszacowanymi odpowiednio na podstawie pierwszej i drugiej części badanego okresu. W pracy użyto testu istotności dla dwóch średnich w przypadku nieznanymi odchylen standardowych z poziomem istotności 0,05 (ze statystyką opisaną rozkładem t-Studenta). W 83% przypadków nie zaobserwowano istotnych różnic pomiędzy nimi, co oznacza dużą zgodność prognoz.

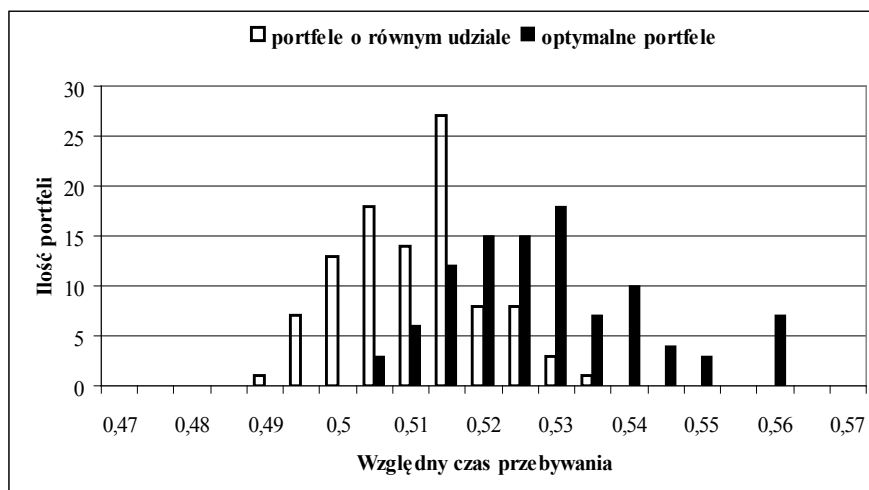
Należy zaznaczyć, że cały horyzont miał 11 lat. W tak długim okresie zaszło wiele zmian na rynku (np. niedawny kryzys), co mogło mieć wpływ na różnice pomiędzy średnim względnym czasem przebywania wyznaczonym na podstawie pierwszego badanego okresu a średnim względnym czasem przebywania dla tych samych portfeli (ten sam skład) oszacowanym w okresie drugim. Skrócono zatem horyzont czasu do dwóch lat: 2010-2011. Okres ten podzielono na poszczególne lata i powtórzono symulację. Obecnie testy nie wykazały istotnych różnic w 95% przypadków. Na podstawie otrzymanych wyników można

uznać, iż prognozy oczekiwanego względnego czasu przebywania wykazują wysoką zgodność.

W kolejnych symulacjach wyznaczano optymalną strukturę portfeli (ze względu na maksymalny oczekiwany względny czas przebywania) na podstawie całego badanego okresu (tak jak poprzednio rozpatrzono sto portfeli pięcioskładnikowych o losowo dobranym składzie). W obecnych badaniach maksymalny średni względny czas przebywania portfeli mieści się pomiędzy wartościami 0,50 i 0,56. Średnia i odchylenie standardowe policzone dla portfeli (z maksymalnych wartości średnich względnego czasu przebywania) wynoszą odpowiednio: 0,526 i 0,014.

Dla porównania przeprowadzono podobne symulacje, w których ilość akcji spółek dla tych samych portfeli jest wyznaczana tak, aby każda spółka miała równy udział w portfelu na początku badanego okresu (w pierwszym dniu) – po 20% i również nie zmieniano struktury portfela przez cały badany okres. W tym przypadku oczekiwany względny czas przebywania mieści się pomiędzy wartościami 0,49 a 0,53, jego średnia i odchylenie standardowe to odpowiednio: 0,508 i 0,009.

Obrazowo wyniki z obu przypadków przedstawiono na rys. 4, który pokazuje ilość portfeli o względnym czasie przebywania z danego przedziału (długość każdego przedziału wynosi 0,005, pierwszy przedział to (0,485; 0,490)):



Rys. 4. Ilość portfeli o względnym czasie przebywania z danego przedziału

Występujące różnice nie są duże, stąd też zasadne będzie przeprowadzenie testów na istotność różnic pomiędzy oczekiwanym względnym czasem przebywania w portfelu optymalnym i jego odpowiedniku, w którym spółki miały równy udział. W tym celu użyto testu istotności dla dwóch średnich w przypadku

nieznanych odchyłeń standardowych z poziomem istotności 0,05. Wykorzystano wersję jednostronną przytoczonego testu, sprawdzając czy średni względny czas przebywania optymalnego portfela jest istotnie większy od średniego względnego czasu przebywania wyznaczonego dla portfeli o równych udziałach. Istotne różnice zaobserwowano w 43 przypadkach.

Konfrontując otrzymane wyniki z wynikami pierwszych symulacji, należy zaznaczyć, że duża zgodność postawionych wcześniej prognoz oczekiwanego czasu przebywania powinna być potraktowana z dystansem. Obecne symulacje wykazały bowiem, że część rozpatrywanych portfeli (optymalnych i o równych udziałach) nie wykazuje istotnych różnic pomiędzy średnimi względnymi czasami przebywania, pomimo że zawierały różne ilości akcji poszczególnych spółek.

## Podsumowanie

W pracy estymowano oczekiwany względny czas przebywania wartości portfela inwestycyjnego powyżej (lub równej) wartości początkowej z danego dnia. Obszar użyty w symulacjach był ograniczony z dołu przez stałą wartość, a rozkład względnego czasu przebywania wyznaczano empirycznie.

Kolejnym etapem może być ograniczenie obszaru, np. funkcją zależną od czasu (trend) lub procesem stochastycznym (np. wartościami innego instrumentu).

Czas przebywania może posłużyć do konstrukcji zarówno miar atrakcyjności (jak w proponowanym artykule), jak i miar ryzyka (np. opartych na rozkładzie czasu przebywania w niepożądanym obszarze).

## Literatura

- Alexander C., 2008: *Market Risk Analysis: Value at Risk Models*. Vol. IV. John Wiley & Sons, England.
- Bayraktar E., Young V.R., 2010: *Optimal Investment Strategy to Minimize Occupation Time*. „Annals of Operations Research”, 176.
- Cai N., Chen N., Wan X., 2010: *Occupation Times of Jump-Diffusion Processes with Double Exponential Jumps and the Pricing of Options*. „Mathematics of Operations Research”, Vol. 35, No. 2.
- Czernik T., Iskra D., 2012: *Maximal Loss and Value at Risk. Portfolio analysis – a comparison*. W: *Mathematical, Econometrical and Computer Methods in Finance and Insurance 2010*. Red. A.S. Barczak, T. Węgrzyn. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.



- Czernik T., w druku: *Occupation Time – Potential Applications. Geometric Brownian Motion Case*. Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Katowice.
- Darling D.A., Kac M., 1957: *On occupation times for Markoff processes*. „Transactions of AMS”, 84.
- Iskra D., 2011: *Optymalny portfel inwestycyjny ze względu na wartość zagrożoną. Weryfikacja modelu*. W: *Metody matematyczne Ekonometryczne i Komputerowe w Finansach i Ubezpieczeniach 2009*. Red. A.S. Barczak, S. Barczak. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Markowitz H.M., 1991: *Portfolio Selection*. Basil Blackwell.
- Pechtl A., 1999, *Distributions of Occupation Times of Brownian Motion with Drift*. „Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences”, 3(1).
- Rockafellar R.T., Uryasev S., 2000: *Optimization of Conditional Value at Risk*. „The Journal of Risk”, Vol. 2, No. 3.
- Sharp N.J., Johnson P.V., Newton D.P., Duck P.W., 2009: *A New Prepayment Model (with Default): An Occupation-time Derivative Approach*. „Journal of Real Estate Finance of Economics”, 39.
- Wilmott P., 2006: *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, Chichester.

## MAXIMUM EXPECTED OCCUPATION TIME OF THE INVESTMENT PORTFOLIO IN THE CERTAIN AREA – EMPIRICAL RESEARCH

### Summary

With the development of the theory of financial investments, investors have received a lot of tools for solving the problem of choosing the optimal portfolio structure. In the paper, the author analyzed the task of choosing the optimal structure of the portfolio with the maximum average of occupation time in the certain area.