Krzysztof Jajuga
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

RYZYKO MODELU A MIARY RYZYKA

1. Ryzyko modelu i miary ryzyka – wprowadzenie

Nie ulega wątpliwości, iż modele matematyczne są często przydatne w analizie zjawisk ekonomicznych, a w konsekwencji we wspomaganiu decydentów. Wiadomo jednak, iż model jest przybliżeniem rzeczywistości, zaś jego praktyczna użyteczność zależy od tego, jak dobre jest to przybliżenie. Kluczowe dla użytkownika nie jest to, na ile model jest dobrym przybliżeniem obecnej (i przeszłej) rzeczywistości, lecz jak dobrym będzie przybliżeniem przyszłej rzeczywistości. To jednak może być zweryfikowane dopiero *ex post*. Pojawia się zatem pytanie, czy w momencie tworzenia modelu nie będzie jakiegokolwiek narzędzia weryfikacji modelu z punktu widzenia jego użyteczności w przyszłości.

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna; pomocna tu może być analiza tzw. ryzyka modelu. Ogólna definicja tego pojęcia jest następująca: Ryzyko modelu jest to ryzyko wynikające z zastosowania błędnego modelu w świecie rzeczywistym.

Problematyka ryzyka modelu jest szczególnie widoczna w przypadku modeli dotyczących zjawisk i procesów finansowych, przede wszystkim tych zachodzących na rynkach finansowych. Znaczenie ryzyka modelu jako zjawiska, które może doprowadzić do poważnych problemów finansowych, zostało wyraźnie zidentyfikowane po raz pierwszy przy okazji upadku funduszu hedgingowego Long Term Capital Management (LTCM). Fundusz ten w latach 1994-1998 stosował bardzo zaawansowane modele wyceny instrumentów finansowych. Na początku decyzje podejmowane na podstawie tych modeli prowadziły do ponadprzeciętnych wyników inwestycyjnych funduszu, jednak w 1997 r. w trakcie kryzysu finansowego w Azji Południowo-Wschodniej fundusz poniósł straty, a jego upadek nastąpił w trakcie kryzysu finansowego w Rosji w 1998 r. Upadek LTCM pokazał, iż w warunkach dynamicznie zmieniających się rynków finansowych, precyzyjnie „skrojone" modele przestają działać skutecznie.

Inny przykład ryzyka modelu finansowego to ryzyko sprawozdania finansowego sporządzanego przez podmiot gospodarczy. Informacje zawarte w jego elementach składowych służą jako podstawa podejmowania decyzji, jednak sprawozdanie finansowe jest uproszczonym modelem podmiotu gospodarczego. W ostatnich latach uproszczenie to jest coraz większe. Sprawozdawczość finansowa nie może sobie poradzić z takimi istotnymi współczesnymi zjawiskami gospodarczymi, jak: stosowanie instrumentów pochodnych, występowanie powiązań biznesowych czy też pomiar kapitału intelektualnego. Przykład sprawozdania finansowego holdingu Enron, który upadł w 2001 roku, to tylko jeden z wielu przypadków.

Celem tego artykułu jest wskazanie poprzez analizę dwóch przypadków, w jaki sposób ryzyko modelu objawia się w modelach finansowych, w których występują miary ryzyka.

Można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje ryzyka modeli finansowych:
- ryzyko w zakresie struktury modelu,
- ryzyko estymacji modelu,
- ryzyko zastosowania modelu.

Zostaną przedstawione te trzy rodzaje ryzyka oraz działania, jakie tworzący model oraz jego użytkownik powinni podjąć w celu zmniejszenia ryzyka modelu.

1.1. Ryzyko w zakresie struktury modelu

Takie ryzyko dotyczy konstrukcji modelu, np. wadliwej postaci funkcyjnej modelu, nieuwzględnienia istotnych zmiennych oraz dynamiki w modelu. Przykładem jest model stóp zwrotu akcji, w którym założono rozkład normalny, co jest zbyt dużym uproszczeniem w przypadku istnienia grubych ogonów.

Analiza ryzyka w zakresie struktury modelu jest analizą jakościową. Polega ona na weryfikacji założeń modelu i jego postaci. Czasem może też być przydatna weryfikacja empiryczna modelu na danych historycznych – stosowana jest tu często nazwa testowanie wsteczne. Można też przedstawić kontrargument, iż funkcjonowanie modelu w przeszłości niekoniecznie może być dobrym wskaźnikiem co do tego, jak będzie działał w przyszłości. Jeśli jednak okaże się, że model źle funkcjonuje na danych historycznych, może to oznaczać, że nie uwzględnia on pewnych istotnych zmiennych – a to jest właśnie problem ryzyka w zakresie struktury modelu.

1.2. Ryzyko w zakresie ocen parametrów modelu

Dotyczy to estymacji modelu, która może być przeprowadzona za pomocą różnych technik i z zastosowaniem różnych zbiorów danych. Przykładem jest estymacja współczynnika beta za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów, w której nie bierze się pod uwagę możliwości występowania obserwacji nietypowych, jak również faktu niestacjonarności zmiennych danych w postaci szeregów czasowych.

Analiza ryzyka estymacji modelu może być przeprowadzona za pomocą narzędzi ilościowych. Można tu zaproponować proste podejście, polegające na analizie wrażliwości modelu (ściślej: zmiennej wyjściowej modelu) na zmiany wartości jego parametrów. Dzięki temu jest możliwa identyfikacja tych parametrów modelu, które mają duży wpływ na wyniki. Pomocne może też być wykorzystanie przedziałów ufności dla parametrów, tam gdzie są one znane.

1.3. Ryzyko zastosowania modelu w specyficznej sytuacji

Dotyczy to sytuacji, gdy prawidłowy (w sensie struktury i oszacowania) model jest stosowany w otoczeniu, w którym warunki są inne niż te, w jakich model się sprawdził. Przykładem jest zastosowanie modelu wyceny opcji na wschodzącym rynku, charakteryzującym się niską płynnością oraz niewielkim doświadczeniem uczestników rynku.

Analiza ryzyka zastosowania modelu jest zazwyczaj analizą jakościową, polegającą na sprawdzeniu założeń i warunków stosowania modelu oraz odniesieniu ich do rynku, na którym chcemy go stosować.

W bardzo wielu modelach finansowych występują miary ryzyka. Jeśli chodzi o miary ryzyka rynkowego, to najbardziej ogólna klasyfikacja wyróżnia:
– miary oparte na rozkładzie stóp zwrotu;
– miary wrażliwości.

Główna różnica między tymi dwiema grupami polega na tym, że w pierwszej analizowany jest „efekt ryzyka" (w postaci rozkładu statystycznego), zaś w drugiej analizowane są też czynniki ryzyka (poprzez analizę wrażliwości zmiennej wyjściowej na te czynniki).

W pierwszej grupie miar znajdują się:
– miary zmienności rozkładu,
– kwantyle rozkładu,
– wartości dystrybuanty rozkładu.

Zostaną przedstawione dwa podstawowe przypadki, w których występuje ryzyko modelu wynikające z faktu, że miara ryzyka podlega oszacowaniu. Rozpatrywana jest podstawowa miara ryzyka, mianowicie odchylenie standardowe stopy zwrotu. W modelach finansowych odchylenie standardowe zwykle nazywane jest po prostu zmiennością (*volatility*).

2. Model portfela dwuskładnikowego o najniższym ryzyku

Teoria portfela (por. Markowitz, 1952) jest to historycznie pierwszy model finansowy, w którym pojawiła się miara zmienności (wariancja stopy zwrotu). Jak wiadomo, ryzyko portfela (mierzone odchyleniem standardowym stopy zwrotu) zależy od ryzyka składników tego portfela oraz od współczynników korelacji stóp zwrotu tych składników. Błędne oszacowanie tych elementów może prowadzić do niedoszacowania (bądź przeszacowania) ryzyka tego portfela.

W dalszej części będzie rozważane zagadnienie wyznaczania portfela o minimalnym ryzyku (*Minimum Variance Portfolio*), przy czym dla uproszczenia rozpatrywany jest jedynie portfel dwuskładnikowy.

Udziały składników w dwuskładnikowym portfelu o minimalnym ryzyku dane są następującymi wzorami:

$$w_1 = \frac{s_2^2 - s_1 s_2 \rho_{12}}{s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \rho_{12}} \tag{1}$$

$$w_2 = \frac{s_1^2 - s_1 s_2 \rho_{12}}{s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \rho_{12}} \tag{2}$$

W dalszych rozważaniach nie jest analizowane ryzyko modelu wynikające z oszacowania współczynnika korelacji. Problemowi temu poświęcony jest artykuł Jajugi (2010). Następnie będzie rozpatrywane jedynie ryzyko wynikające z estymacji odchylenia standardowego stóp zwrotu obu składników portfela.

W celu analizy tego ryzyka wykorzystano wzór na przedział ufności odchylenia standardowego dla dużej próby:

$$P\left(\frac{s}{1+u_\alpha/\sqrt{2n}} < \sigma < \frac{s}{1-u_\alpha/\sqrt{2n}}\right) = 1-\alpha \tag{3}$$

$$P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha \tag{4}$$

gdzie U jest zmienną o standaryzowanym rozkładzie normalnym.

Należy pamiętać, że podstawowe uproszczenie w tym podejściu wynika z założenia, iż rozpatrywana populacja ma rozkład normalny.

Można przyjąć, że dolny i górny kraniec przedziału ufności informują o niedoszacowaniu bądź przeszacowaniu odchylenia standardowego. Wskazują zatem na ryzyko modelu portfela dwuskładnikowego wynikające z estymacji odchylenia standardowego.

W celu zilustrowania tego zagadnienia rozważany jest przykład wskazujący na wpływ estymacji odchylenia standardowego na ryzyko portfela o minimalnym ryzyku (MVP). Ryzyko tego portfela wyznacza się za pomocą klasycznego wzoru na ryzyko portfela dwuskładnikowego z zastosowaniem udziałów danych wzorami (1) i (2).

Przyjmijmy, iż liczba obserwacji, na podstawie których oszacowano odchylenie standardowe, wynosi 50, zaś poziom ufności to 0,95. Po zastosowaniu wzorów (3) i (4) otrzymuje się przedział ufności dany wzorem:

$$0{,}836s < \sigma < 1{,}244s \tag{5}$$

W przykładzie rozpatrywane są dwa przypadki, jeśli chodzi o wartość odchylenia standardowego składników portfela:

– taka sama wartość odchylenia standardowego obu składników, równa 20%;
– istotnie różne wartości odchylenia standardowego, wynoszące odpowiednio 10% i 50%.

Analizowane są też dwa przypadki, jeśli chodzi o wartość współczynnika korelacji stóp zwrotu, mianowicie 0,1 oraz 0,5.

Tabela 1 przedstawia wartości odchylenia standardowego portfela MVP w pięciu scenariuszach:

– prawidłowo oszacowane oba odchylenia standardowe (symbol DD);
– niedoszacowane oba odchylenia standardowe (symbol NN);
– niedoszacowane pierwsze, a przeszacowane drugie odchylenie standardowe (symbol NP);
– przeszacowane pierwsze, a niedoszacowane drugie odchylenie standardowe (symbol PN);
– przeszacowane oba odchylenia standardowe (symbol PP).

Tabela 1

Ryzyko portfela MVP według różnych scenariuszy

Odchylenie standardowe pierwszego składnika	Odchylenie standardowe drugiego składnika	Współczynnik korelacji stóp zwrotu	Ryzyko portfela DD	Ryzyko portfela NN	Ryzyko portfela NP	Ryzyko portfela PN	Ryzyko portfela PP
20%	20%	0,1	14,83%	12,40%	14,50%	14,50%	18,45%
20%	20%	0,5	17,32%	14,48%	16,40%	16,40%	21,55%
10%	50%	0,1	9,95%	8,32%	8,36%	12,20%	12,38%
10%	50%	0,5	9,45%	7,90%	7,70%	12,11%	11,75%

Źródło: Obliczenia własne.

Z tab. 1 wynika, iż:

– niedoszacowanie (przeszacowanie) miar ryzyka powoduje niedoszacowanie (przeszacowanie) ryzyka portfela, co jest naturalne;
– wielkość błędu oszacowania ma większe znaczenie w przypadku przeszacowania niż niedoszacowania;
– współczynnik korelacji stóp zwrotu nie ma większego znaczenia dla niedoszacowania bądź przeszacowania ryzyka portfela.

3. Model wyceny opcji

Klasycznym modelem wyceny opcji europejskich jest model Blacka-Scholesa-Mertona (por. Black, Scholes, 1973; Merton, 1973). Wartość opcji ma istotne znaczenie dla praktyka, który podejmuje decyzje dotyczące zabezpieczenia przed ryzykiem bądź decyzje inwestycyjne z zastosowaniem tego instrumentu pochodnego.

Rozpatrywany jest tu najprostszy przypadek, w którym instrument podstawowy nie przynosi żadnych dochodów przed wygaśnięciem opcji. Występuje tu zatem klasyczny model wyceny Blacka-Scholesa, w którym wartość opcji zależy od pięciu czynników. Spośród nich cztery są znane: wartość instrumentu podstawowego, cena wykonania, czas do wygaśnięcia opcji oraz stopa wolna od ryzyka (za którą często przyjmuje się stopę z rynku międzybankowego). Oznacza to, że te cztery czynniki nie wpływają na ryzyko modelu wyceny opcji.

Inaczej jest w przypadku piątego czynnika, którym jest zmienność wartości instrumentu podstawowego, mierzona jako odchylenie standardowe stopy zwrotu tego instrumentu. Praktycy działający na rynku opcji zazwyczaj sięgają po jeden z dwóch sposobów estymacji zmienności.

Pierwszym jest zastosowanie tzw. zmienności historycznej, czyli estymacja odchylenia standardowego (bądź wariancji) za pomocą modeli ekonometrycznych i statystycznych, przy zastosowaniu danych historycznych dotyczących wartości instrumentu podstawowego. Główną wadą tego sposobu jest to, że zmienność w najbliższej przyszłości może się różnić od zmienności przeszłej.

Drugim sposobem jest zastosowanie tzw. zmienności implikowanej, która polega na „odwróceniu" modelu Blacka-Scholesa i wyznaczeniu zmienności na podstawie obecnych cen opcji. Zasadniczą wadą tego sposobu jest przyjęcie założenia, że rynek jest w stanie równowagi określanym modelem Blacka-Scholesa, a obecnie obserwowana zmienność jest dobrym oszacowaniem oczekiwań co do przyszłej zmienności.

Warto zatem zadać pytanie, jakie jest ryzyko modelu wyceny opcji wynikające z błędnego oszacowania zmienności, tzn. z tego, że zmienność zrealizowana w okresie do wygaśnięcia opcji będzie różna od oszacowanej zmienności.

Odpowiedź daje analiza wrażliwości wartości opcji na zmiany zmienności. Do tego celu można wykorzystać jeden z tzw. greckich współczynników, którym jest współczynnik *vega*. Standardowo wykorzystywany jest on jako miara ryzyka rynkowego opcji, natomiast tutaj posłuży on do oceny ryzyka modelu wyceny opcji.

Współczynnik *vega* (w klasycznym przypadku modelu Blacka-Scholesa) dany jest następującym wzorem (por. Hull, 2011):

$$vega = S\phi(d_1)\sqrt{T} \tag{6}$$

gdzie:
S – wartość instrumentu podstawowego,
T – czas do wygaśnięcia opcji,
ϕ – gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego,
d_1 – argument funkcji, określony wzorem (por. Hull, 2011):

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{7}$$

gdzie:
X – cena wykonania (tzw. *strike*),
r – stopa wolna od ryzyka,
σ – odchylenie standardowe stopy zwrotu instrumentu podstawowego.

Współczynnik *vega* wskazuje na zmiany wartości opcji przy jednoprocentowych zmianach zmienności. Standardowo wykorzystywany jest w różnych strategiach opcyjnych, m.in. prowadzących do uzyskania portfela opcji odpornego na zmiany zmienności instrumentu podstawowego.

Z punktu widzenia ryzyka modelu wyceny opcji istotne są dwie właściwości tego współczynnika (*ceteris paribus*):
– wartość *vega* jest najwyższa, gdy wartość instrumentu podstawowego jest równa cenie wykonania (tzw. opcja *at-the-money* – ATM);
– wartość *vega* jest tym wyższa, im dłuższy jest czas pozostały do wygaśnięcia.

W charakterze ilustracji przedstawiony jest przykład określenia współczynnika wrażliwości *vega* dla różnych okresów do wygaśnięcia opcji (7, 31, 91 i 182 dni) oraz różnego poziomu relacji między wartością instrumentu podstawowego, wynoszącą 100, a ceną wykonania (pięć różnych wartości: 80, 90, 100, 110, 120). W przykładzie tym stopa wolna od ryzyka wynosi 5% (dla wszystkich rozpatrywanych terminów).

Wartości współczynnika *vega* przedstawia tab. 2.

Tabela 2

Wartości współczynnika *vega* według różnych scenariuszy

Liczba dni do wygaśnięcia	Vega: Strike = 100	Vega: Strike = 90	Vega: Strike = 80	Vega: Strike = 110	Vega: Strike = 120
7	13,80	0	0	0	0
31	28,77	0,02	0	0,23	0
91	48,08	2,91	0	13,14	0,17
182	65,48	12,05	0,13	44,48	6,37

Źródło: Obliczenia własne.

Wyniki zawarte w tab. 2 potwierdzają teoretyczne właściwości. Wynika z nich, że problem ryzyka estymacji w klasycznych modelach wyceny opcji występuje w zasadzie jedynie w przypadku opcji ATM, tzn. takich, w których cena wykonania jest bliska wartości instrumentu podstawowego, ewentualnie w przypadku opcji o długim terminie do wygaśnięcia.

Podsumowanie

Przenoszenie danego modelu w czasie (zmiana funkcjonowania rynku) lub w przestrzeni (inny rynek) może prowadzić do jego niewłaściwego zastosowania. Jednym z podstawowych błędów twórców i użytkowników modeli jest dążenie do tego, aby model był precyzyjny oraz dobrze dopasowany do danych historycznych.

Modele stosowane na rynkach finansowych powinny spełniać dwa warunki brzegowe; być po pierwsze odporne na zmiany warunków rynkowych, a po drugie – przejrzyste dla użytkownika. Spełnienie pierwszego warunku może zmniejszyć ryzyko w zakresie obszaru zastosowań modelu. Z kolei spełnienie drugiego warunku oznacza zmniejszenie zagrożenia związanego z zastosowaniem dobrego modelu w niewłaściwy sposób z powodu niezrozumienia modelu przez użytkownika.

Dobrą praktyką powinno się stać uzupełnianie każdego modelu o informację na temat ryzyka tego modelu. Dotyczy to wszystkich modeli stosowanych w finansach – od modelu wyceny opcji po rachunek zysków i strat spółki.

Bibliografia

Black F., Scholes M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. „Journal of Political Economy", 81, s. 637-654.

Hull J. (2011): *Options, Futures and Other Derivatives*. Pearson, Upper Saddle River.

Jajuga K. (2010): *Assessment of Model Risk in Financial Markets*. „Optimum Studia Ekonomiczne", 48, s. 35-43.

Markowitz H.M. (1952): *Portfolio Selection*. „Journal of Finance", 7, s. 77-91.

Merton R.C. (1973): *Theory of Rational Option Pricing*. „Bell Journal of Economics and Management Science", 4, s. 141-183.

MODEL RISK AND RISK MEASURES

Summary

The paper discusses the problem of model risk, defined as risk resulting from the application of wrong model in real world. Three sources of model risk are distinguished: risk related to the structure of the model, risk of model estimation and risk connected with the application of the model.

The main part of the paper presents the measures that can be used to evaluate risk of model estimation. Two particular cases are solved. The first one is the construction of two stock portfolio with minimal risk, the second one is option pricing. In both cases estimation risk results from the fact that main parameter, which is volatility (standard deviation if returns), has to be estimated. Finally, the paper states important conditions to limit model risk.