

Monika Miśkiewicz-Nawrocka

MODELE EKONOMICZNE Z DYNAMIKĄ CHAOTYCZNĄ

Wprowadzenie

Od czasu pojawienia się w literaturze pojęcia deterministycznego chaosu można znaleźć wiele przykładów układów dynamicznych (zarówno z czasem ciągłym, jak i z czasem dyskretnym) o chaotycznej dynamice. Są wśród nich układy z różnych dziedzin nauki: matematyczne, fizyczne, chemiczne, biologiczne, medyczne, a także ekonomiczne.

Do opisu zjawisk ekonomicznych od połowy XX wieku stosuje się nieliniowe modele deterministyczne. Podejście takie zaproponowali M. Kalecki, J. Tinberger i N. Kaldor, którzy do opisu cykli koniunkturalnych [7, s. 261-273] wykorzystali modele deterministyczne. Jednak ich modele nie opisywały zbyt dobrze złożonej dynamiki zjawisk ekonomicznych [17, s. 113]. W 1975 roku R. May i J.R. Beddington [13, s. 35, za: 18] zasygnalizowali możliwość zastosowania teorii chaosu w ekonomii. Od tego czasu zbudowano wiele nowych modeli ekonomicznych z dynamiką chaotyczną oraz zidentyfikowano chaos w wielu już istniejących. Nieliniowe układy chaotyczne wzbudziły tak duże zainteresowanie wśród ekonomistów, ponieważ pozwalają generować szeregi o bardzo skomplikowanej dynamice.

W artykule zostaną zaprezentowane wybrane modele ekonomiczne o chaotycznej dynamice.

1. Chaos deterministyczny

Początki teorii chaosu sięgają końca XIX wieku i są związane z pracami francuskiego matematyka Henri Poincaré. Poincaré, badając zachowanie się pojedynczych trajektorii trzech ciał niebieskich, odkrył istnienie bardzo złożonych struktur – trajektorii chaotycznych [19, s. 11]. Do prekursorów teorii deterministycznego chaosu można również zaliczyć: P. Fatou, G.M. Julia (początek XX wieku) [18, s. 16], G. Birkhoffa (lata dwudzieste XX wieku), M.L. Cartwrighta i J.E. Littlewooda (lata czterdzieste), S. Smale'a, A.N. Kołmogorowa i jego

współpracowników (lata sześćdziesiąte) [19, s. 11]. Prowadzone przez nich badania wykazały nieznaną wcześniej własność dynamiki nieliniowej oraz bardzo skomplikowaną i nieregularną dynamikę prostych nieliniowych układów dynamicznych [18, s. 16]. Wśród wielu badaczy różnych dyscyplin naukowych teorię chaosu najbardziej rozpowszechniło odkrycie Edwarda Lorenza w latach siedemdziesiątych*. Lorenz odkrył podstawową cechę nieliniowych układów chaotycznych – wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych. Rozgłos teorii chaosu i jej zastosowaniom do modelowania układów dynamicznych dodatkowo nadała praca M.J. Feigenbauma, który jako pierwszy wykorzystał komputery do badania słabo rozumianej w latach 70. nieliniowej dynamiki [15, s. 32, 286].

Termin „chaos deterministyczny” został wprowadzony w 1975 roku przez T.Y. Li i J.A. Yorke’a, jednak w literaturze można znaleźć wiele definicji chaosu w deterministycznych układach dynamicznych. Definicje te nie zawsze są równoważne (jednoznaczne), ponieważ wywodzą się z różnych dyscyplin matematycznych, tj. teoria równań różniczkowych i różnicowych, jakościowa teoria układów dynamicznych czy teoria ergodyczna [23, s. 82]. Pomimo wielości definicji deterministycznego chaosu spotykanych w literaturze, badacze (naukowcy) są zgodni, że prawidłowa definicja chaosu powinna dobrze oddawać naturę dynamiki chaotycznej, czyli zakładać istnienie dynamiki nieokresowej w badanym układzie deterministycznym, wrażliwość na zmianę warunków początkowych oraz istnienie pewnego istotnego mechanizmu deterministycznego odpowiedzialnego za rekurencyjne zachowanie się układu [16, s. 34].

Powszechnie stosowana definicja chaosu odwołuje się do twierdzenia T.Y. Li i J.A. Yorke’a o chaosie [23, s. 86]. Twierdzenie podaje stosunkowo łatwy do sprawdzenia warunek wystarczający istnienia dynamiki chaotycznej w układach dynamicznych o znanej funkcji generującej f . Najbardziej znanymi przykładami odwzorowań chaotycznych w sensie Li, Yorke’a są odwzorowanie logistyczne i odwzorowanie trójkątne. Niektóre z powstałych modeli ekonomicznych zostały skonstruowane tak, aby spełniały założenia i warunki twierdzenia Li, Yorke’a [23, s. 188-189]. Przykładem jest neoklasyczny model wzrostu Daya [5, s. 406-414]. Ponadto powstały również modele generowane przez chaotyczne odwzorowania matematyczne, w szczególności przez funkcję logistyczną. Przykładami są model wzrostu Havelmo-Stutzera [22, s. 253-276; 23, s. 192-197; 9, s. 122] oraz chaotyczny model popytu konsumpcyjnego Benhabiba i Daya [1, s. 113-118; 2, s. 37-55; 23, s. 199-201].

Podstawowym atrybutem dynamiki chaotycznej jest wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych. Definicja odwołująca się do pojęcia wrażli-

* Lorenz rozpoczął swoje prace w 1960 roku, ale społeczność naukowa doceniła je dopiero w latach 70. ubiegłego wieku.

wości została sformułowana przez R.L. Devaney [6, za: 23, s. 88] w 1987 roku. Według tej definicji układ dynamiczny (X, f) jest układem chaotycznym w zbiorze X , jeśli odwzorowanie f jest wrażliwe na zmianę warunków początkowych i topologicznie tranzytywne oraz zbiór punktów okresowych odwzorowania f jest gęsty w zbiorze X .

Miarą wspomnianej wrażliwości układu na zmianę warunków początkowych są wykładniki Lapunowa, które mierzą średnie tempo rozchodzenia się w przestrzeni stanów trajektorii początkowo bliskich sobie punktów. Im większa wartość dodatniego największego wykładnika Lapunowa, tym większa wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych, a także większy poziom chaosu. Istnienie w układzie więcej niż jednego dodatniego wykładnika określa się mianem hiperchaosu [12, s. 241]. Niektórzy autorzy uznają istnienie dodatniego największego wykładnika Lapunowa za warunek konieczny i wystarczający istnienia chaosu w układzie [9, s. 103-133].

Trajektorie typowego układu chaotycznego tworzą w przestrzeni stanów bardzo złożoną strukturę, tzw. dziwny atraktor, która nie wypełnia jej w sposób przypadkowy. Pojęcie „dziwnego atraktora” również jest stosowane do definiowania chaosu – układ jest chaotyczny, gdy ma dziwny atraktor [10, s. 88].

W praktyce do identyfikacji chaosu w procesach rzeczywistych wielu autorów posługuje się definicją mówiącą, że układ dynamiczny jest chaotyczny, gdy jest wrażliwy na zmianę warunków początkowych [23, s. 161; 20, za: 18, s. 19]. Zaletą tej definicji jest możliwość zweryfikowania jej za pomocą największego wykładnika Lapunowa oraz wymiaru korelacyjnego. Natomiast jej wadą jest fakt, że odnosi się tylko do układów dysypatywnych. W przypadku układów konserwatywnych do badania regularności dynamiki wykorzystuje się pojęcie entropii Kołomogorowa. Według tej definicji układ dynamiczny jest chaotyczny, gdy ma dodatnią, skończoną entropię [18, s. 19]. Nieskończona entropia oznacza, że układ jest losowy, natomiast entropia równa 0 oznacza, że układ jest deterministyczny.

2. Przykłady chaotycznych układów dynamicznych

2.1. Model Kaldora [7, s. 264-265; 18, s. 38-40]

Jednym z najwcześniejszych nieliniowych modeli ekonomicznych jest opublikowany przez N. Kaldora [11, s. 78-92] w 1940 roku model cyklu koniunkturalnego. Kaldor rozwinął i zmodyfikował model zaprezentowany przez M. Kaleckiego w pracy *Próba teorii koniunktury* w 1933 roku*. Model Kaldora układu dynamicznego z czasem ciągłym ma postać:

* Kalecki przedstawił swoje dzieło języku niemieckim na III Europejskiej Konferencji Towarzystwa Ekonometrycznego w Leyden w 1933 roku, a w 1935 roku *Próba teorii koniunktury* została opublikowana w języku angielskim i francuskim [7, s. 262].

$$\dot{Y} = \alpha(I(Y, K) - S(Y, K)), \quad (1)$$

$$\dot{K} = I(Y, K) - \delta K, \quad (2)$$

gdzie:

$Y = Y(t)$ – wielkość produkcji,

$K = K(t)$ – wartość kapitału zaangażowanego w produkcję,

$I = I(t)$ – poziom inwestycji,

$S = S(t)$ – poziom oszczędności,

$\delta > 0$ – współczynnik spadku kapitału,

α – parametr.

W swoim modelu Kaldor przyjął następujące założenia:

$$I_Y > 0, I_K < 0, 0 < S_Y < 1, S_K > 0, \quad (3)$$

oraz istnieje taki poziom produkcji \bar{Y} , że:

$$I_{YY} > 0 \text{ dla } Y < \bar{Y}, \quad (4)$$

oraz:

$$I_{YY} < 0 \text{ dla } Y > \bar{Y}, \quad (5)$$

gdzie dolne indeksy oznaczają pochodne odpowiadające i -temu argumentowi. Przedstawiony model generuje zachowania cykliczne na podstawie zmiennych endogenicznych.

Przyjmując $\dot{Y} = \Delta Y_{t+1}$, $\dot{K} = \Delta K_{t+1}$, otrzymujemy dyskretną wersję modelu Kaldora:

$$\Delta Y_{t+1} = \alpha(I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)), \quad (6)$$

$$\Delta K_{t+1} = I_t(Y_t, K_t) - \delta K_t. \quad (7)$$

Ponieważ $\Delta Y_{t+1} = Y_{t+1} - Y_t$, $\Delta K_{t+1} = K_{t+1} - K_t$, więc:

$$Y_{t+1} = \alpha(I_t(Y_t, K_t) - S_t(Y_t)) + Y_t, \quad (8)$$

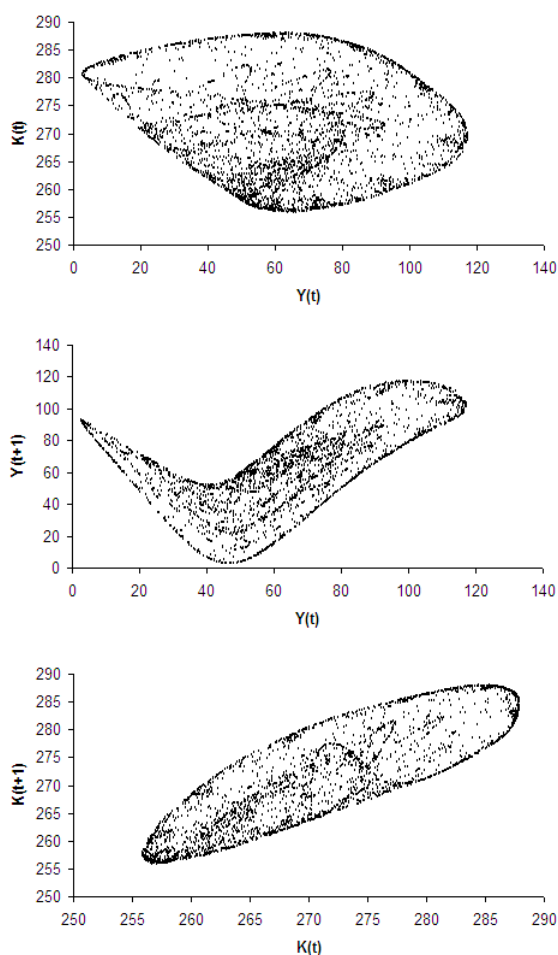
$$K_{t+1} = I_t(Y_t, K_t) + (1 - \delta)K_t. \quad (9)$$

W powyższym modelu funkcja oszczędności I_t może mieć postać:

$$I_t = c \cdot 2^{\frac{-1}{(dY_t + \varepsilon)^2}} + eY_t + a \left(\frac{f}{K_t} \right)^g, \quad (10)$$

gdzie $a, c, d, e, f, g, \varepsilon$ są parametrami. Funkcja (10) spełnia założenia Kaldora (3). Dla małych wartości parametru a trajektorie układu Kaldora zbiegają do punktu stałego, dla większych wartości a do cyklu, natomiast dla a przekraczającego pewną wartość krytyczną do dziwnego atraktora [18, s. 39].

Na rysunku 1 przedstawiono dziwny atraktor modelu Kaldora dla wartości parametrów: $a = 0,2$, $c = 20$, $d = 0,01$, $e = 0,05$, $f = 280$, $g = 4,5$, $s = 0,21$, $\alpha = 20$, $\delta = 0,05$, $\varepsilon = 0,00001$ oraz dla stanu początkowego $(Y_0, K_0) = (65, 265)$ w przestrzeniach (Y_t, K_t) , (Y_t, Y_{t+1}) , (K_t, K_{t+1}) .



Rys. 1. Dziwny atraktor w modelu Kaldora w przestrzeniach (Y_t, K_t) , (Y_t, Y_{t+1}) , (K_t, K_{t+1})

2.2. Model CARAL [3, s. 145-170, za: 4, s. 53-56]

Model CARAL (Constant Absolute Risk Aversion z funkcją produkcji Leontiewa) należy do szerokiej klasy modeli nakładających się pokoleń OLG.

Rozważmy gospodarkę złożoną z dwóch pokoleń: ludzi młodych i ludzi starszych. Członkowie każdego pokolenia żyją i konsumują w dwóch okresach swojego życia (młodość i starość), ale pracują tylko w pierwszym z nich, kiedy są młodzi. Niech c_t oraz c_{t+1} oznaczają poziomy konsumpcji w obu okresach, natomiast l_t – poziom pracy w okresie t . Głównym problemem młodego pokolenia na początku okresu t jest wybranie poziomów konsumpcji c_t i c_{t+1} oraz poziomu pracy l_t , tak aby maksymalizować ogólną użyteczność przy pewnych ograniczeniach budżetowych.

Oznaczmy przez $u_1(c_t)$ oraz $u_2(c_{t+1})$ funkcje użyteczności dla poziomu konsumpcji odpowiednio w pierwszym i drugim okresie. Niech $v(l_t)$ oznacza użyteczność pracy (poziom niezadowolenia z każdej wykonanej jednostki pracy). Załóżmy, że powyższe funkcje użyteczności wyrażają się następującymi wzorami:

$$u_1(c_t) = -re^{-c_t}, \quad r > 0, \quad (11)$$

$$u_2(c_{t+1}) = \frac{1}{\alpha} c_t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12)$$

$$v(l_t) = \frac{1}{\gamma} l_t^\gamma, \quad \gamma > 1. \quad (13)$$

Pierwsze wyrażenie opisuje funkcję użyteczności o stałej bezwzględnej awersji do ryzyka, natomiast dwa pozostałe o stałej względnej awersji do ryzyka. Rozwiązując wyżej postawiony problem optymalizacyjny, dynamika poziomu konsumpcji wyraża się wzorem*:

$$c_{t+1} = \left(l_t^\gamma - r c_t e^{-c_t} \right)^\alpha. \quad (14)$$

Powyższe równanie opisuje optymalną ewolucję poziomu konsumpcji pochodzącą z międzyokresowych wyborów konsumenta pomiędzy konsumpcją a czasem wolnym.

Wprowadzając do modelu liniową funkcję produkcji Leontiewa, dynamika pracy jest dana wzorem:

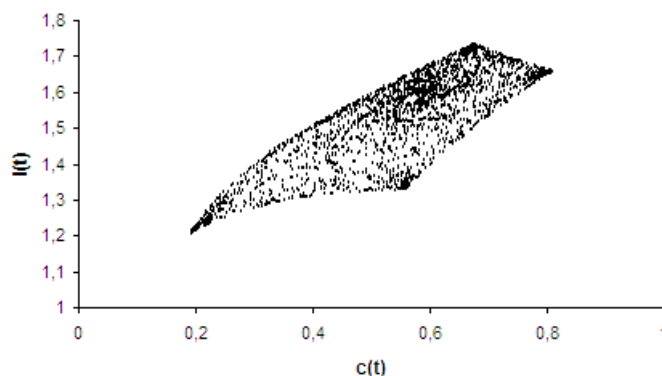
* Szczegółowe rozwiązanie zob. [14].

$$l_{t+1} = b(l_t - c_t). \quad (15)$$

Powyższe równania opisują ewolucję układu dynamicznego, gdzie parametr $\gamma > 1$ oznacza elastyczność użyteczności pracy, $0 < \alpha < 1$ jest elastycznością użyteczności przyszłej konsumpcji, b jest współczynnikiem produktywności, natomiast r oznacza „stromość” wykładniczej funkcji użyteczności.

Medio i Negroni [14] pokazali, że układ CARAL (14)-(15) ma punkt równowagi, który może zostać zaburzony poprzez zmianę wartości parametrów modelu. W szczególności, przy odpowiedniej zmianie parametrów, zachowanie dynamiki modelu pokazuje bardzo bogaty scenariusz, pojawiają się zachowania okresowe, nieokresowe, a nawet chaotyczne.

Dla wartości parametrów $\gamma = 1,2$, $\alpha = 0,49$, $r = 3$ oraz $b = 1,57$ dynamika układu (14)-(15) jest chaotyczna. Przy $t \rightarrow \infty$ trajektorie punktów zbiegają do ograniczonego zbioru, tworząc chaotyczny atraktor. Chaotyczny atraktor układu CARAL dla powyższych zaprezentowano na rysunku 2.



Rys. 2. Chaotyczny atraktor układu CARAL (14)-(15) dla stanu początkowego $c_0 = 0,3$, $l_0 = 1,3$

2.3. Model rynku pracy [8, s. 470-483]

Rozważmy pewną gospodarkę z wyróżnionym przedsiębiorstwem oraz wyróżnionym robotnikiem-konsumentem. Funkcja produkcji przedsiębiorstwa jest funkcją Cobba-Douglasa. Zakładając, że kapitał ma stałą wartość unormowaną do 1, funkcja produkcji wyraża się wzorem:

$$Y = DL^a, \quad 0 < a < 1, \quad D > 0, \quad (16)$$

gdzie D jest parametrem odzwierciedlającym stały postęp technologiczny.

Niech π oraz ω oznaczają odpowiednio całkowity zysk przedsiębiorstwa oraz stawkę płac. Załóżmy, że cena jednostki wytworzonego towaru p jest równa jeden. Wówczas funkcja zysku ma postać:

$$\pi = DL^a - \omega L. \quad (17)$$

Rozwiązując zadanie maksymalizacji zysku (4.19), otrzymujemy funkcję popytu na pracę daną wzorem:

$$L^D = f_1(\omega) = \left(\frac{\omega}{aD} \right)^{\frac{1}{a-1}}. \quad (18)$$

Robotnik-konsument maksymalizuje swoją użyteczność wyrażoną za pomocą funkcji CES:

$$u(C, L) = [C^b + (N - L)^b]^{\frac{1}{b}}, \quad b \in (-\infty, 1), \quad (19)$$

gdzie $N > 0$ jest maksymalną wielkością podaży siły roboczej, a $C > 0$ – poziomem konsumpcji konsumenta.

Założmy, że $N = 1$. Rozwiązując zadanie maksymalizacji funkcji użyteczności (19), przy ograniczeniu budżetowym $C = \omega L$, otrzymujemy optymalną funkcję podaży siły roboczej:

$$L^S = f_2(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{\frac{1}{b-1}}}. \quad (20)$$

Niech $z(\omega) = L - S$ oznacza nadwyżkowy popyt na pracę, gdzie L i S są bieżącą wartością popytu i podaży pracy. Płaca jest uporządkowana w sposób ciągły przez bieżący nadwyżkowy popyt na pracę zgodnie z następującą regułą:

$$\dot{\omega} = lz(\omega) = l(L - S), \quad l > 0, \quad (21)$$

gdzie l jest stałą.

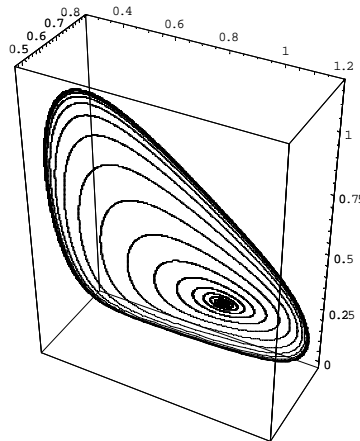
Ostatecznie model ma postać:

$$\dot{L} = g(L^D - L) = g \left(\left(\frac{\omega}{aD} \right)^{\frac{1}{a-1}} - L \right) = g(f_1(\omega) - L), \quad g > 0, \quad (22)$$

$$\dot{S} = d(L^S - S) = d \left(\frac{1}{1 + \omega^{\frac{b}{b-1}}} - S \right) = d(f_2(\omega) - S), \quad d > 0, \quad (23)$$

$$\dot{\omega} = l(L - S), \quad l > 0. \quad (24)$$

L. Fanti i P. Manfredi przeprowadzili numeryczne symulacje pokazujące, jak zmieniają się portrety fazowe powyższego modelu dla różnych wartości parametru g , przyjmując $D = 1$, $a = 0,15$, $b = -10$, $d = 4$, $l = 4$. Symulacje były przeprowadzone w otoczeniu punktu równowagi $E = (L^*, S^*, \omega^*) = (0.832, 0.832, 0.182)$. Warunkiem początkowym był punkt $E_1 = (0.825, 0.835, 0.18)$. Okazało się, że dla wartości $g > 1.068$ punkt E_1 jest lokalnie asymptotycznie stabilny, w szczególności dla $1.068 < g < 1.3$ E_1 jest stabilnym ogniskiem, a następnie staje się stabilnym węzłem. Dla $0,84 < g < 1.068$ trajektorie punktów położonych wystarczająco blisko punktu E_1 początkowo oddalają się od siebie, a następnie są zbieżne do stabilnego cyklu granicznego. W przypadku gdy $0.82 < g < 0.84$, cykl wykazuje małe oscylacje dla popytu i podaży. Natomiast gdy $0.62 < g < 0.82$, trajektorie punktów „wędrują” w sposób nieregularny, losowy w ograniczonym obszarze na płaszczyźnie (L, S) . Przy $t \rightarrow \infty$ trajektorie punktów zmierzają do ograniczonego zbioru, tworząc chaotyczny atraktor. Dla $0.53 < g < 0.62$ autorzy otrzymali quasi-okresowy atraktor, a dla $g < 0,53$ globalną niestabilność.



Rys. 3. Chaotyczne trajektorie układu (22)-(24) na płaszczyźnie (S, L) dla $g = 0,8$. Warunek początkowy $L^0 = 0,825$, $S^0 = 0,835$, $\omega_0 = 0,18$

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: [8, s. 476].

Podsumowanie

Pomimo iż pojęcie deterministycznego chaosu pojawiło się w literaturze blisko 30 lat temu, ciągle brak jest jednej jednoznacznej definicji. Najbardziej odpowiednią, oddającą naturę dynamiki chaotycznej, wydaje się być definicja podana na międzynarodowej konferencji na temat chaosu, zorganizowanej przez Royal Statistical Society w 1986 roku, gdzie chaos zdefiniowano jako „stochastyczne zachowanie występujące w układzie deterministycznym” [21, za: 18, s. 16]. Jednak definicja ta jest nieformalna. Zasygnalizowana przez R. Maya i J.R. Beddingtona możliwość zastosowania teorii chaosu w ekonomii spowodowała powstanie wielu nowych modeli ekonomicznych z dynamiką chaotyczną lub odkrycie chaosu w już istniejących modelach ekonomicznych. W artykule dokonano przeglądu definicji deterministycznego chaosu oraz zademonstrowano chaotyczną dynamikę wybranych ekonomicznych modeli dynamicznych. Zdaniem autorki warto byłoby podjąć badania nad ulepszeniem i uzupełnieniem listy modeli procesów ekonomicznych z dynamiką chaotyczną.

Literatura

1. Benhabib J., Day R.: *Erratic Accumulation*. „Economics Letters” 1980, Vol. 6, s. 113-118.
2. Benhabib J., Day R.: *A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generation Model*. „Journal of Economic Dynamics and Control” 1982, Vol. 4, s. 37-55.
3. Benhabib J., Laroque G.: *On Competitive Cycles in Productive Economy*. „Journal of Economic Theory” 1988, Vol. 45, s. 145-170.
4. Bordignon S., Lisi F.: *Predictive Accuracy for Chaotic Economic Models*. „Economics Letters” 2001, 70, s. 51-58.
5. Day R.: *Irregular Growth Cycles*. „American Economic Review” 1982, Vol. 72, s. 406-414.
6. Devaney R.L.: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City 1987.
7. Drabik E.: *Dynamiczne nieliniowe modele ekonometryczne: model cykli koniunkturalnych Kaleckiego-Kaldora oraz model wzrostu*. W: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*. Red. W. Tarczyński. Szczecin 2002, s. 261-273.
8. Fanti L., Manfredi P.: *Neoclassical Labour Market Dynamics, Chaos and the Real Wage Philips Curve*. „Journal of Economic Behavior & Organization” 2007, Vol. 62, s. 470-483.
9. Frank M., Stengos T.: *Chaotic Dynamics in Economic Time-Series*. „Journal of Economic Surveys” 1988, Vol. 2, s. 103-133.
10. Garrido L.: *Dynamical Systems of Chaos*. „Lectures Notes in Physics” 1983, Vol. 179.

11. Kaldor N.: *A Model of the Trade Cycle*. „Economic Journal” 1940, Vol. 50, s. 78-92.
12. Kantz H., Schreiber T.: *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge 2004 (second edition).
13. May R., Beddington J.R.: *Nonlinear Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, Chaos*. Maszynopis, 1975.
14. Medio A., Negróni G.: *Chaotic Dynamics in Overlapping Models with Production*. W: *Nonlinear Dynamics and Economics*. Red. W.A. Barnett, A.P. Kirman, M. Salmon. Cambridge University Press, Cambridge 1996.
15. Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych: deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
16. Nowiński M.: *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.
17. Orzeszko W.: *Metody identyfikacji i prognozowania chaotycznych szeregów czasowych*. W: *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych*. Czwarte Warsztaty Doktorские z Zakresu Ekonometrii i Statystyki. Red. A. Welfe. Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2004, s. 113-135.
18. Orzeszko W.: *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*. Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa 2005.
19. Ott E.: *Chaos w układach dynamicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
20. Sosvilla-Rivero S., Fernandez-Rodríguez F., Andrada-Félix J.: *Testing Chaotic Dynamics via Lyapunov Exponents*. Working Papers 2000-07, FEDEA.
21. Stewart I.: *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
22. Stutzer M.T.: *Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro-model*. „Journal of Economic Dynamics and Control” 1980, Vol. 2, s. 253-276.
23. Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne*. Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej, Katowice 1996.

THE ECONOMIC MODELS WITH CHAOTIC DYNAMICS

Summary

Since 1975, when the R. May and J.R. Beddington informed about the possibility of application of chaos theory in economics, built many new economic models with chaotic dynamics and chaos have been identified in a number of already existing models.

This paper presents briefly the theory of deterministic chaos and properties of chaotic dynamic. In addition, presents some economic models of chaotic dynamics.