Monika Miśkiewicz-Nawrocka
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

WPŁYW REDUKCJI SZUMU LOSOWEGO METODĄ NAJBLIŻSZYCH SĄSIADÓW NA WYNIKI PROGNOZ OTRZYMANYCH ZA POMOCĄ NAJWIĘKSZEGO WYKŁADNIKA LAPUNOWA

Wprowadzenie

Problem prognozowania zjawisk ekonomicznych jest problemem trudnym, który próbuje się rozwiązywać różnymi metodami. Od momentu pojawienia się w literaturze pojęcia deterministycznego chaosu, podejmuje się próby prognozowania realnych zjawisk na podstawie pojęć i metod teorii nieliniowych układów dynamicznych. Jednym z narzędzi tej teorii są wykładniki Lapunowa, które mierzą wrażliwość układu na zmianę warunków początkowych, czyli „chaotyczność" układu dynamicznego. Największy wykładnik Lapunowa pozwala określić, jak bardzo zmienia się (zwiększa lub zmniejsza) odległość pomiędzy bieżącym stanem x_N układu a jego najbliższym sąsiadem x_i podczas ewolucji układu oraz oszacować odległość pomiędzy ich następnikami x_{N+1} i x_{i+1}. Na podstawie tej odległości można wyznaczyć wartość prognozy $\hat{x}_{N+1}$ [Guégan, Leroux, 2009, s. 2401; Zhang et al., 2004, s. 3].

Metoda najbliższych sąsiadów wywodzi się z teorii nieliniowych układów dynamicznych i została stworzona do prognozowania przyszłych wartości szeregów czasowych [Lorenz, 1969, s. 636-646], ale może być również stosowana do redukcji szumu losowego w szeregach czasowych. Rzeczywiste szeregi czasowe (s_t) składają się z części deterministycznej szeregu (y_t) oraz części stochastycznej szeregu (ε_t), która wyraża poziom szumu losowego, reprezentującego szum obserwacyjny, systemowy lub kombinację szumu obserwacyjnego i systemowego. Redukcja szumu losowego pozwala poznać własności szeregu (y_t) na podstawie analizy szeregu obserwacji (s_t).

Celem pracy jest ocena dokładności oraz porównanie prognoz otrzymanych za pomocą największego wykładnika Lapunowa dla wybranych szeregów czasowych, przed i po zastosowaniu procedury redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów. Badania empiryczne przeprowadzono na podstawie rzeczywistych danych natury ekonomicznej, tj. szeregów utworzonych z notowań kursów walut: CHF, EUR, GBP, JPY, USD wobec złotego, cen zamknięcia: Dębicy, ING Banku Śląskiego, LPP SA, Mostostalu Zabrze, Vistuli, oraz indeksów giełdowych: WIG i WIG20. Do przeprowadzenia niezbędnych obliczeń wykorzystano program napisany przez autora w języku Delhi, arkusz kalkulacyjny Excel oraz program GRETL.

1. Szeregi czasowe

Rzeczywisty szereg czasowy jest dyskretnym układem dynamicznym (X, f) opisanym za pomocą zależności [Nowiński, 2007, s. 24]:

$$x_{t+1} = f(x_t + \eta_t), \tag{1}$$
$$s_{t+1} = h(x_{t+1}) + \xi_t, \quad t = 0,1,2, \dots \tag{2}$$

gdzie:
$X \subset R^m$, X – przestrzeń stanów,
$f : X \to X$ – m-wymiarowe odwzorowanie opisujące rzeczywistą dynamikę układu,
$h : X \to R$ – funkcja pomiarowa generująca szereg czasowy obserwacji s_t układu dynamicznego,
x_t, $x_{t+1} \in X$ – stan nieznanego, pierwotnego układu wielowymiarowego odpowiednio w chwilach t, t+1,
s_{t+1} – obserwacja szeregu czasowego w chwili t+1,
η_t – szum dynamiczny wewnątrz układu,
ξ_t – szum pomiarowy.

Krótko, można zapisać rzeczywisty szereg czasowy jako:

$$s_t = y_t + \varepsilon_t, \tag{3}$$

gdzie:
y_t – część deterministyczna szeregu czasowego,
ε_t – część stochastyczna szeregu czasowego (szum losowy składający się z szumu obserwacyjnego, systemowego lub ich kombinacji).

2. Największy wykładnik Lapunowa

Dla układu dynamicznego (X, f), w którym $X \subset \mathrm{R}^m$, $f : X \to X$ ($m \geq 1$), wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako granice [Zawadzki, 1996, s. 161]:

$$\lambda_i(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln|\mu_i(n, x_0)|, \quad \text{gdzie: } i = 1, \dots, m, \tag{4}$$

gdzie: $i = 1, \dots, m$,
$\mu_i(n, x_0)$ − wartości własne macierzy $Df^n(x_0)$,
$Df^n(x_0)$ − macierz Jacobiego odwzorowania f^n równą
$Df^n(x_0) = Df(x_{n-1}) \cdot \dots \cdot Df(x_1)\, Df(x_0)$,
$Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]$,
f_i − składowe odwzorowania f,
$i, j = 1,2, \dots, m$.
$i = 1, \dots, m - 1$.

Zgodnie z twierdzeniem Oseledeca [1968, s. 197-231], dla m-wymiarowego układu dynamicznego istnieje m wykładników Lapunowa, spełniających warunek: $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, dla $i = 1, \dots, m - 1$. Jednak najważniejszy jest największy z nich, który mierzy średnie tempo zbieżności i rozbieżności dwóch początkowo bardzo bliskich trajektorii. Dodatnia wartość największego wykładnika jest głównym wskaźnikiem dynamiki chaotycznej.

Udowodniono, że prawdziwa jest następująca zależność [Eckmann, Ruelle, 1985, s. 630; Kantz, Schreiber, 2004, s. 67]:

$$\Delta_k \approx \Delta_0 e^{k\lambda_{\max}}, \tag{5}$$

gdzie
$\lambda_{\max}$ − największy wykładnik Lapunowa, $\Delta_k << 1$, $k >> 1$*.

Jeśli $\lambda_{\max}$ jest dodatnie, to z powyższego wzoru wynika, że początkowo bliskie sobie stany rozbiegają się (oddalają się od siebie) w tempie wykładniczym, co najwyżej równym największemu wykładnikowi Lapunowa. W związku z tym, że dwie trajektorie nie mogą oddalić się od siebie na odległość większą niż rozmiar atraktora, przybliżona równość (5) jest prawdziwa tylko dla takich k, dla których Δ_k pozostaje małe.

* $a << b$ oznacza, że a jest dużo mniejsze niż b.

Po obustronnym zlogarytmowaniu równania (5) uzyskano:

$$\ln \Delta_k = \ln \Delta_0 + k\lambda_{max}. \tag{6}$$

W praktyce największy wykładnik Lapunowa szacuje się jako współczynnik kierunkowy regresji równania (6) [Rosenstein, Collins et al. 1993, s. 117-134; Kantz, 1994, s. 77-87].

3. Prognozowanie szeregów czasowych − metoda LEM*

Należy rozważyć jednowymiarowy szereg czasowy złożony z N obserwacji $(s_1, s_2, \ldots, s_N)$. W zrekonstruowanej przestrzeni stanów** każda obserwacja s_t, $(d-1)\tau + 1 \le t \le N$ jest związana z wektorem zanurzenia (d-historią), który powstaje w wyniku przesunięcia oryginalnego szeregu czasowego o pewną stałą wartość opóźnienia czasowego τ. Elementami zrekonstruowanej d-wymiarowej przestrzeni stanów są więc d-wymiarowe punkty (d-historie) zwane wektorami opóźnień, dane wzorem [Packerd et al., 1980, s. 712-716; Takens, 1981, s. 366-381]:

$$s_i^d = \left(s_i, s_{i-\tau}, s_{i-2\tau}, \ldots, s_{i-(d-1)\tau}\right), \tag{7}$$

gdzie:
$i = (d-1)\tau + 1, \ldots, N$,
s_i – obserwacje oryginalnego szeregu, $i = 1, \ldots, N$,
d – wymiar rekonstruowanej przestrzeni (zwany również wymiarem zanurzenia),
τ – opóźnienie czasowe.

Przeprowadzenie rekonstrukcji przestrzeni stanów układu dynamicznego wymaga ustalenia wartości parametrów τ i m. Nie istnieje jednak jednoznaczna metoda wyznaczenia wartości opóźnienia τ oraz minimalnego wymiaru zanurzenia m. Wartość opóźnienia czasowego τ można oszacować na podstawie funkcji autokorelacji lub funkcji informacji wzajemnej [Kantz, Schreiber, 2004, s. 150]. Przy ustalaniu minimalnego wymiaru opóźnienia d powszechnie stosowaną jest metoda pozornych najbliższych sąsiadów [Kennel et al., 1992].

Spośród wszystkich wektorów s_t^d zrekonstruowanej przestrzeni stanów należy wybrać wektor najbliższy (w sensie odległości euklidesowej) wektorowi s_N^d i oznaczyć przez $s_{\min}^d$. Niech $\Delta_{\min}$ oznacza odległość pomiędzy s_N^d oraz

* *Lyapunov Exponent Method.*

** Rekonstrukcja przestrzeni stanów polega na odtworzeniu na podstawie jednowymiarowego ciągu obserwacji, przestrzeni stanów układu dynamicznego.

$s^d_{\min}$, a Δ_1 − odległość pomiędzy s^d_{N+1} oraz $s^d_{\min+1}$. Zakładając, że $\Delta_1/\Delta_{\min}$ ulega małym zmianom podczas ewolucji układu, to odległość między wektorami s^d_{N+1} i $s^d_{\min+1}$ wyraża się wzorem [Guégan, Leroux, 2009, s. 2402]:

$$\Delta_1 \approx \Delta_{\min} \cdot e^{\lambda_{\max}}, \tag{8}$$

gdzie:
$\lambda_{\max}$ − wykładnik Lapunowa.

Ponieważ:

$$s^d_{N+1} = \left(s_{N+1}, s_{N-\tau+1}, \ldots, s_{N-(d-1)\tau+1}\right), \tag{9}$$

prognozowaną wartość s_{N+1} można wyznaczyć z równania (8) [Zhang et al., 2004, s. 6; Guégan, Leroux, 2009, s. 2402].

Kolejne prognozy $\hat{s}_{N+T}$, dla T = 2,3, … można wyznaczyć bezpośrednio z zależności:

$$\Delta_T \approx \Delta_{\min} \cdot e^{\lambda_{\max} \cdot T}, \tag{10}$$

gdzie Δ_T oznacza odległość pomiędzy wektorami s^d_N i $s^d_{\min}$ po T krokach iteracji, czyli pomiędzy wektorami s^d_{N+T} i $s^d_{\min+T}$, lub metodą iteracyjną, stosując opisaną powyżej procedurę dla wektora s^d_{N+1} [Zhang.et al., 2004, s. 3; Guégan, Leroux, 2009, s. 2402].

Algorytm prognozowania przyszłych wartości szeregu czasowego ($s_1, s_2, \ldots, s_N$) za pomocą największego wykładnika Lapunowa [Zhang et al., 2004, s. 6] − metoda LEM − jest następujący:

1. Należy wybrać opóźnienie czasowe τ oraz wymiar rekonstruowanej przestrzeni stanów d.
2. Należy obliczyć wykładnik Lapunowa $\lambda_{\max}$, jeśli $\lambda_{\max} < 0$, przejść do kroku 8.
3. Należy rekonstruować przestrzeń stanów dla wybranych wartości τ oraz d. Otrzymuje się $N - (d - 1)\tau$ wektorów w rekonstruowanej d-wymiarowej przestrzeni stanów.
4. Należy wyznaczyć wektor $s^d_{\min}$ położony najbliżej, w sensie odległości euklidesowej, wektora s^d_N.
5. Należy obliczyć odległość $\Delta_{\min}$ pomiędzy wektorami $s^d_{\min}$ oraz s^d_N.
6. Należy obliczyć odległość Δ_1 pomiędzy wektorami $s^d_{\min+1}$ oraz s^d_{N+1}.

7. Znając współrzędne punktu $s_{\min+1}^{d}$ w zrekonstruowanej przestrzeni stanów, na podstawie równania (8) prognozuje się za pomocą wykładnika Lapunowa $\lambda_{\max}$ kolejną wartość szeregu czasowego s_{N+1}.
8. Należy zmienić wymiar zanurzenia d i przejść do kroku 2.

Ze wzoru (8) wynika, że znając odległość pomiędzy wektorami s_N^d i $s_{\min}^d$ oraz wykładnik Lapunowa $\lambda_{\max}$, można wyznaczyć odległość między ich „następnikami", czyli wektorami s_{N+1}^d i $s_{\min+1}^d$. Odległość ta nie zależy od znaku wykładnika $\lambda_{\max}$, tzn. jest niezależna od tego czy układ jest lokalnie chaotyczny, czy lokalnie stabilny. W związku z tym, że znane są również wszystkie oprócz pierwszej współrzędne wektora $s_{N+1}^d = \left(s_{N+1}, s_{N-\tau+1}, \ldots, s_{N-(d-1)\tau+1}\right)$, można wyznaczyć wartość s_{N+1}. s_{N+1}^d, która znajduje się na przecięciu sfery o promieniu $\Delta_1 = \Delta_{\min} e^{\lambda_{\max}}$ i o środku w punkcie s_N^d z prostą l przechodzącą przez punkty postaci $\left(z, s_{N-\tau}, \ldots, s_{N-(d-1)\tau+1}\right)$, $z \in R$. W przestrzeni euklidesowej s_{N+1} należy do zbioru wszystkich punktów $z \in R$, będących miejscem zerowym wielomianu:

$$\left(z - s_{i+1}\right)^2 + \left(s_N - s_i\right)^2 + \ldots + \left(s_{N-(d-1)\tau+1} - s_{i-(d-1)\tau+1}\right)^2 - \left(\Delta_{\min} e^{\lambda_{\max}}\right)^2 = 0 . \quad (11)$$

Stąd prognoza $\hat{s}_{N+1}$ może przyjmować dwie wartości: $\hat{s}_{N+1}^{+}$ oraz $\hat{s}_{N+1}^{-}$, będące odpowiednio „przeszacowaną" (LEM"+") i „niedoszacowaną" (LEM"–") wartością rzeczywistego s_{N+1} [Guégan, Leroux, 2009, s. 2402-2403].

4. Redukcja szumu losowego

W metodzie NS redukcji szumu losowego, część deterministyczną (y_t) szeregu czasowego buduje się na podstawie najbliższych sąsiadów (w sensie metryki euklidesowej d-wymiarowej) wektorów s_t^d zrekonstruowanej przestrzeni stanów układu dynamicznego opisanego szeregiem (s_t).

Algorytm wyznaczania wartości y_n, $1 < n < N$ szeregu czasowego ($s_1, s_2, \ldots, s_N$) metodą najbliższych sąsiadów jest następujący:

1. Dla oszacowanego wymiaru zanurzenia d oraz opóźnienia czasowego $\tau = 1$ stworzono wektor opóźnień postaci:

$$s_t^d = \left(s_t, s_{t+1}, \ldots, s_{t+(d-1)}\right), \quad (12)$$

tak aby filtrowana obserwacja s_n była jedną ze środkowych współrzędnych wektora s_t^d.

2. Wyznaczono k najbliższych sąsiadów (w sensie odległości euklidesowej) wektora s_t^d, postaci:

$$s_{l(1)}^d, s_{l(2)}^d, \ldots, s_{l(k)}^d.$$

Często spotykanym w literaturze postulatem jest, aby liczba najbliższych sąsiadów spełniała warunek $2(d + 1) \le k < N - (d - 1)\tau$ [Casdagli, 1989, s. 340; Cao, Sofio, 1999, s. 425].

3. Na podstawie wyznaczonych sąsiadów obliczono wartość y_n jako średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych najbliższych sąsiadów:

$$y_n = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} s_{l(i)} \,. \tag{13}$$

4. Badania empiryczne

Przedmiotem badania były logarytmy dziennych stóp zwrotu kursów: franka szwajcarskiego (CHF), euro (EUR), funta brytyjskiego (GBP), jena japońskiego (JPY), dolara amerykańskiego (USD), wobec złotego; cen: Dębicy (DBC), ING Banku Śląskiego (BSK), LPP SA (LPP), Mostostalu Zabrze (MSZ), Vistuli (VST); oraz indeksów giełdowych: WIG i WIG20, postaci:

$$x_t = \ln s_t - \ln s_{t-1}, \tag{14}$$

gdzie:
s_t – obserwacja szeregu.

Dodatkowo badaniu poddano szeregi reszt, które powstały z badanych szeregów przefiltrowanych modelami ARMA. Do oszacowania parametrów modeli ARMA oraz do wyznaczenia parametrów szeregów reszt wykorzystano program GRETL. Przy wyborze odpowiedniego modelu ARMA kierowano się istotnością oszacowanych parametrów oraz kryterium Schwarza. Szeregi reszt oznaczono symbolem *NazwaSzeregu*_1. Następnie szeregi reszt poddano procedurze redukcji szumu losowego metodą najbliższych sąsiadów. Uzyskane w ten sposób szeregi oznaczono *NazwaSzeregu*_2.

Wartość największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych szeregów oszacowano na podstawie zależności (6) w zrekonstruowanej przestrzeni stanów. Parametry d-historii, tj. opóźnienie czasowe i minimalny wymiar zanurzenia, oszacowano za pomocą funkcji autokorelacji ACF oraz metody pozornych fałszywych sąsiadów. Obliczenia wykonano przy użyciu programu napisanego przez autora. W obliczeniach przyjęto liczbę najbliższych sąsiadów $k = 1$. W tabeli 1 przedstawiono wyniki szacowania największego wykładnika Lapunowa.

Tabela 1

Wyniki szacowania największego wykładnika Lapunowa dla analizowanych szeregów

Szereg	Równanie regresji	λ_{max}	Szereg	Równanie regresji	λ_{max}
BSK	y = 0,0074x − 4,0591 R^2 = 0,4177	0,0074	LPP	y = 0,0028x – 3,8968 R^2 = 0,251	(0,0028)
BSK_1	y = 0,0012x − 4,0364 R^2 = 0,3271	0,0012	LPP_1	y = 0,0019x – 3,834 R^2 = 0,4022	0,0019
BSK_2	y = 0,0023x − 4,9233 R^2 = 0,4441	0,0023	LPP_2	y = 0,0017x – 5,4842 R^2 = 0,3929	0,0017
CHF	y = 0,0014x − 4,8925 R^2 = 0,5133	0,0014	MSZ	y = 0,0022x – 3,5262 R^2 = 0,2917	(0,0022)
CHF_1	y = 0,0008x − 4,0891 R^2 = 0,4689	0,0008	MSZ_1	y = 0,0011x – 3,4639 R^2 = 0,4605	0,0011
CHF_2	y = 0,0029x − 6,558 R^2 = 0,6646	0,0029	MSZ_2	y = 0,0009x – 5,1785 R^2 = 0,1344	(0,0009)
DBC	y = 0,0012x − 4,0931 R^2 = 0,5941	0,0012	USD	y = 0,0013x − 4,6015 R^2 = 0,4525	0,0013
DBC_1	y = 0,0034x − 4,0988 R^2 = 0,7244	0,0034	USD_1	y = 0,0008x − 4,6068 R^2 = 0,493	0,0008
DBC_2	y = 0,0015x − 6,2532 R^2 = 0,4394	0,0015	USD_2	y = 0,0007x – 6,2377 R^2 = 0,0643	–
EUR	y = 0,0028x – 5,1345 R^2 = 0,5113	0,0028	VST	y = 0,0025x – 3,5699 R^2 = 0,2798	0,0025
EUR_1	y = 0,0011x – 5,1567 R^2 = 0,6004	0,0011	VST_1	y = 0,0012x – 3,5992 R^2 = 0,577	0,0012
EUR_2	y = 0,0002x – 6,9627 R^2 = 0,0061	–	VST_2	y = 0,0063x – 5,3806 R^2 = 0,3563	0,0063
GBP	y = 0,0009x − 4,8483 R^2 = 0,2311	0,0009	WIG	y = 0,0023x − 4,3132 R^2 = 0,6634	0,0023
GBP_1	y = 0,0011x − 4,8536 R^2 = 0,6404	0,0011	WIG_1	y = 0,0011x − 4,3151 R^2 = 0,5345	0,0011
GBP_2	y = 0,0043x – 6,7553 R^2 = 0,6284	0,0043	WIG_2	y = 0,0002x – 5,9989 R^2 = 0,6899	0,0002
JPY	y = 0,001x − 4,5883 R^2 = 0,4811	0,001	WIG20	y = 0,0012x − 4,1253 R^2 = 0,3335	0,0012
JPY_1	y = 0,0015x − 4,5798 R^2 = 0,6678	0,0015	WIG20_1	y = 0,0008x − 4,1587 R^2 = 0,1876	(0,0008)
JPY_2	y = 0,0005x − 6,722 R^2 = 0,2833	(0,0005)	WIG20_2	y = 0,0018x – 6,0239 R^2 = 0,3937	0,0018

Na podstawie danych zamieszczonych w tabeli 1 można stwierdzić wpływ filtrowania, a w szczególności redukcji szumu losowego, na wartość największego wykładnika Lapunowa. Dla szeregów CHF, GBP, DBC, LPP, VST, WIG20 po redukcji szumu wartość wykładnika Lapunowa wzrosła. Można zatem wnioskować, że poziom chaosu (choć nadal niewielki) w badanych szeregach zwiększył się. Po przefiltrowaniu metodą najbliższych sąsiadów szeregów EUR i USD ustalenie wartości λ_{max}, stało się niemożliwe ze względu na zbyt niski współczynnik R^2. Podobnie, dla szeregów LPP, MSZ, MSZ_2 i WIG20_1, oszacowany współczynnik regresji nie może być traktowany jako wartość największego wykładnika Lapunowa.

Do wyznaczenia prognoz badanych szeregów czasowych zastosowano metodę LEM. Do oceny dokładności prognozy wykorzystano:

− bezwzględny błąd prognozy w momencie T:

$$d_T = x_T - \hat{x}_T, \tag{15}$$

− średni błąd prognozy ex post:

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{t=n+1}^{n+h}\left(x_T - \hat{x}_T\right)^2}, \tag{16}$$

− względny błąd prognozy:

$$\sigma'_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \tag{17}$$

− współczynnik Thiela:

$$I^2 = \frac{h\sigma_T^2}{\sum\limits_{T=n+1}^{n+h} x_T^2}, \tag{18}$$

gdzie:

x_T – rzeczywista wartość badanej zmiennej w momencie T,

$\hat{x}_T$ − prognoza wartości zmiennej w momencie T,

σ − odchylenie standardowe szeregu obserwacji,

$T = n + 1, \ldots, n + h$,

h – liczba naturalna oznaczająca odległość okresu prognozowanego od okresu bieżącego.

W tabeli 2 przedstawiono błędy d_t i σ_t otrzymanych prognoz dla badanych szeregów czasowych. W związku z tym, że dla szeregów EUR_2 i USD_2 nie można było oszacować wartości największego wykładnika Lapunowa, szeregi te nie zostały poddane procedurze prognozowania metoda LEM.

Tabela 2

Błędy otrzymanych prognoz dla analizowanych szeregów

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
BSK – LEM"+"										
d_t	–0,0734	–0,0598	–0,0512	–0,0577	–0,0275	–0,1180	–0,0720	–0,0799	–0,0755	–0,1051
σ	0,0734	0,0670	0,0622	0,0611	0,0560	0,0703	0,0705	0,0717	0,0722	0,0761
BSK – LEM"–"										
d_t	0,1207	0,0646	0,1074	0,0341	0,0420	0,0927	0,0616	0,0640	0,0917	0,0902
σ	0,1207	0,0969	0,1005	0,0887	0,0815	0,0835	0,0807	0,0788	0,0803	0,0814
BSK_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0273	–0,0050	–0,0284	–0,0393	–0,0365	–0,0175	–0,0263	–0,0383	–0,0568	–0,0818
σ	0,0273	0,0197	0,0230	0,0280	0,0299	0,0282	0,0279	0,0294	0,0336	0,0410
BSK_1 – LEM"–"										
d_t	0,0353	0,0469	0,0501	0,0069	0,0454	–0,0063	0,0119	–0,0175	0,0296	0,0362
σ	0,0353	0,0415	0,0446	0,0387	0,0402	0,0368	0,0343	0,0327	0,0324	0,0328
BSK_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0354	–0,0069	–0,0205	–0,0486	–0,0464	–0,0282	–0,0387	–0,0178	–0,0192	0,0079
σ	0,0354	0,0255	0,0240	0,0320	0,0353	0,0342	0,0349	0,0333	0,0320	0,0305
BSK_2 – LEM"–"										
d_t	0,0133	0,0085	–0,0144	0,0483	0,0301	–0,0149	0,0362	0,0253	0,0258	0,0236
σ	0,0133	0,0112	0,0124	0,0264	0,0272	0,0256	0,0273	0,0271	0,0270	0,0266
CHF – LEM"+"										
d_t	–0,0446	–0,0406	–0,0171	–0,0149	–0,0384	–0,0387	–0,0276	–0,0271	–0,0426	–0,0328
σ	0,0446	0,0427	0,0362	0,0323	0,0336	0,0345	0,0336	0,0328	0,0341	0,0339
CHF – LEM"–"										
d_t	0,0493	0,0305	0,0281	0,0201	0,0185	0,0432	0,0570	0,0231	0,0287	0,0456
σ	0,0493	0,0410	0,0372	0,0338	0,0313	0,0336	0,0378	0,0363	0,0356	0,0367
CHF_1 – LEM"+"										
d_t	0,0003	0,0046	–0,0039	–0,0003	–0,0078	0,0046	–0,0039	–0,0131	–0,0173	–0,0140
σ	0,0003	0,0033	0,0035	0,0030	0,0044	0,0044	0,0044	0,0062	0,0082	0,0089
CHF_1 – LEM"–"										
d_t	0,0010	0,0120	0,0053	0,0093	0,0033	0,0165	0,0079	0,0166	0,0145	0,0186
σ	0,0010	0,0085	0,0076	0,0081	0,0074	0,0095	0,0093	0,0105	0,0110	0,0120
CHF_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0020	–0,0062	0,0004	–0,0041	–0,0017	–0,0050	–0,0021	–0,0055	–0,0031	–0,0045
σ	0,0020	0,0046	0,0038	0,0039	0,0036	0,0038	0,0036	0,0039	0,0038	0,0039
CHF_2 – LEM"–"										
d_t	0,0004	–0,0022	0,0035	–0,0002	0,0044	0,0014	0,0050	0,0015	–0,0006	–0,0011
σ	0,0004	0,0016	0,0024	0,0021	0,0027	0,0025	0,0030	0,0029	0,0027	0,0026
EUR – LEM"+"										
d_t	–0,0164	–0,0133	–0,0244	–0,0250	–0,0206	–0,0091	–0,0143	–0,0304	–0,0137	–0,0224
σ	0,0164	0,0149	0,0186	0,0204	0,0205	0,0190	0,0184	0,0203	0,0197	0,0200
EUR – LEM"–"										
d_t	0,0108	0,0152	0,0279	0,0210	0,0236	0,0163	0,0195	0,0152	0,0157	0,0296
σ	0,0108	0,0132	0,0194	0,0198	0,0206	0,0200	0,0199	0,0194	0,0190	0,0203
EUR_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0163	–0,0129	–0,0232	–0,0238	–0,0189	–0,0077	–0,0131	–0,0307	–0,0128	–0,0235
σ	0,0163	0,0147	0,0180	0,0196	0,0194	0,0180	0,0174	0,0196	0,0189	0,0194

cd. tabeli 2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EUR_1 – LEM"–"										
d_t	0,0113	0,0160	0,0270	0,0200	0,0226	0,0149	0,0182	0,0158	0,0162	0,0304
σ	0,0113	0,0139	0,0193	0,0195	0,0201	0,0194	0,0192	0,0188	0,0185	0,0200
GBP – LEM"+"										
d_t	–0,0394	–0,0060	–0,0081	–0,0264	–0,0202	0,0028	0,0021	–0,0314	–0,0315	–0,0016
σ	0,0394	0,0282	0,0235	0,0242	0,0235	0,0215	0,0199	0,0217	0,0230	0,0218
GBP – LEM"–"										
d_t	0,0296	0,0167	0,0272	0,0261	–0,0044	0,0148	0,0394	0,0389	0,0009	0,0283
σ	0,0296	0,0241	0,0251	0,0254	0,0228	0,0217	0,0250	0,0271	0,0256	0,0259
GBP_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0159	–0,0061	0,0053	–0,0028	–0,0093	0,0060	0,0117	–0,0117	–0,0071	–0,0255
σ	0,0159	0,0120	0,0103	0,0090	0,0091	0,0086	0,0091	0,0095	0,0092	0,0119
GBP_1 – LEM"–"										
d_t	0,0031	0,0162	0,0174	0,0046	–0,0031	0,0117	0,0123	0,0111	0,0277	0,0147
σ	0,0031	0,0116	0,0138	0,0122	0,0110	0,0111	0,0113	0,0113	0,0141	0,0141
GBP_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0033	–0,0011	–0,0009	0,0009	–0,0003	–0,0041	0,0014	–0,0034	–0,0081	–0,0076
σ	0,0033	0,0024	0,0021	0,0018	0,0017	0,0023	0,0022	0,0023	0,0035	0,0041
GBP_2 – LEM"–"										
d_t	–0,0009	–0,0001	–0,0007	0,0027	0,0010	–0,0006	0,0057	0,0025	–0,0009	0,0037
σ	0,0009	0,0006	0,0006	0,0015	0,0014	0,0013	0,0025	0,0025	0,0024	0,0025
JPY – LEM"+"										
d_t	–0,0389	–0,0260	–0,0434	–0,0239	–0,0316	–0,0237	–0,0312	–0,0147	–0,0179	–0,0144
σ	0,0389	0,0331	0,0369	0,0341	0,0336	0,0322	0,0320	0,0304	0,0293	0,0282
JPY – LEM"–"										
d_t	0,0317	0,0102	0,0337	0,0364	0,0682	0,0175	0,0602	0,0037	0,0173	0,0406
σ	0,0317	0,0235	0,0273	0,0299	0,0405	0,0377	0,0417	0,0390	0,0372	0,0376
JPY_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0245	–0,0128	–0,0570	–0,0597	–0,0566	–0,0135	–0,0636	–0,0703	–0,0569	–0,0002
σ	0,0245	0,0195	0,0366	0,0435	0,0464	0,0427	0,0463	0,0499	0,0507	0,0481
JPY_1 – LEM"–"										
d_t	0,0274	0,0311	0,0260	0,0643	0,0206	0,0638	0,0437	0,0573	0,0551	0,0155
σ	0,0274	0,0293	0,0283	0,0404	0,0373	0,0429	0,0430	0,0450	0,0462	0,0441
JPY_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0097	–0,0085	–0,0074	–0,0055	–0,0053	–0,0057	–0,0077	–0,0083	–0,0062	–0,0022
σ	0,0097	0,0091	0,0086	0,0079	0,0075	0,0072	0,0073	0,0074	0,0073	0,0069
JPY_2 – LEM"–"										
d_t	0,0075	0,0045	0,0065	0,0088	0,0045	0,0082	0,0058	0,0066	0,0084	0,0000
σ	0,0075	0,0062	0,0063	0,0070	0,0066	0,0069	0,0067	0,0067	0,0069	0,0066
USD – LEM"+"										
d_t	–0,0604	–0,0123	–0,0551	–0,0193	–0,0648	0,0013	–0,0272	0,0039	–0,0375	0,0080
σ	0,0604	0,0436	0,0477	0,0424	0,0478	0,0436	0,0417	0,0390	0,0388	0,0369
USD – LEM"–"										
d_t	0,0226	0,0193	0,0277	0,0218	0,0166	0,0380	0,0556	0,0177	0,0299	0,0131
σ	0,0226	0,0210	0,0234	0,0231	0,0219	0,0253	0,0315	0,0301	0,0301	0,0288
USD_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0204	–0,0320	–0,0151	–0,0023	–0,0292	–0,0364	–0,0325	–0,0131	–0,0487	–0,0173
σ	0,0204	0,0269	0,0236	0,0205	0,0225	0,0253	0,0265	0,0252	0,0288	0,0278

cd. tabeli 2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
USD_1 – LEM"–"										
d_t	0,0414	0,0025	0,0338	0,0070	0,0310	0,0042	0,0062	0,0230	0,0115	0,0175
σ	0,0414	0,0293	0,0309	0,0270	0,0278	0,0255	0,0237	0,0236	0,0226	0,0221
DBC – LEM"+"										
d_t	–0,1093	–0,0450	–0,1313	–0,1411	–0,1297	–0,0905	–0,0324	–0,0783	–0,0857	–0,1132
σ	0,1093	0,0835	0,1020	0,1130	0,1166	0,1126	0,1050	0,1020	0,1004	0,1017
DBC – LEM"–"										
d_t	0,0552	0,1128	0,1158	0,1154	0,0766	0,1023	0,0051	0,0907	0,0671	0,1302
σ	0,0552	0,0888	0,0986	0,1031	0,0984	0,0990	0,0917	0,0916	0,0892	0,0941
DBC_1 – LEM"+"										
d_t	–0,1031	–0,0877	–0,0630	–0,0541	–0,0436	–0,0809	–0,0922	–0,0302	–0,0866	–0,0182
σ	0,1031	0,0957	0,0862	0,0794	0,0737	0,0749	0,0776	0,0734	0,0750	0,0714
DBC_1 – LEM"–"										
d_t	0,0853	0,0885	0,0073	0,0961	0,0331	0,1112	0,0880	0,0300	0,0631	0,0783
σ	0,0853	0,0869	0,0711	0,0781	0,0714	0,0794	0,0807	0,0762	0,0749	0,0752
DBC_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0146	–0,0111	–0,0127	–0,0109	–0,0029	–0,0209	–0,0074	–0,0066	–0,0095	–0,0079
σ	0,0146	0,0130	0,0129	0,0124	0,0112	0,0133	0,0126	0,0120	0,0118	0,0115
DBC_2 – LEM"–"										
d_t	0,0113	0,0105	0,0052	0,0077	0,0008	0,0052	0,0147	0,0115	0,0091	–0,0027
σ	0,0113	0,0109	0,0094	0,0090	0,0081	0,0077	0,0090	0,0093	0,0093	0,0089
LPP – LEM"+"										
d_t	–0,0736	–0,1335	–0,0552	–0,1795	–0,0832	–0,1216	–0,0960	–0,1240	–0,1249	–0,0611
σ	0,0736	0,1078	0,0936	0,1209	0,1144	0,1156	0,1130	0,1144	0,1156	0,1114
LPP – LEM"–"										
d_t	0,1615	0,1048	0,0226	0,0487	0,1202	0,1103	0,1232	0,0977	0,1158	0,1082
σ	0,1615	0,1361	0,1119	0,0999	0,1043	0,1053	0,1081	0,1068	0,1079	0,1079
LPP_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0801	–0,0338	–0,1033	–0,0664	–0,0856	–0,0375	–0,0571	–0,1271	–0,0926	–0,0508
σ	0,0801	0,0615	0,0780	0,0752	0,0774	0,0723	0,0703	0,0797	0,0812	0,0787
LPP_1 – LEM"–"										
d_t	0,1208	–0,0158	0,0984	–0,0346	0,1163	0,0884	0,1384	0,0290	0,1026	0,1090
σ	0,1208	0,0862	0,0905	0,0802	0,0886	0,0886	0,0973	0,0916	0,0928	0,0946
LPP_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0162	–0,0026	–0,0125	–0,0081	–0,0076	–0,0044	–0,0051	–0,0173	–0,0165	–0,0053
σ	0,0162	0,0116	0,0119	0,0111	0,0105	0,0097	0,0092	0,0106	0,0114	0,0109
LPP_2 – LEM"–"										
d_t	0,0127	0,0048	0,0165	–0,0003	0,0216	0,0085	0,0249	0,0056	0,0134	0,0174
σ	0,0127	0,0096	0,0123	0,0107	0,0136	0,0129	0,0152	0,0143	0,0142	0,0146
MSZ – LEM"+"										
d_t	–0,0851	–0,0980	0,0423	–0,0942	–0,0735	–0,0306	–0,0973	–0,0723	–0,0937	–0,1007
σ	0,0851	0,0917	0,0788	0,0829	0,0811	0,0751	0,0786	0,0779	0,0798	0,0821
MSZ – LEM"–"										
d_t	0,0373	0,0980	0,1193	0,0622	0,0409	0,0142	0,0970	0,0884	0,0599	0,1011
σ	0,0373	0,0741	0,0917	0,0853	0,0784	0,0718	0,0759	0,0776	0,0759	0,0787
MSZ_1 – LEM"+"										
d_t	–0,1330	–0,1447	–0,1065	–0,0778	–0,0324	–0,1439	–0,1161	–0,1646	–0,0767	–0,0076
σ	0,1330	0,1390	0,1291	0,1183	0,1068	0,1139	0,1142	0,1216	0,1175	0,1115

cd. tabeli 2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MSZ_1 – LEM"–"										
d_t	0,1546	0,0864	0,1826	0,0449	0,0004	0,1402	0,1304	0,1058	0,0650	0,0360
σ	0,1546	0,1252	0,1469	0,1292	0,1155	0,1200	0,1215	0,1197	0,1149	0,1096
MSZ_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0135	–0,0170	–0,0028	–0,0101	–0,0046	–0,0243	–0,0150	–0,0197	–0,0107	–0,0157
σ	0,0135	0,0154	0,0126	0,0121	0,0110	0,0141	0,0142	0,0150	0,0146	0,0147
MSZ_2 – LEM"–"										
d_t	0,0377	0,0257	0,0247	0,0326	0,0084	0,0276	0,0118	0,0014	0,0312	0,0184
σ	0,0377	0,0323	0,0300	0,0306	0,0277	0,0276	0,0260	0,0243	0,0252	0,0246
VST – LEM"+"										
d_t	–0,0749	–0,0549	–0,0458	–0,0713	–0,0470	–0,0988	–0,0939	–0,0599	0,0514	–0,0886
σ	0,0749	0,0657	0,0598	0,0629	0,0601	0,0681	0,0723	0,0709	0,0690	0,0712
VST – LEM"–"										
d_t	0,1084	0,0272	0,0409	0,0994	0,0470	0,0270	0,0788	0,0378	0,1271	0,0793
σ	0,1084	0,0790	0,0687	0,0775	0,0724	0,0670	0,0688	0,0658	0,0751	0,0755
VST_1 – LEM"+"										
d_t	–0,1001	–0,1004	–0,0974	–0,0427	–0,1063	–0,1398	–0,0707	–0,1120	–0,0331	–0,0886
σ	0,1001	0,1002	0,0993	0,0886	0,0924	0,1019	0,0980	0,0999	0,0948	0,0942
VST_1 – LEM"–"										
d_t	0,1645	0,1284	0,0573	0,0407	0,1381	0,0693	0,0072	0,1561	0,2021	0,0822
σ	0,1645	0,1476	0,1249	0,1101	0,1162	0,1098	0,1017	0,1100	0,1236	0,1201
VST_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0249	–0,0153	–0,0091	–0,0167	–0,0044	–0,0078	–0,0078	–0,0084	–0,0145	–0,0045
σ	0,0249	0,0207	0,0177	0,0175	0,0157	0,0147	0,0139	0,0134	0,0135	0,0129
VST_2 – LEM"–"										
d_t	0,0095	0,0222	0,0106	0,0047	0,0244	0,0235	0,0059	0,0279	0,0252	0,0189
σ	0,0095	0,0171	0,0152	0,0134	0,0162	0,0176	0,0165	0,0183	0,0192	0,0192
WIG – LEM"+"										
d_t	–0,0562	–0,0564	–0,0770	–0,0766	–0,0561	–0,0661	–0,0600	–0,0514	–0,0425	–0,0421
σ	0,0562	0,0563	0,0640	0,0674	0,0653	0,0654	0,0647	0,0632	0,0612	0,0596
WIG – LEM"–"										
d_t	0,0833	0,0489	0,0291	0,0414	0,0372	0,0338	0,0810	0,0466	0,0681	0,0683
σ	0,0833	0,0683	0,0582	0,0545	0,0515	0,0490	0,0547	0,0538	0,0556	0,0570
WIG_1 – LEM"+"										
d_t	–0,0156	–0,0202	–0,0043	–0,0301	–0,0298	–0,0443	–0,0196	–0,0293	–0,0357	–0,0288
σ	0,0156	0,0180	0,0149	0,0198	0,0222	0,0271	0,0262	0,0266	0,0278	0,0279
WIG_1 – LEM"–"										
d_t	0,0417	–0,0053	0,0544	–0,0004	0,0267	–0,0016	0,0369	0,0179	0,0210	0,0143
σ	0,0417	0,0297	0,0397	0,0344	0,0330	0,0301	0,0312	0,0298	0,0290	0,0279
WIG_2 – LEM"+"										
d_t	–0,0100	0,0018	–0,0104	–0,0093	–0,0050	–0,0029	–0,0074	–0,0031	–0,0053	–0,0085
σ	0,0100	0,0072	0,0084	0,0086	0,0080	0,0074	0,0074	0,0070	0,0069	0,0070
WIG_2 – LEM"–"										
d_t	0,0070	0,0038	0,0069	0,0019	0,0084	0,0062	0,0065	0,0046	0,0083	–0,0006
σ	0,0070	0,0057	0,0061	0,0054	0,0061	0,0061	0,0062	0,0060	0,0063	0,0060
WIG20 – LEM"+"										
d_t	–0,0217	–0,0134	–0,0120	–0,0070	–0,0153	–0,0499	–0,0313	–0,0042	–0,0366	–0,0203
σ	0,0217	0,0180	0,0163	0,0145	0,0147	0,0244	0,0255	0,0239	0,0256	0,0251

cd. tabeli 2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
WIG20 – LEM"–"										
d_t	0,0410	0,0047	0,0135	0,0024	0,0463	0,0011	0,0138	0,0196	0,0239	0,0117
σ	0,04100	0,0292	0,0251	0,0217	0,0284	0,0259	0,0246	0,0240	0,0240	0,0231
WIG20 – LEM"+"										
d_t	–0,0508	–0,0589	–0,0391	–0,0736	–0,0362	–0,0766	–0,0355	–0,0498	–0,0455	–0,0521
σ	0,0508	0,0550	0,0502	0,0570	0,0535	0,0580	0,0553	0,0547	0,0537	0,0536
WIG20 – LEM"–"										
d_t	0,0811	0,0489	0,0305	0,0419	0,0397	0,0294	0,0842	0,0457	0,0627	0,0494
σ	0,0811	0,0669	0,0574	0,0540	0,0514	0,0484	0,0550	0,0539	0,0550	0,0544
WIG20 – LEM"+"										
d_t	–0,0174	–0,0085	–0,0071	–0,0002	–0,0086	–0,0122	–0,0169	–0,0112	–0,0205	–0,0101
σ	0,0174	0,0137	0,0119	0,0103	0,0100	0,0104	0,0116	0,0115	0,0128	0,0126
WIG20 – LEM"–"										
d_t	0,0135	0,0169	0,0134	0,0136	0,0141	0,0125	0,0121	0,0176	0,0098	0,0107
σ	0,0135	0,0153	0,0147	0,0144	0,0144	0,0141	0,0138	0,0143	0,0139	0,0136

Analizując dane zawarte w tabeli 2 można stwierdzić, że dla przefiltrowanych szeregów czasowych metodą najbliższych sąsiadów dokładność prognoz znacznie się poprawiła. Świadczą o tym dużo niższe wartości błędów d_t i σ. Przefiltrowanie szeregów modelami ARMA w większości przypadków też spowodowało zmniejszenie błędów wyznaczonych prognoz.

W tabeli 3 przedstawiono wartości błędów σ' i I^2 w całym przedziale weryfikacji dla $h = 10$.

Tabela 3

Błędy oszacowanych prognoz w całym przedziale weryfikacji

	LEM"+"			LEM"–"		
1	2	3	4	5	6	7
Szereg	BSK	BSK_1	BSK_2	BSK	BSK_1	BSK_2
σ'	3,7624	2,0356	3,5907	4,0236	1,6255	3,1395
I^2	39,0208	11,1914	64,1246	44,6277	7,1362	49,0232
Szereg	CHF	CHF_1	CHF_2	CHF	CHF_1	CHF_2
σ'	3,7669	0,9985	2,8544	4,0706	1,3387	1,9053
I^2	70,1807	4,8945	8,5426	81,9537	8,7979	3,8060
Szereg	DBC	DBC_1	DBC_2	DBC	DBC_1	DBC_2
σ'	5,2814	3,7262	5,8703	4,8860	3,9282	4,5523
I^2	42,0420	28,1449	23,9340	35,9824	31,2795	14,3930
Szereg	EUR	EUR_1	EUR_2	EUR	EUR_1	EUR_2
σ'	2,9462	2,8763	–	2,9939	2,9643	–
I^2	25,7876	24,0222	–	26,6308	25,5151	–
Szereg	GBP	GBP_1	GBP_2	GBP	GBP_1	GBP_2
σ'	2,6097	1,4286	3,6255	3,0950	1,6943	2,2337
I^2	14,4494	4,3821	10,9789	20,3234	6,1637	4,1674

cd. tabeli 3

1	2	3	4	5	6	7
Szereg	JPY	JPY_1	JPY_2	JPY	JPY_1	JPY_2
σ'	2,2379	3,8340	5,4232	2,9857	3,5157	5,1333
I^2	10,7782	31,6173	23,0972	19,1849	26,5852	20,6940
Szereg	LPP	LPP_1	LPP_2	LPP	LPP_1	LPP_2
σ'	4,9060	3,4716	2,7385	4,7513	4,1716	3,6589
I^2	20,1778	10,0180	8,8826	18,9254	14,4653	15,8568
Szereg	MSZ	MSZ_1	MSZ_2	MSZ	MSZ_1	MSZ_2
σ'	2,4086	3,3030	2,6979	2,3099	3,2466	4,5026
I^2	19,4599	34,5732	9,3809	17,8976	33,4024	26,1282
Szereg	USD	USD_1	USD_2	USD	USD_1	USD_2
σ'	3,4346	2,5969	–	2,6818	2,0639	–
I^2	26,8553	6,4171	–	16,3723	4,0530	–
Szereg	VST	VST_1	VST_2	VST	VST_1	VST_2
σ'	2,2836	3,0554	2,7537	2,4218	3,8972	4,0948
I^2	6,8404	10,5410	4,0823	7,6934	17,1497	9,0269
Szereg	WIG	WIG_1	WIG_2	WIG	WIG_1	WIG_2
σ'	4,2494	1,9991	2,9440	4,0635	1,9991	2,4955
I^2	56,3558	11,0287	8,4273	51,5320	11,0283	6,0553
Szereg	WIG20	WIG20_1	WIG20_2	WIG20	WIG20_1	WIG20_2
σ'	1,5166	3,2440	5,1373	1,3915	3,2961	5,5535
I^2	7,4987	35,1673	14,7888	6,3129	36,3054	17,2823

Na podstawie danych zawartych w tabeli 3 można stwierdzić, że w wielu przypadkach błędy prognoz w całym przedziale weryfikacji dla szeregów przefiltrowanych metodą najbliższych sąsiadów są mniejsze niż błędy prognoz otrzymane dla szeregów przed filtracją. Dla szeregów JPY, MSZ, WIG20 dokładniejsze prognozy otrzymano dla szeregów nieprzefiltrowanych. Może to być spowodowane faktem, że oszacowane wykładniki Lapunowa dla tych szeregów charakteryzowały się niskim współczynnikiem R^2 i nie powinny być brane pod uwagę. Wyjątek stanowi szereg BSK. Przefiltrowane badanych szeregów czasowych, tylko za pomocą modeli ARMA, w wielu przypadkach pozwoliło uzyskać dokładniejsze prognozy.

Podsumowanie

W pracy zbadano wpływ redukcji szumu metodą najbliższych sąsiadów na dokładność prognoz ekonomicznych szeregów czasowych, otrzymanych za pomocą największego wykładnika Lapunowa. Celem artykułu było porównanie błędów prognoz dla szeregów przed i po redukcji szumu oraz szeregów przefiltrowanych modelami ARMA.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że redukcja szumu losowego w badanych szeregach czasowych pozwoliła uzyskać dokładniejsze prognozy. Ponadto, w wielu przypadkach przefiltrowanie badanych szeregów tylko za pomocą modeli ARMA również spowodowało znaczne zmniejszenie błędów uzyskanych prognoz.

Literatura

Cao L., Soofi A. (1999): Nonlinear Deterministic Forecasting of Daily Dollar Exchange Rates. “International Journal of Forecasting”, Vol. 15, s. 421-430.

Casdagli M. (1989): Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series. “Physica D”, Vol. 53, s. 335-356.

Eckmann J.P., Ruelle D. (1985): Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. “Reviews of Modern Physics”, Vol. 57, No. 3.

Guégan D., Leroux J. (2009): Forecasting Chaotic Systems: The Role of Local Lyapunov Exponents. “Chaos, Solitons & Fractals”, Vol. 41, s. 2401-2404.

Kantz H. (1994): A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series. “Physical Letters A”, Vol. 185(1), s. 77-87.

Kantz H., Schreiber T. (2004): Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I. (1992): Detecting Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction. “Physical Review A”, 45.

Lorenz E.N. (1969): Atmospheric Predictability as Revealed by Naturally Occurring Analogues. J. Atmos. Sci., 26, s. 636-646.

Miśkiewicz-Nawrocka M. (2012): Zastosowanie wykładników Lapunowa do analizy ekonomicznych szeregów czasowych. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.

Nowiński M. (2007): Nieliniowa dynamika szeregów czasowych. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław.

Oseledec V.I. (1968): A Mulitiplicative Ergodic Theorem. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical System. “Trans. Moscow Math. Soc.”, 19, s. 197-231.

Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. (1980): Geometry from a Time Series. “Physical Review Letters”, Vol. 45, s. 712-716.

Rosenstein M.T., Collins J.J. et al. (1993): A Practical Method for Calculating Largest Lyapunov Exponents from Small Data Sets. “Physica D”, Vol. 65, s. 117-134.

Takens (1981): Detecting Strange Atractors in Turbulance. W: Lecture Notes in Mathematics. Eds. D.A. Rand, L.S. Young. Springer Verlag, Berlin.

Zawadzki H. (1996): Chaotyczne systemy dynamiczne. Elementy teorii i wybrane zagadnienia ekonomiczne. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Zhang J., Lam K.C., Yan W.J., Gao H., Li Y., (2004): Time Series Prediction using Lyapunov Exponents in Embedding Phase Space. "Computers and Electrical Engineering" 30, s. 1-15.

THE EFFECT OF THE REDUCTION RANDOM NOISE BY THE METHOD OF NEAREST NEIGHBORS ON FORECASTING RESULTS OBTAINED USING THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT

Summary

In this paper has been researched the effect of random noise reduction on the accuracy of forecasts of economic time series obtained using the largest Lyapunov exponent method (LEM). The aim of the article was to compare the prediction errors obtained by LEM for the series before and after the random noice reduction and the time series filtred by models ARMA. The nearest neighbors method was used to reduce random noise in economic time series.