Adam Krzemienowski
Politechnika Warszawska

WIELOWYMIAROWA WARUNKOWA WARTOŚĆ ZAGROŻONA JAKO MIARA RYZYKA*

Wprowadzenie

Praca przedstawia nową miarę ryzyka nazwaną wielowymiarową warunkową wartością zagrożoną (Multivariate Conditional Value-at-Risk – MCVaR) jako narzędzie wyboru w warunkach ryzyka. Zakłada się, że miara ma służyć do pomiaru ryzyka wielowymiarowego, definiowanego jako wielowymiarowa (wektorowa) zmienna losowa, której elementy (współrzędne) reprezentują realizacje jednowymiarowych zmiennych losowych modelujących rozważane czynniki ryzyka. Przyjmuje się, że jednowymiarowe zmienne losowe są zależne w sensie stochastycznym, a ich struktura zależności jest dana funkcją połączenia (copula function). Ponadto czynniki ryzyka są w pełni substytucyjne, tzn. odpowiednie zmienne losowe są wyrażone w tych samych jednostkach (np. monetarnych).

W celu zdefiniowania miary wprowadza się pojęcie „kwantyla wielowymiarowego", określonego jako hiperprostopadłościan obejmujący najgorsze realizacje wielowymiarowej zmiennej losowej o łącznym prawdopodobieństwie równym rzędowi kwantyla. Warto zauważyć, że tak zdefiniowanych kwantyli danego rzędu jest nieskończenie wiele. MCVaR jest definiowana jako najgorsza oczekiwana realizacja w ramach kwantyla danego rzędu (tzn. najmniejsza, jeśli większe wartości są preferowane).

MCVaR jest skalarną miarą ryzyka wielowymiarowego, pozwalającą na parametryzowanie poziomu awersji do ryzyka od skrajnego pesymizmu po neutralność względem ryzyka poprzez zmianę rzędu kwantyla. Miara jest typem pesymistycznej miary ryzyka i definiuje niemalże ten sam rodzaj ryzyka co popularna i dobrze zbadana warunkowa wartość zagrożona (Conditional Value-at-Risk – CVaR) [8].

* Praca wykonana w ramach grantu NCN N N111 4534400 „Wielowymiarowa warunkowa wartość zagrożona jako miara ryzyka".

Ściślej, dla ryzyka jednowymiarowego miary są tożsame, natomiast dla ryzyka wielowymiarowego różnią się definicją kwantyli – definicja CVaR prowadzi do jednoznacznie określonego kwantyla wielowymiarowego danego rzędu, którym jest hiperostrosłup foremny z wierzchołkiem zaczepionym w najgorszej realizacji wielowymiarowej zmiennej losowej.

Istotną zaletą MCVaR jest jej model optymalizacyjny, który pozwala na efektywne rozwiązywanie rzeczywistych problemów decyzyjnych w warunkach ryzyka, opierając się na pełnej informacji niesionej przez wielowymiarową zmienną losową. Ze wstępnej analizy wynika, że model optymalizacyjny wielowymiarowej warunkowej wartości zagrożonej jest modelem programowania liniowego z nieskończoną liczbą ograniczeń (wynika to z niejednoznaczności kwantyla wielowymiarowego). Niemniej jednak dualna postać tego modelu może być efektywnie rozwiązywana przy użyciu techniki generacji kolumn opartej na dekompozycji Dantziga-Wolfe'a [4], dla której zadanie nadrzędne jest problemem liniowym, a podrzędne – nieliniowym, niewypukłym (z uwagi na funkcję połączenia określającą strukturę zależności pomiędzy zmiennymi losowymi).

MCVaR, w odróżnieniu od CVaR, pozwala na zastosowanie techniki generacji kolumn, która ma własność dostępu do potencjalnie nieskończonej liczby realizacji wielowymiarowej zmiennej losowej, gdyż są one generowane na bieżąco i nie muszą być przechowywane w pamięci komputera. Umożliwia to wyznaczenie rozwiązania optymalnego problemu wyboru w warunkach ryzyka, opierając się na wszystkich realizacjach wielowymiarowej zmiennej losowej, których liczba może być przeogromna – innymi słowy, na pełnej informacji niesionej przez wielowymiarową zmienną losową. Nie jest to możliwe w przypadku CVaR, której najbardziej efektywny obliczeniowo model optymalizacyjny [6] wymaga, aby wszystkie realizacje były przechowywane w pamięci komputera, co przekłada się na niewielką ilość informacji, na podstawie których wyznaczane jest rozwiązanie optymalne problemu.

1. Definicja wielowymiarowej warunkowej wartości zagrożonej

Rozważmy n-wymiarowy wektor losowy $\mathbf{R} = (R_1, \dots , R_n)^T$, którego każda składowa reprezentuje czynnik ryzyka. Ograniczymy przestrzeń ryzyka do wektorów $\mathbf{R} \in L_n^1\ (\Omega, F, \mathbf{P})$ o wartościach rzeczywistych oraz załóżmy, że czynniki ryzyka są w pełni substytucyjne, tj. wyrażone w tych samych jednostkach. Niech F_i będzie dystrybuantą zmiennej losowej R_i, $i = 1, \dots , n$, tj. $F_{R_i}(\eta) = \mathrm{P}(R_i \le \eta)$. Zmienne losowe R_i zależą od siebie w sensie stochastycznym i ich struktura zależności jest dana funkcją połączenia C. W szczególności H (ξ, …ζ) = $C(F_{R_1}(\xi), \dots F_{R_n}(\zeta))$, gdzie H jest dystrybuantą łącznego rozkładu wektora losowego **R**. Dalej, niech $F_{R_i}^{(-1)}$ będzie lewostronnie ciągłą odwrotnością F_{R_i} (funkcją kwantlową), tj. $F_{R_i}^{(-1)}(p) = \inf\{\eta : F_{R_i}(\eta) \geq \mathrm{p}\}$.

Dla ustalonego poziomu tolerancji $\beta \in (0,1]$ definiujemy wielowymiarową warunkową wartość zagrożoną ($\mathbf{MCVaR}_\beta$) jako:

$$\mathrm{MCVaR}_\beta(\mathbf{R}) = \frac{1}{\beta} \min_{u_i \in [\beta,1]} \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} \sum_{i=1}^{n} F_{R_i}^{(-1)}(p_i)\ dC(p_1, \dots, p_n)$$

$$\text{p. w. } C(u_1, \dots, u_n) = \beta. \tag{1}$$

Dla ustalonych poziomów $u_i \in (0,1]$ zdefiniujmy wielowymiarowy kwantyl rozkładu wektora losowego **R**:

$$\mathbf{Q}(u_1, \dots, u_n) = \{(q_1, \dots, q_n)^T \ :\ q_i = F_{R_i}^{(-1)}(u_i) \ \text{ dla } \ i = 1, \dots, n\}$$

Wprowadźmy zbiór wielowymiarowych kwantyli rzędu β:

$$\mathcal{S}_\beta = \{\mathbf{Q}(u_1, \dots, u_n) \ :\ C(u_1, \dots, u_n) = \beta\}$$

Jeśli nie ma skoku w optymalnym wielowymarowym β-kwantylu, wartość MCVaR równa się minimalnej warunkowej wartości oczekiwanej sumy czynników ryzyka, przy warunku $\mathbf{R} \leq \mathbf{Q}$ dla wszystkich $\mathbf{Q} \in \mathcal{S}_\beta$, tj.:

$$\mathrm{MCVaR}_\beta(\mathbf{R}) = \min_{\mathbf{Q} \in \mathcal{S}_\beta} \mathbb{E}(\mathbf{1}^\mathrm{T}\mathbf{R} | \mathbf{R} \leq \mathbf{Q})$$

Warto zauważyć, że $\mathbf{MCVaR}_\beta$ dąży do $\min_{\omega \in \Omega}(\mathbf{1}^\mathrm{T}\mathbf{R})$ dla $\beta \to 0$ i **R** ograniczonego z dołu oraz równa się $\mathbb{E}(\mathbf{1}^\mathrm{T}\mathbf{R})$, gdy $\beta = 1$. W związku z tym miara obejmuje całe spektrum ostrożnych postaw względem ryzyka, począwszy od skrajnej awersji, a skończywszy na neutralności względem ryzyka.

2. Związek miary z warunkową wartością zagrożoną

Warunkowa wartość zagrożona CVaR jest miarą ryzyka jednowymiarowego. Dla ustalonego poziomu $\beta \in (0,1]$ definiujemy CVaR_β jako średnią w ramach β-kwantyla, tj.:

$$\mathrm{CVaR}_\beta(R) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F_R^{(-1)}(p)\ dp$$

CVaR jest miarą koherentną (zob. np. [7]) i liczne badania empiryczne (zob. np. [1; 5; 8]) potwierdziły jej przydatność w różnych zagadnieniach finansowych. Miara ta jest również stosowana do pomiaru ryzyka wielowymiarowego – do miary przekazywana jest suma zmiennych losowych reprezentujących czynniki ryzyka, tj.:

$$\mathrm{CVaR}_{\beta}\left(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\right) = \frac{1}{\beta}\int_{0}^{\beta} F_{\mathbf{1}^{T}\mathbf{R}}^{(-1)}(p)\, dp \tag{2}$$

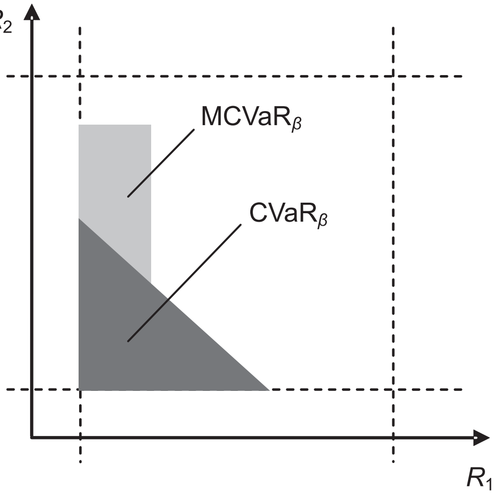
Warto zauważyć, że chociaż obie miary wyznaczają średnie w ramach kwantyli, w przypadku wielowymiarowym CVaR jest miarą bardziej ostrożną niż MCVaR. Ze wzoru (2) wynika, że CVaR używa półpłaszczyzny jako wielowymiarowego kwantyla i w związku z tym obejmuje wszystkie najgorsze przypadki (najmniejsze wartości) dla zadanego poziomu tolerancji β. Nie jest to prawdą w przypadku miary MCVaR, która obejmuje tylko pewną część najgorszych przypadków w ramach zadanego poziomu tolerancji β, ponieważ zgodnie z definicją (1) używa stożka jako kwantyla. W związku z tym dla dowolnego wektora losowego $\mathbf{R}$ i $\beta \in (0,1]$ zachodzi:

$$\mathrm{MCVaR}_{\beta}(\mathbf{R}) \geq \mathrm{CVaR}_{\beta}(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}) \tag{3}$$

W przypadku jednowymiarowym obie miary się pokrywają, tj. dla dowolnej zmiennej losowej R i $\beta \in (0,1]$:

$$\mathrm{MCVaR}_{\beta}(R) = \mathrm{CVaR}_{\beta}(R) \tag{4}$$

Rysunek 1 przedstawia graficzne porównanie miar $\mathbf{CVaR}_{\beta}$ i $\mathbf{MCVaR}_{\beta}$ dla dwuwymiarowego wektora losowego $\mathbf{R}$ ograniczonego z dołu i z góry.



Rys. 1. CVaR_{β} i MCVaR_{β} dla dwuwymiarowego wektora losowego

3. Własności miary

Wielowymiarowa warunkowa wartość zagrożona $MCVaR_{\beta}$ ma następujące własności:

(i) $MCVaR_{\beta}$ jest translacyjnie ekwiwariantna (translation-equivariant), tj.:

$$MCVaR_{\beta}\ (R + c) = MCVaR_{\beta}\ (R) + 1^{T} c$$

dla stałego wektora c,

(ii) $MCVaR_{\beta}$ jest dodatnio homogeniczna (positively homogenous), tj.:

$$MCVaR_{\beta}\ (\lambda R) = \lambda\ MCVaR_{\beta}\ (R)$$

gdy $\lambda > 0$.

(iii) $MCVaR_{\beta}$ w ogólności nie jest monotoniczna, tj. jeśli:

$$R_1(\omega) \geq R_2(\omega) \text{ dla każdego } \omega \in \Omega$$

to nie zawsze (iv) $MCVaR_{\beta}$ jest nadaddytywna (superadditive) w następującym sensie:

$$\mathrm{MCVaR}_{\beta}(\mathbf{R}) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MCVaR}_{\beta}(R_i)$$

Dowód

Własności (i) i (ii) są oczywiste z definicji $MCVaR_{\beta}$.

Pokażmy kontrprzykład jako dowód (iii). Rozważmy dwa losowe wektory $\mathbf{R_1}$ i $\mathbf{R_2}$ z następującymi rozkładami:

i	$\mathbf{R_1}$ (ω_i)	$\mathbf{R_2}$ (ω_i)	**P** (ω_i)
1	$(1;0)^T$	$(1;0)^T$	0,1
2	$(0;1)^T$	$(0;1)^T$	0,1
3	$(2;2)^T$	$(1;1)^T$	0,8

Zachodzi relacja $\mathbf{R_1}$ (ω) $\geq$ $\mathbf{R_2}$ (ω) dla każdego $\omega \in \Omega$. Obliczmy wartość $\mathbf{MCVaR_{0,2}}$ ($\mathbf{R_1}$):

$$\mathrm{MCVaR}_{0,2}(\mathbf{R}_1) = \frac{1}{0,2}((1+0)\cdot 0,1 + (0+1)\cdot 0,1) = 1$$

W przypadku $\mathbf{MCVaR_{0,2}}$ ($\mathbf{R_2}$) atomy prawdopodobieństwa zostaną podzielone z uwagi na fakt, że wektory $(1;0)^T$, $(0;1)^T$ i $(1;1)^T$ leżą na obwodzie stożka (kwantyla). W związku z tym wartość $\mathbf{MCVaR_{0,2}}$ ($\mathbf{R_2}$) może być wyznaczona przez rozwiązanie następującego zadania optymalizacji:

$$\min_{\mathrm{w}_1,\mathrm{w}_2} \frac{1}{0,2}((1+0)\cdot 0,1\mathrm{w}_1 + (0+1)\cdot 0,1\mathrm{w}_2 + (1+1)\cdot 0,8\mathrm{w}_1\mathrm{w}_2)$$

$$\text{p.w. } 0,1w_1 + 0,1w_2 + 0,8w_1w_2 = 0,2$$

$$0 \leq \mathbf{w}_i \leq 1 \text{ dla } i = 1,2$$

Po rozwiązaniu dostajemy $\mathrm{MCVaR}_{0,2}(\mathbf{R}_2) = 13/9 > 1 = \mathrm{MCVaR}_{0,2}(\mathbf{R}_1)$. W związku z tym MCVaR nie jest monotoniczna. W celu udowodnienia własności (iv) użyjemy zależności (3) i (4) oraz faktu, że CVaR jest nadaddytywna (zob. [7]). Wykorzystując powyższe dostajemy:

$$\mathrm{MCVaR}_\beta(\mathbf{R}) \geq \mathrm{CVaR}_\beta\left(\mathbf{1}^\mathrm{T}\mathbf{R}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{CVaR}_\beta(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{MCVaR}_\beta(R_i)$$

Artzner i in. [2; 3] nazywają miarę ryzyka koherentą, jeżeli jest translacyjnie ekwiwariantna, dodatnio homogeniczna, monotoniczna i nadaddytywna. MCVaR_β nie jest koherentna w tym sensie, ponieważ nie jest monotoniczna [9].

Rozważmy następujący przypadek szczególny związany z optymalizacją portfela czynników ryzyka: Jesteśmy zainteresowani wyborem optymalnych proporcji czynników ryzyka $\boldsymbol{R}_i$ w sensie miary, skalowanych wagami portfela $\boldsymbol{x}_i$, tj. maksymalizacją $\mathrm{MCVaR}_\beta\,(\mathrm{x} \circ \mathrm{R})$, gdzie $\circ$ jest operatorem iloczynu Hadamarda. Dla liniowo przekształconych wektorów losowych MCVaR_β zachowuje własność monotoniczności, tj. jeśli:

$$\mathrm{x} \circ \mathrm{R}(\omega) \geq \mathrm{R}(\omega) \text{ dla każdego } \omega \in \Omega$$

to:

$$\mathrm{MCVaR}_\beta\,(\mathrm{x} \circ \mathrm{R}) \geq \mathrm{MCVaR}_\beta\,(\mathrm{R})$$

Dowód

Założenie twierdzenia zachodzi tylko dla $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_\mathrm{P}, \mathrm{x}_\mathrm{N})^\mathrm{T}$, $\mathbf{R} = (\mathrm{R}_\mathrm{P}, \mathrm{R}_\mathrm{N})^\mathrm{T}$, $\mathrm{x}_\mathrm{P} \geq 1$ i $\mathrm{x}_\mathrm{N} \leq 1$, gdzie P i N są zbiorami indeksów zdefiniowanymi następująco: $P = \{p : R_p\,(\omega) \geq 0$ dla każdego $\omega \in \Omega\}$, $N = \{n : R_n\,(\omega) \leq 0$ dla każdego $\omega \in \Omega\}$.

Z definicji $\mathbf{MCVaR}_\beta$ wynika, że:

$$\mathrm{MCVaR}_\beta\left((\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_N)^\mathrm{T} \circ (\mathbf{R}_P, \mathbf{R}_N)^\mathrm{T}\right) \geq \mathrm{MCVaR}_\beta\left((\mathbf{R}_P, \mathbf{R}_N)^\mathrm{T}\right)$$

dla dowolnych $\mathrm{x}_\mathrm{p} \geq 1$ i $\mathrm{x}_\mathrm{N} \leq 1$.

W związku z tym MCVaR zachowuje koherentność w problemach, gdzie rozważona jest kombinacja liniowa czynników ryzyka.

Podsumowanie

Wielowymiarowa warunkowa wartość zagrożona jest skalarną, kwantylową miarą ryzyka modelowanego wielowymiarową zmienną losową. Zakłada się, że czynniki ryzyka są w pełni substytucyjne, tzn. wyrażone w tych samych jednostkach. Wielowymiarowa warunkowa wartość zagrożona jest miarą ekstremalną, umożliwiającą parametryzowanie poziomu awersji do ryzyka, począwszy od skrajnego pesymizmu, po neutralność względem ryzyka poprzez zmianę rzędu kwantyla. Miara w ogólności nie jest miarą koherentną, ale dla problemu wyboru portfela czynników ryzyka zachowuje własność koherentności. Istotną zaletą wielowymiarowej warunkowej wartości zagrożonej jest możliwość wyznaczenia optymalnego portfela czynników ryzyka z wykorzystaniem techniki generacji kolumn w oparciu o pełną informację niesioną przez wielowymiarową zmienną losową. Nie jest to możliwe przy użyciu innych typowych kwantylowych miar ryzyka, jak wartość zagrożona czy warunkowa wartość zagrożona.

Literatura

1. Andersson F., Mausser H., Rosen D., Uryasev S., Credit risk optimization with Conditional Value-at-Risk criterion. „Mathematical Programming" 2001, No. 89.
2. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., Thinking coherently, „Risk" 1997, No. 10.
3. Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., Coherent measures of risk. „Mathematical Finance" 1999, No. 9.
4. Dantzig G.B., Wolfe P., The decomposition algorithm for linear programs, „Econometrica" 1961, No. 29(4).
5. Mansini R., Ogryczak W., Speranza M.G., LP solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison, „IMA Journal of Management Mathematics" 2003, No. 14.
6. Ogryczak W., Śliwiński T., On solving the dual for portfolio selection by optimizing Conditional Value at Risk, „Computational Optimization and Applications" 2011, No. 50.
7. Pflug G.Ch., Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk, in: Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications, ed. S. Uryasev, Kluwer A.P., Dordrecht 2000.
8. Rockafellar R.T., Uryasev S., Optimization of Conditional Value-at-Risk. „Journal of Risk" 2000, No. 2.
9. Rockafellar R.T., Uryasev S., Conditional Value-at-Risk for general distributions. „Journal of Banking and Finance" 2002, No. 26.

THE MULTIVARIATE CONDITIONAL VALUE-AT-RISK AS A MEASURE OF RISK

Summary

The Multivariate Conditional Value-at-Risk (MCVaR) is a scalar risk measure for multivariate risks modeled by multivariate random variables. It is assumed that the univariate risk components are perfect substitutes, i.e., they are expressed in the same units. MCVaR is a quantile risk measure that allows one to emphasize the consequences of more pessimistic scenarios. By changing the level of the quantile, the measure permits to parameterize prudent attitudes toward risk ranging from extreme risk aversion to risk neutrality. In terms of definition, MCVaR is slightly different from the popular and well-researched Conditional Value-at-Risk (CVaR). Nevertheless, this small difference allows one to efficiently solve MCVaR portfolio optimization problems based on the full information carried by a multivariate random variable using column generation technique, which is not possible in the case of CVaR.