

**Adrianna Mastalerz-Kodzis**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# ZASTOSOWANIE FUNKCJI HÖLDERA W MODELU FRAMA

## Wprowadzenie

Analiza techniczna dostarcza wiele różnych metod umożliwiających generowanie sygnałów kupna i sprzedaży walorów giełdowych. W literaturze można zaobserwować dwa podejścia analizy technicznej: pierwsze – oparte na średnich ruchomych, oraz drugie – wykorzystujące teorię fraktali. Połączenie tych dwóch podejść doprowadziło do wykształcenia narzędzia analizy technicznej – średniej ruchomej z zastosowaniem elementów geometrii fraktalnej, czyli modelu FRAMA.

Celem artykułu jest wprowadzenie do modelu FRAMA, zamiast wymiaru fraktalnego – lokalnego wymiaru fraktalnego. Artykuł składa się z trzech części. W pierwszej krótko opisano konstrukcję modelu FRAMA ze szczególnym uwzględnieniem własności fraktalnych. W części drugiej wprowadzono pojęcie lokalnego wymiaru fraktalnego i podano teoretyczną konstrukcję uogólnionego modelu FRAMA. Część trzecia ma charakter empiryczny, opiera się na danych zaczerpniętych z GPW w Warszawie i jest porównaniem omawianych modeli.

## 1. Model FRAMA

Model FRAMA (*FRactal Adaptive Moving Average*) jest modyfikacją wykładniczej średniej ruchomej poprzez zastosowanie wymiaru fraktalnego [Acheilis, 1998; Borowski, 2005; Ehlers, 2005; Kaufman, 2005].

### 1.1. Wykładnik Hursta, wymiar fraktalny

Jedną z metod obliczenia wykładnika Hursta jest metoda analizy przeskalowanego zakresu *R/S* (*Rescaled range analysis*). Przeprowadzając analizę szeregów czasowych, np. cen papierów wartościowych, wykres zależności ceny od czasu przekształca się w wykres podwójnie logarytmiczny, przedstawiający za-

leżność logarytmu  $R/S$  od logarytmu liczby obserwacji. W literaturze można znaleźć prace przedstawiające algorytm wyznaczania współczynnika  $R/S$ , którego wartość pozwala na obliczenie wykładnika Hursta [Peters, 1997; Stawicki, Janiak, Müller-Frańczek, 1998].

Wykładnik Hursta jest współczynnikiem kierunkowym linii regresji  $\log E(R/S)_n = H \log n + \log c$ , gdzie  $E(R/S)_n$  jest wartością oczekiwaną przeskalowanego zakresu.

Poniżej zostaje wyprowadzona zależność pomiędzy wartością wykładnika Hursta  $H$  a wartością wymiaru fraktalnego  $D$ .

Oznaczono symbolem  $Graph f = \{(t, f(t)) : t \in [0,1]\}$  wykres funkcji  $f$ . Wymiar wykresu funkcji  $f$  można obliczyć na przykład metodą pojemnościową. Własności statystyczne wykresu zostają niezmiennione, jeśli  $f(t)$  zastąpi się przez  $f(2t)/(2^H)$ .

1. Należy pokryć wykres  $N$  małymi kwadratami o boku długości  $r$ .
2. Należy rozważyć kwadraty o boku długości  $r/2$ . Z niezmienniczości skali oczekuje się, że obraz pierwszej połowy odcinka  $(0,1/2)$  powinien być  $(1/2)^H$  razy mniejszy od obrazu całego odcinka. To samo dla odcinka  $(1/2,1)$ . Dla każdej połowy potrzeba  $2N/(2^H)$  kwadratów o boku  $r/2$ , dla obu odcinków  $2 \cdot \frac{2N}{2^H} = \frac{2^1 \cdot 2N}{2^H} = 2^{2-H} \cdot N$  kwadratów o boku  $r/2$ .
3. To samo rozumowanie dla każdej ćwiartki daje  $(2^{2-H})^2 \cdot N$  kwadratów o boku  $r/(2^2)$ .
4. Ogólnie  $(2^{2-H})^k \cdot N$  kwadratów o boku  $r/(2^k)$ . W granicy otrzymujemy wymiar fraktalny wykresu funkcji

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \left[ (2^{2-H})^k \cdot N \right]}{\log \frac{2^k}{r}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2-H)k \cdot \log 2 + \log N}{k \cdot \log 2 - \log r} \stackrel{\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]}{=} \\ = \frac{(2-H)\log 2}{\log 2} = 2 - H$$

Wymiar pojemnościowy wykresu jest równy  $D = dim_{Box}(Graph f)$ , jeśli przy dzieleniu boku kwadratu (pokrycia wykresu) przez 2, liczba kwadratów zwiększa się  $2^D$  razy.

## 1.2. Średnia ruchoma z zastosowaniem wymiaru fraktalnego

Wymiar fraktalny może zostać wykorzystany do konstrukcji parametru  $a$  w wykładniczej średniej ruchomej (EMA – *Exponential Moving Average*). Wykładnicza średnia ruchoma, będąca modyfikacją liniowo ważonej średniej, nadaje większą wagę bardziej aktualnym cenom:

$$EMA = \frac{C_0 + aC_{-1} + a^2C_{-2} + \dots + a^{N-1}C_{-N+1}}{1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}}, \quad (1)$$

gdzie:

$a < 1$ ,

$C_0$  – cena zamknięcia na ostatniej sesji,

$C_{-n}$  – cena zamknięcia  $n$  sesji wcześniej,  $n = 1, \dots, -N + 1$ .

W konstrukcji modelu FRAMA parametr  $a$  jest funkcją wymiaru fraktalnego:  $a = \exp(-4,6(D-1))$ . Można zastosować średnią ruchomą na rynku, np. akcji, czy też indeksów giełdowych:

- w trendzie horyzontalnym FRAMA zmienia się bardzo wolno, potwierdzając tym samym tworzenie się formacji bazy,
- w trendzie spadkowym lub wzrostowym zmiana FRAMA jest duża i odpowiada szybkości zmiany ceny w trendzie.

## 2. Uogólniony model FRAMA

W poniższej konstrukcji modelu zamiast globalnego wymiaru fraktalnego wykresu funkcji do konstrukcji średniej posłuży lokalny wymiar fraktalny.

### 2.1. Lokalny wymiar fraktalny wykresu funkcji

Wielkością charakteryzującą regularność funkcji w punkcie jest jej wykładnik Höldera w tym punkcie.

Niech  $(X, d_X)$  i  $(Y, d_Y)$  będą przestrzeniami metrycznymi\*. Funkcję  $f: X \rightarrow Y$  nazywa się funkcją Höldera o wykładniku  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), jeśli dla każdych  $x, y \in X$  takich, że  $d_X(x, y) < 1$  funkcja spełnia nierówność  $d_Y(f(x), f(y)) \leq$

\* Definicje funkcji klasy Höldera oraz wykładników Höldera i ich własności zaczerpnięto z prac [Peltier, Levy Vehel, 1995; Daoudi, Levy Vehel, Meyer, 1998; Mastalerz-Kodzis, 2003].

$c \cdot (d_X(x, y))^\alpha$  z dodatnią stałą  $c$ . Niech będzie dana funkcja  $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$  ( $D \subset \mathfrak{R}$ ) oraz parametr  $\alpha \in (0, 1)$ . Funkcja  $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest funkcją klasy  $C^\alpha$  Höldera ( $f \in C^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $c > 0$  oraz  $h_0 > 0$  takie, że dla każdego  $x \in X$  oraz wszystkich  $h$  takich, że  $0 < h \leq h_0$  spełniona jest nierówność:  $|f(x+h) - f(x)| \leq c h^\alpha$ .

Niech  $x_0$  będzie dowolnym punktem z dziedziny funkcji  $f$  ( $x_0 \in D \subset \mathfrak{R}$ ). Funkcja  $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$  jest w punkcie  $x_0$  funkcją klasy  $C_{x_0}^\alpha$  Höldera ( $f \in C_{x_0}^\alpha$ ), jeżeli istnieją stałe  $\varepsilon > 0$ ,  $c > 0$  takie, że dla każdego  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  spełniona jest nierówność:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c |x - x_0|^\alpha.$$

Punktowym wykładnikiem Höldera funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  nazywa się liczbę  $\alpha_f(x_0)$  daną wzorem  $\alpha_f(x_0) = \sup \{ \alpha : f \in C_{x_0}^\alpha \}$ . Funkcją Höldera dla funkcji  $f$  nazywa się funkcję, która każdemu punktowi  $x \in D$  przyporządkowuje liczbę  $\alpha_f(x)$ .

Niech  $\alpha_f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  będzie funkcją Höldera dla ciągłej funkcji  $f: [0, 1] \rightarrow \mathfrak{R}$ . Jeśli funkcja Höldera  $\alpha_f$  jest ciągła w punkcie  $x$ , to  $\dim_{Box}^x(x, f(x))$  istnieje oraz dla każdego  $x \in [0, 1]$  zachodzi równość  $\dim_{Box}^x(x, f(x)) = 2 - \alpha_f(x)$ .

Funkcję Höldera  $t \rightarrow H(t)$  można estymować dla dowolnych danych empirycznych [Peltier, Lévy Véhel, 1995]. Należy oznaczyć symbolem  $\{B_{i,n} = B_H(\frac{i}{n}), 0 \leq i \leq n\}$  proces losowy o wykładniku Hursta  $H$ . Niech  $S_n$  będzie dane wzorem  $S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |B_{i+1,n} - B_{i,n}|$  oraz  $H_n = -\frac{\log(\sqrt{\pi/2} S_n)}{\log(n-1)}$ .

Wówczas  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = H$ .

Ciągłość funkcji  $H$  gwarantuje, że dla dowolnego  $t_0 \in [0, 1]$  istnieje sąsiedztwo tego punktu, w którym można estymować funkcję  $H$  tak, jakby była w tym sąsiedztwie funkcją stałą. Niech  $n$  będzie długością szeregu czasowego. Niech  $l < k < n$  będzie długością sąsiedztwa używaną do estymacji funkcji  $H$ . Funkcja będzie estymowana dla  $t$  z przedziału  $[k/n, 1 - (k/n)]$ . Nie tracąc ogólności można założyć, że  $m = n/k$  jest liczbą całkowitą\*.

\* Gdy  $n$  nie jest iloczynem liczb całkowitych  $k, m$ , to można estymować ostatnie (bliższe terazniejszości)  $n'$  wartości funkcji Höldera, dla  $n'$  mającego dzielniki całkowite.

Estymator jest postaci  $\hat{H}_{i/(n-1)} = -\frac{\log(\sqrt{\pi/2} S_{k,n}(i))}{\log(n-1)}$ , gdzie

$$S_{k,n}(i) = \frac{m}{n-1} \sum_{j=i-k/2}^{i+k/2} |B_{j+1,n} - B_{j,n}|.$$

## 2.2. Średnia ruchoma z zastosowaniem lokalnego wymiaru fraktalnego

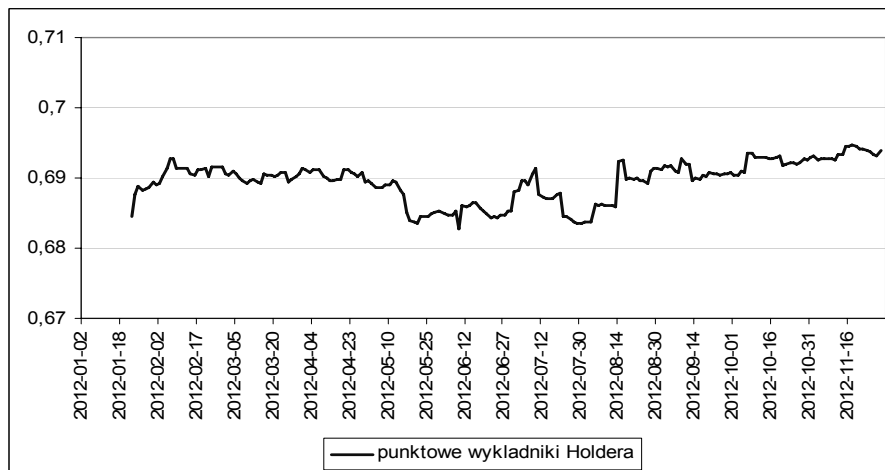
Do wzoru (1) zamiast stałego parametru  $a < 1$  można użyć zmieniającej się pod wpływem czasu funkcji  $a(x)$ . Wówczas wykładnicza średnia ruchoma będzie liczona zgodnie ze wzorem:

$$EMA_{N,C,a(x)} = \frac{C_0 + a(x)C_{-1} + (a(x))^2 C_{-2} + \dots + (a(x))^{N-1} C_{-N+1}}{1 + a(x) + (a(x))^2 + \dots + (a(x))^{N-1}}. \quad (2)$$

Stałą wartość parametru  $H$  zastąpiono zależnym od czasu wykładnikiem Höldera, czyli wymiar  $D$  lokalnym wymiarem pojemnościowym.

## 3. Zastosowanie modeli FRAMA na rynku kapitałowym

Analizę empiryczną przeprowadzono na podstawie wartości indeksu WIG20 w okresie 02.01.2012-30.11.2012. Obliczono wartość wykładnika Hursta ( $H = 0,6895$ ) w badanym okresie oraz wyestymowano punktowe wykładniki Höldera. Wykres punktowych wykładników Höldera zamieszczono poniżej (rysunek 1).



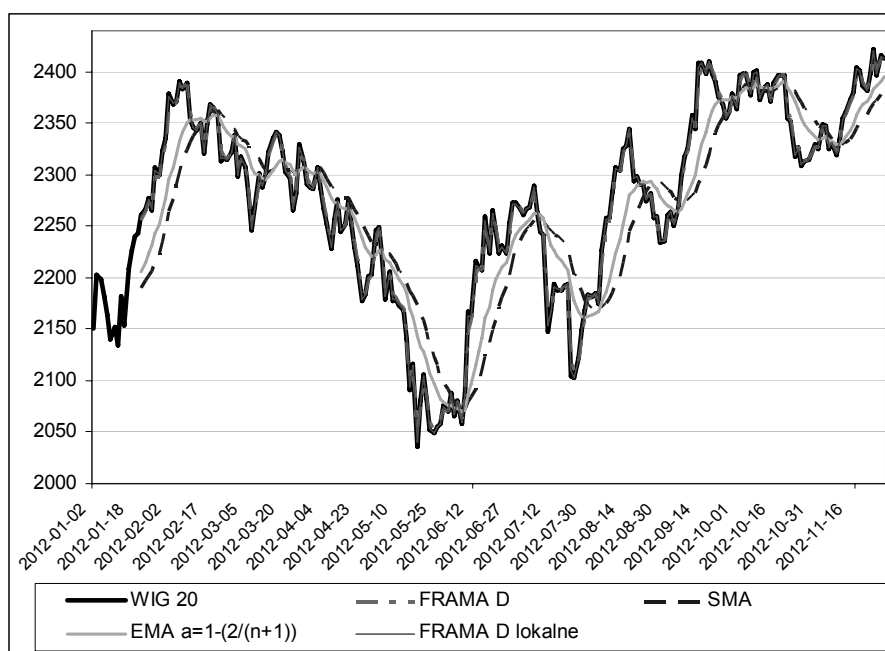
Rys. 1. Punktowe wykładniki Höldera dla indeksu WIG20 w okresie 02.01.2012-30.11.2012

Na rysunku 2 przedstawiono kolejno wartości: indeksu WIG20 oraz średnich: SMA, EMA D (dla stałej wartości wymiaru fraktalnego  $D$  wykresu), EMA dla parametru  $a = 1 - 2/(n + 1)$  oraz EMA dla wartości lokalnego wymiaru pojemnościowego wykresu. Z uwagi na to, iż wartości modeli EMA D i EMA D lokalny są bliskie wartościom indeksu (na rysunku 2 nie widać różnicy) przybliżenie rysunku dla danych z listopada 2012 przedstawia rysunku 3. Następnie obliczono wariancję resztową dla poszczególnych modeli. Wartości przedstawia tabela 1.

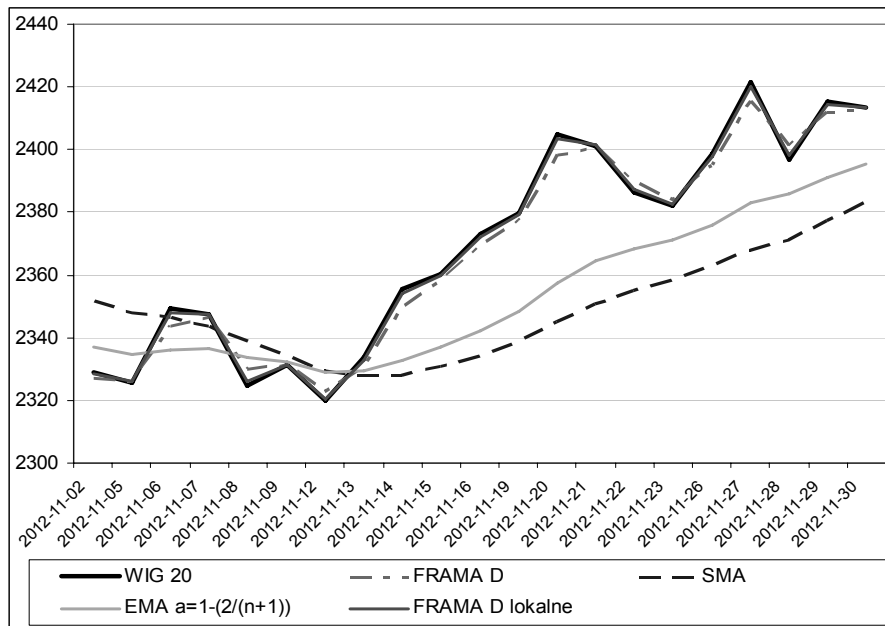
Tabela 1

Wartości wariancji resztowej

Model	Wariancja resztowa
SMA	2746,684
EMA $a = 1 - 2/(n + 1)$	1450,228
EMA D	33,61575
EMA D lokalne	2,271205



Rys. 2. Wartości indeksu WIG20 w okresie 02.01.2012-30.11.2012 oraz wybrane średnie



Rys. 3. Wartości indeksu WIG20 w okresie 02.11.2012-30.11.2012 oraz wybrane średnie

Z tabeli 1 wynika, że stopień dopasowania modeli średnich do danych empirycznych jest najlepszy dla modeli wykorzystujących wartości D oraz D lokalne.

Wykres generuje sygnały kupna i sprzedaży, wskazuje lokalne trendy. Można zatem wnioskować, że:

1. Na rysunkach 2 i 3 zaprezentowana została 15 sesyjna FRAMA D i FRAMA D lokalna oraz 15 sesyjna średnia ruchoma zwykła (SMA) i EMA dla stałej wartości  $a$ . Wynika z nich, że:
  - średnia FRAMA jako rodzaj adaptacyjnej średniej ruchomej jest położona bliżej ceny niż pozostałe średnie,
  - FRAMA znacznie szybciej sygnalizuje zmianę trendu z horyzontalnego na wzrostowy lub spadkowy.
2. Od połowy stycznia do końca stycznia cena znajdowała się w kanale wzrostowym.
3. Od lutego do końca maja można odnotować tendencję spadkową, cena znajduje się w trendzie spadkowym. W tym samym okresie FRAMA zniżkuje potwierdzając tym samym trend spadkowy.
4. W okresie od początku czerwca do końca listopada można zauważyć powolny trend wzrostowy. W tym samym okresie wszystkie średnie wskazują trend boczny.
5. W okresie silnej fali zwyżkowej sygnały kupna i sprzedaży na FRAMA wyprzedzają analogiczne wskazania dla średniej SMA.

## Podsumowanie

Model FRAMA wykorzystujący globalny wymiar fraktalny wykresu oraz lokalne wartości tego wymiaru szybciej sygnalizuje zmiany trendu oraz określa sygnały kupna i sprzedaży aniżeli modele SMA i EMA dla stałej wartości  $a$ . Ponadto modele FRAMA cechują się bardzo dobrym dopasowaniem do danych empirycznych. Model FRAMA oraz uogólniony model FRAMA może być stosowany do generowania sygnałów kupna i sprzedaży na rynku kapitałowym. Model uogólniony uwzględnia dynamikę zmian wymiaru fraktalnego, zatem wydaje się, że jego zastosowanie w procesie decyzyjnym nie jest bez znaczenia.

## Literatura

- Achelis S. (1998): *Analiza techniczna od A do Z*. Oficyna Wydawnicza LT&P, Warszawa.
- Borowski K. (2005): *Nowe metody obliczania średnich ruchomych i ich zastosowanie w analizie technicznej*. Tom 1. Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław, s. 42-54.
- Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y. (1998): Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity. "Journal of Constructive Approximations" 014(03), s. 349-385.
- Ehlers J. (2005): Fractal Adaptive Moving Average. „Technical Analysis of Stock & Commodities” October.
- Kaufman P. (2005): *New Trading Systems and Methods*. John Wiley & Sons, New York.
- Mastalerz-Kodzis A. (2003): *Modelowanie procesów na rynku kapitałowym za pomocą multifraktali*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Peltier R.F., Lévy Véhel J. (1995): *Multifractional Brownian Motion: Definition and Preliminary Results*. INRIA Rocquencourt, Rapport de recherche No. 2645.
- Peters E. (1997): *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons, New York, polskie wydanie: E. Peters (1997): *Teoria chaosu a rynki finansowe. Nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*. Wig Press, Warszawa.
- Stawicki J., Janiak E., Müller-Frączek E. (1998): Fractional Differencing of Time Series – Hurst Exponent, Fractal Dimension. "Dynamic Econometric Models", Vol. 3.



---

## APPLICATION OF HÖLDER FUNCTION IN FRAMA'S MODEL

### Summary

The aim of this work is to present models to support an investor in decision making, which includes new market tendencies. The process of investing into financial markets is a dynamic process depending on frequent changes, witch direction and impact is difficult to predict in the long periods of time.

The article presents theoretical basis and practical applications of selected quantity methods that can be used in building investing strategy, where elements of fractal analyses and of classical statistics theories are included. The new approach to create a model of securities, based on fractal analysis with Hölder function is an alternative to classical models. The article consists of two basic parts. The first presents formulas and references as well as applied methods for data analyses; the other is of empiric character.