

Donata Kopańska-Bródka

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

MIARY INTENSYWNOŚCI ZACHOWAŃ ROZWAŻNYCH

Wprowadzenie

Koncepcja awersji do ryzyka ma fundamentalne znaczenie dla współczesnych badań związanych z analizą ryzyka w działalności ekonomicznej. Decydent, którego użyteczność (u) bogactwa (w) rośnie w tempie malejącym wykazuje awersję do ryzyka. W kontekście teorii oczekiwanej użyteczności, jeśli $u(w)$ jest dodatnio określoną funkcją użyteczności, wówczas wklęsłość (wypukłość) tej funkcji warunkuje awersję (skłonność) do ryzyka. O tym, jak bardzo decydent jest niechętny ryzyku mówią miary względnej i bezwzględnej awersji do ryzyka wprowadzone przez Arrowa i Pratta. Koncepcja awersji do ryzyka oraz sposób mierzenia siły tej awersji są powszechnie przyjmowane w badaniach dotyczących ryzyka ekonomicznego. Własność malejącej awersji do ryzyka w decyzjach inwestycyjnych jest uważana za jedną z ważniejszych właściwości pozwalającej w sposób wiarygodny porównywać relację pomiędzy stanem posiadania a ryzykiem podejmowanym przez inwestora. Osoba charakteryzująca się malejącą absolutną awersją do ryzyka, podejmując decyzje inwestycyjne, wraz ze wzrostem swojego stanu posiadania wykazuje zwiększony popyt na ryzykowne walory. Klasa funkcji użyteczności z malejącą absolutną awersją do ryzyka, nazywana właściwą użytecznością, była w sposób szczegółowy analizowana przez Pratta i Zeckhausera [1987].

Od pewnego czasu awersja do ryzyka jest łączona z zachowaniami określanymi mianem rozważnych (roztropnych) i związkiem z oszczędzaniem lub ograniczaniem konsumpcji. Tak rozumiane oszczędzanie ma zapobiegać skutkom ryzyka niepewnego przyszłego stanu posiadania. Rozwaga może być definiowana jako cecha osobowości związana z określonym zachowaniem się w sytuacji ryzyka lub na gruncie teorii oczekiwanej użyteczności jako wypukłość marginalnej użyteczności. Określenie „rozwaga” (ang. *prudence*) w kontekście osoby z awersją do ryzyka po raz pierwszy zostało wprowadzone przez Kimballa [1990], a dokonanie przededefiniowania miar Pratta-Arowa dało formalne podstawy teorii dotyczącej zapobiegawczych zachowań decydenta w odpowiedzi na ryzyko.

W szczególności takie zachowania dotyczą oszczędzania lub ubezpieczania się na wypadek efektów losowych decyzji i zdarzeń (utrata pracy, zdrowia). Leland [1968] określił zapobiegawcze oszczędzanie jako akumulację bogactwa będącą odpowiedzią na ryzyko i wykazał związek takiego zachowania z wypukłością marginalnej użyteczności.

1. Zachowania rozważne w sytuacji ryzyka

Decydent jest określany jako rozważny, jeśli jego relacja preferencji w zbiorze losowych decyzji jest określonego typu. Dla dalszych rozważań przyjmijmy następujące oznaczenia:

w – bogactwo, stan posiadania,

w_0 – bieżący stan posiadania,

k – wielkość redukcji (obniżenia) stanu posiadania oraz $k > 0$,

X – zmienna losowa spełniająca warunek $E(X) = 0$.

Mówimy, że relacja preferencji wyraża niechęć do ryzyka, jeśli stan posiadania w_0 jest preferowany nad każdy inny losowy $w_0 + X$ dla dowolnej wartości w_0 i dowolnego rozkładu X spełniającego $E(X) = 0$. Decydent ma awersję do ryzyka, jeśli decyzja D zawsze jest nie gorsza niż D^* , gdzie $D = \{(w_0, 1)\}$ i $D^* = \{(w_0, 0,5), (w_0+X, 0,5)\}$.

W celu określenia relacji preferencji decydenta zachowującego się rozważnie rozpatrzmy następujące dwie losowe decyzje:

$$D1 = \{(w_0-k; 0,5), (w_0+X; 0,5)\} \quad (1)$$

$$D2 = \{(w_0; 0,5), (w_0-k+X, 0,5)\}, \quad (2)$$

gdzie $k > 0$ oraz $E(X) = 0$ i $V^2(X) = \sigma^2$.

Mówimy, że decydent z awersją do ryzyka jest rozważny, jeśli dla każdego $k > 0$ decyzja $D1$ jest zawsze bardziej preferowana niż $D2$. Parametry rozkładu losowych wariantów decyzyjnych są następujące:

$$E(D1) = E(D2) = w_0 - 0,5k$$

$$V^2(D1) = V^2(D2) = 0,5\sigma^2 + 0,25 k^2$$

Wobec równości parametrów decyzje $D1$ i $D2$ są równoważne w sensie wartości oczekiwanej i wariancji. Warianty różnią się natomiast trzecimi momentami centralnymi odpowiednio równymi $\mu_3(D1) = 0,5\gamma_3 + 0,75k\sigma^2$, $\mu_3(D2) = 0,5\gamma_3 - 0,75k\sigma^2$, gdzie γ_3 jest trzecim momentem centralnym zmiennej X .

W związku z tym, że trzeci moment rozkładu mówi o skośności tego rozkładu, to preferencje wyboru decydenta rozważnego są związane z rodzajem asymetrii rozkładów losowych wariantów decyzyjnych.

Na gruncie teorii oczekiwanej użyteczności preferencja decyzji D1 nad D2 oznacza, że użyteczność D1 jest nie mniejsza niż użyteczność D2. Oznaczając przez $u(w)$ funkcję użyteczności von Neumanna i Morgensterna mamy, że $u(D1) \geq u(D2)$. Korzystając z określeń (1) i (2) prawdą jest, że $u(w_0 - k) + E[u(w_0 + x)] \geq u(w_0) + E[u(w_0 - k + x)]$. Grupując odpowiednio składniki otrzymujemy nierówność między premią za ryzyko dla bieżącej wartości w_0 i premią dla zredukowanego bogactwa w_0 o wartość k postaci:

$$E[u(w_0 + x)] - u(w_0) \geq E[u(w_0 - k + x)] - u(w_0 - k). \quad (3)$$

Dla decydenta z awersją do ryzyka warunek $u''(w) \leq 0$ jest równoważny z ujemną premią za ryzyko. Na podstawie założeń o funkcji użyteczności i nierówności Jensena (3) dla marginalnej użyteczności zachodzi nierówność następująca:

$$E[u'(w_0 + x)] - u'(w_0) \geq E[u'(w_0 - k + x)] - u'(w_0 - k). \quad (4)$$

Nierówność (4) mówi, że premia za rozważę jest wyższa, jeśli ryzyko dodane jest do większej wartości. Eeckhoudt i Schlesinger [2006] wykazali, że wypukłość marginalnej użyteczności ($u'''(w) \geq 0$) jest warunkiem równoważnym nieujemności premii za rozważę. Zachowanie rozważne to zatem preferowanie dołączenia losowego zysku o wartości oczekiwanej równej zero do bieżącego stanu posiadania zamiast dołączenie go do kapitału pomniejszonego o pewną wartość k . Decydent rozważny ma większą wolę zaakceptowania dodatkowego ryzyka wtedy, kiedy jego stan posiadania jest wyższy. Przejawem rozważi jest zachowanie polegające na potrzebie zapobiegawczego oszczędzania na wypadek ryzyka. Tak rozumiana rozważa bardziej odnosi się do optymalnego sposobu zachowania się decydenta niż do cechy jego osobowości.

2. Rozważa w modelu konsumpcji

W ramach teorii oczekiwanej użyteczności rozważę można opisać jako działanie zgodne z optymalnym rozwiązaniem dwuokresowego modelu konsumpcji szczególnego typu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że zmienna losowa X ma dwupunktowy rozkład prawdopodobieństwa:

$$X = \{(w_1, p), (w_2, 1-p)\}.$$

Problem decydenta z awersją do ryzyka i funkcją użyteczności $u(w)$ polega na określeniu dla okresu t_1 optymalnej konsumpcji c_1 tak, aby suma oczekiwanych użyteczności c_1 i losowego stanu posiadania w okresie t_2 była maksymalna. Jeśli stan posiadania decydenta w okresie t_1 jest równy w_0 i przeznaczy on na konsumpcje c_1 , to nieznaną przyszłą stan bogactwa w jest zmienna losową:

$$w(c_1) = \{(w_0 - c_1 + w_1), p\}, (w_0 - c_1 + w_2, 1-p)\}.$$

Oczekiwana użyteczność przyszłego bogactwa wyraża się następująco $E[u(w(c_1))] = p \cdot u(w_0 - c_1 + w_1) + (1-p) \cdot u(w_0 - c_1 + w_2)$, zatem zadanie sprowadza się do znalezienia wartości c_1 , dla której łączna użyteczność $u(c_1) + E[u(w(c_1))]$ jest maksymalna. Funkcja użyteczności jest wklęsła, więc wartość zerowa pierwszej pochodnej jest warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia maksimum lokalnego. Wartość c^* , dla której zachodzi równanie:

$$u'(c^*) - p \cdot u'(w_0 - c^* + w_1) - (1-p) \cdot u'(w_0 - c^* + w_2) = 0$$

jest optymalną wielkością konsumpcji w okresie t_1 oraz

$$u'(c^*) = E[u'(w)], \quad (5)$$

gdzie $w = w_0 - c^* + X$.

Konstrukcja funkcji użyteczności decydenta z awersją do ryzyka pozwala określić premię za ryzyko jako wartość kapitału π , dla której zachodzi równość $E[u(w)] = u[E(w) - \pi]$. Kimball [1990] przyjmując podobną konstrukcję wprowadza pojęcie premii za rozważę ϕ w następujący sposób:

$$E[u'(w)] = u'[E(w) - \phi]. \quad (6)$$

Z zależności (5) i (6) dla optymalnej konsumpcji mamy równość

$$u'(c^*) = u'[E(w) - \phi], \text{ skąd otrzymujemy związek } c^* = w_0 - c^* + E(X) - \phi.$$

Zatem optymalna konsumpcja dla uproszczonego modelu jest równa:

$$c^* = 0,5[w_0 + E(X) - \phi].$$

3. Miary intensywności zachowań rozważnych

Decydent z awersją do ryzyka jest rozważny, jeśli jego marginalna użyteczność jest funkcją wypukłą, czyli trzecia pochodna funkcji użyteczności jest nie-

ujemna. Kimball [1990] dokonał redefinicji miar siły awersji do ryzyka i wprowadził odpowiednie miary stopnia intensywności rozważli. Analogicznie do miary bezwzględnej awersji do ryzyka $A(w)$ – (ang. *absolute risk aversion*):

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

określono miarę bezwzględnej intensywności rozważli $AP(w)$ – (ang. *absolute prudence*) następująco:

$$AP(w) = -\frac{u'''(w)}{u''(w)}, \quad (7)$$

gdzie w jest możliwym stanem posiadania wyrażanym w jednostkach pieniężnych. Dla stanu bogactwa w wartość $AP(w)$ mierzy intensywność zapobiegawczego oszczędzania na okoliczność ryzyka.

W podobny sposób odpowiednikiem miary względnej awersji do ryzyka $R(w)$:

$$R(w) = -w \frac{u''(w)}{u'(w)} = w \cdot A(w)$$

jest miara względnej intensywności rozważli $RP(w)$ – (ang. *relative prudence*)

$$RP(w) = -\frac{w \cdot u'''(w)}{u''(w)}. \quad (8)$$

Różniczkując obustronnie miary awersji do ryzyka i dokonując prostych przekształceń otrzymujemy następujące związki:

$$AP(w) = A(w) - \frac{A'(w)}{A(w)} \quad (9)$$

oraz

$$RP(w) = R(w) - \frac{w \cdot A'(w)}{A(w)}. \quad (10)$$

Łatwo zauważyć, że wielkości zmian $A(w)$ i $AP(w)$ oraz $R(w)$ i $RP(w)$ są ze sobą ściśle powiązane. W zależności od monotoniczności miary $A(w)$ obserwuje się szczególne własności miary $AP(w)$. Funkcje użyteczności są nazywane typu

DARA, jeśli bezwzględna awersja do ryzyka jest malejąca ($A'(w) < 0$), a typu IARA, jeśli bezwzględna awersja do ryzyka jest rosnąca ($A'(w) > 0$) oraz typu CARA, jeśli bezwzględna awersja do ryzyka jest stała ($A'(w) = 0$).

Dla decydenta o użyteczności typu DARA zachodzi nierówność $AP(w) > A(w)$. Mówimy, że jest on bardziej rozważny niż niechętny ryzyku, czyli chętniej podejmuje działania zapobiegawcze na wypadek ryzyka niż działania zmierzające do uniknięcia ryzyka. Ponadto $AP(w)$ jest funkcją malejącą, więc ze wzrostem bogactwa intensywność zapobiegawczego oszczędzania maleje.

Dla decydenta o użyteczności typu IARA zachodzi nierówność $AP(w) < A(w)$. W tym przypadku awersja do ryzyka jest większa niż motywacja zapobiegawczego oszczędzania, zatem oszczędzanie tylko uzupełnia działania zmierzające do udźwignięcia skutków ryzyka.

Dla funkcji typu CARA zachodzi równość $AP(w) = A(w)$, zatem działania zapobiegające ryzyku są niezależne od wielkości stanu posiadania. Analogiczne związki zachodzą dla miar intensywności względnej rozważli $RP(w)$.

Tradycyjnie w badaniach i zastosowaniach teorii oczekiwanej użyteczności są wykorzystywane funkcje użyteczności, dla których miary Arrowa-Pratta są monotoniczne lub stałe dla $w \geq 0$. W szczególności takie funkcje użyteczności, których marginalne użyteczności należą do klasy funkcji w pełni monotonicznych¹, co oznacza, że znaki kolejnych pochodnych zmieniają się naprzemiennie ($u'(w) \geq 0$, $u''(w) \leq 0$, $u'''(w) \geq 0$, $u^{(4)}(w) \leq 0$, ...). Caballe i Pomansky [1996] wykazali szereg matematycznych własności funkcji w pełni monotonicznych oraz miar awersji do ryzyka w sytuacji, kiedy marginalna użyteczność jest w pełni monotoniczna. Dla tak określonych funkcji użyteczności przedstawiono własności mieszanej awersji do ryzyka.

Obserwując decyzje niektórych inwestorów z awersją do ryzyka, można zauważyć, że od pewnego poziomu stanu posiadania zmienia się ich strategia inwestycyjna, która jest wyjaśniana zmianą kierunku monotoniczności bezwzględnej awersji do ryzyka $A(w)$. Jeśli istnieje taki poziom bogactwa w_0 , że dla $w < w_0$ inwestor jest skłonny zmniejszać liczbę walorów ryzykownych w swoim portfelu, a dla $w > w_0$ zwiększać ich liczbę, wówczas jego bezwzględna awersja do ryzyka jest malejąca w przedziale $(0, w_0)$ oraz rosnąca w przedziale $(w_0, +\infty)$. Funkcja użyteczności takiego inwestora nie należy do żadnych z omawianych wcześniej typów funkcji użyteczności. W dalszej kolejności są analizowane takie funkcje użyteczności, których miary awersji do ryzyka są przedziałami monotonicznymi lub mają ekstrema lokalne. W celu zbadania zależności pomiędzy omawianymi miarami awersji do ryzyka i intensywnością zachowań rozważnych, będzie wykorzystywana zależność równoważna do (9) o następującej postaci:

¹ Funkcja rzeczywista $f(w)$ określona dla $w \geq 0$ jest w pełni monotoniczna, jeśli pochodne wszystkich stopni istnieją oraz jest spełniony warunek $(-1)^n f^{(n)}(w) \geq 0$ dla każdego w i $n = 0, 1, 2, \dots$

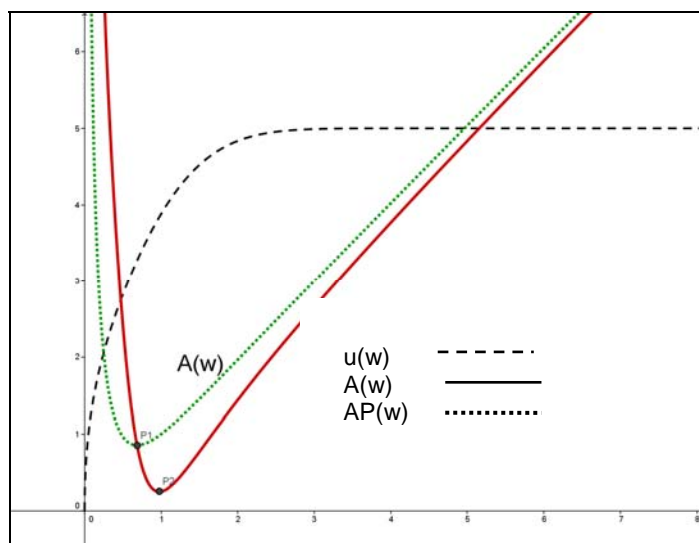
$$A'(w) = A(w)[A(w) - AR(w)]. \quad (11)$$

Założmy, że istnieje takie w^* , że $A'(w^*) = 0$ oraz $u(w)$ nie jest typu CARA. Z zależności (11) mamy, że $A(w^*) = AP(w^*)$, czyli wykresy miar $A(w)$ i $AP(w)$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(w^*, A(w^*))$. Można wykazać, że jeśli funkcja $A(w)$ osiąga tylko w punkcie w^* jedno ekstremum lokalne, to jeśli jest to maksimum, wówczas dla $w < w^*$ zachodzi nierówność $A(w) > AP(w)$ oraz dla $w > w^*$ nierówność przeciwna $A(w) < AP(w)$. W sytuacji kiedy $A(w)$ osiąga minimum lokalne, nierówności między wartościami miar są odwrotne. Szczególne związki pomiędzy ekstremami lokalnymi bezwzględnych miar awersji i rozważi zostały wykazane w pracy Maggiego i in. [2006]. Pokazano, że jeśli miara bezwzględnej rozważi ma tylko jedno ekstremum i jest to minimum lokalne osiągnięte w punkcie w_0 , to miara bezwzględnej awersji do ryzyka również ma tylko minimum lokalne osiągnięte w punkcie $w^* < w_0$. W sytuacji kiedy $AP(w)$ ma tylko maksimum lokalne w punkcie w_0 , to miara bezwzględnej awersji do ryzyka również ma tylko maksimum lokalne osiągnięte w punkcie $w^* > w_0$. Dla decydenta charakteryzującego się miarą bezwzględnej awersji do ryzyka z jednym ekstremum lokalnym, optymalna niechęć do ryzyka jest związana z innym stanem posiadania niż ten, dla którego intensywność działań związanych z zapobiegawczym oszczędzaniem jest optymalna.

Przykładem funkcji użyteczności, której miara bezwzględnej awersji do ryzyka nie jest monotoniczna, jest następująca złożona funkcja wykładnicza:

$$u(w) = -5 \exp(-0,5w^2 - \sqrt{w}) + 5. \quad (12)$$

Funkcja (12) spełnia warunki znaków pochodnych (marginalna użyteczność jest w pełni monotoniczna) oraz miara bezwzględnej awersji do ryzyka ma jedno ekstremum lokalne i jest to minimum osiągnięte w punkcie P1(0,69; 0,86), a miara bezwzględnej intensywności rozważi osiąga minimum lokalne w punkcie P2(0,98; 0,25). Na rysunku 1 przedstawiono wykresy miar $A(w)$ i $AP(w)$ dla funkcji (12).

Rys. 1. Wykresy $u(w)$, $A(w)$ i $AP(w)$

Podsumowanie

W teorii oczekiwanej użyteczności profil decydenta charakteryzują własności funkcji użyteczności oraz zasada decyzyjna. W szczególności znak kolejnych pochodnych funkcji użyteczności zawiera pełną informację o jego stosunku do ryzyka i zachowaniach decyzyjnych. Rozwaga i powściągliwość są traktowane jako takie możliwe zachowania w sytuacji ryzyka, których intensywność można mierzyć za pomocą pochodnych wyższych stopni funkcji użyteczności. W szczególności oszczędzanie traktowane jako zabezpieczenie przed ryzykiem, a nie jako sposób inwestowania nadwyżki kapitału, świadczy o rozważnym zachowaniu decydenta. Przejawem rozwagi są również działania zmierzające do optymalnego określenia wielkości środków przeznaczanych na konsumpcję w poszczególnych okresach oraz sposobu alokacji aktywów.

Własności miar intensywności działań rozważnych zależą od własności miar Pratta-Arrowa. W zastosowaniach i przykładach numerycznych powszechnie są stosowane funkcje użyteczności, których bezwzględne miary awersji do ryzyka są monotoniczne lub stałe. W pracy pokazano związki pomiędzy miarami siły awersji do ryzyka a intensywności działań rozważnych dla różnych typów funkcji użyteczności, w szczególności kiedy siła awersji do ryzyka może być przedziałami monotoniczna lub też dla pewnych poziomów stany posiadania mogą osiągać wielkości optymalne. Dla takich sytuacji zachowania decydentów mogą być wykorzystywane w szeroko rozumianej praktyce decyzyjnej. Informacje o zachowaniach klientów banków czy agencji ubezpieczeniowych można

uzyskać interpretując związki między ekstremami lokalnymi bezwzględnych miar awersji do ryzyka i stopnia rozważli. Jeśli dla osoby najmniejszy stopień intensywności rozważli jest związany ze stanem posiadania w_0 , to najmniejsza niechęć do ryzyka tej osoby jest odczuwana dla stanu posiadania nie większego niż w_0 . Jeśli największy stopień intensywności rozważli jest natomiast związany ze stanem posiadania w_0 , to największa niechęć do ryzyka dotyczy stanu posiadania nie mniejszego niż w_0 , czyli najwyższa intensywność działań rozważnych (zapobiegawczego oszczędzania) wyprzedza największą bezwzględną niechęć do ryzyka w odniesieniu do bogactwa.

Literatura

- Caballe J., Pomansky A. (1996): *Mixed Risk Aversion*. „Journal of Economic Theory”, No. 71.
- Eeckhoudt L., Schlesinger H. (2006): *Putting Risk In Its Proper Place*. „American Economic Review”, 96(1).
- Kimball M. (1990): *Precautionary Saving in the Small and in the Large*. „Econometrica”, No. 58, (1).
- Leland H.E. (1968): *Saving and Uncertainty: The Precautionary Vulnerability*. „Quarterly Journal of Economics”, No. 82(3).
- Maggi M.A., Magnani U., Menegatti M. (2006): *On the Relationship Between Absolute Prudence and Absolute Risk Aversion*. „Decisions in Economics and Finance”, No. 29.
- Pratt J., Zeckhauser R.J. (1987): *Proper Risk Aversion*. „Econometrica”, No. 55 (1).

MEASURE OF THE INTENSITY OF PRUDENT BEHAVIOR

Summary

The behavior of the risk averse decision-maker is prudent if the precautionary saving activities are taken to avoid risk. Prudence is defined as a particular type of the preference relation over uncertain choices. Our goal in this paper is to show the relationship between the Arrow-Pratt coefficient of the risk aversion and the measure of the intensity of prudence. The properties of the utility function expressing prudence behavior are presented and the particular class of utility functions with non monotonic absolute risk aversion coefficient is considered.