Ewa Michalska
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

MODELE WYBORU PORTFELA AKCJI Z WARUNKIEM DOMINACJI LUB PRAWIE DOMINACJI STOCHASTYCZNYCH

Wprowadzenie

Problemy decyzyjne w warunkach niepewności dotyczą zwykle wyborów między losowymi wariantami decyzyjnymi. Dla racjonalnego decydenta ze znaną funkcją użyteczności najlepszym losowym wariantem decyzyjnym jest ten, któremu odpowiada np. maksymalna oczekiwana użyteczność. Trudności w określeniu dokładnej postaci funkcji użyteczności sprawiają jednak, iż w praktyce najbardziej pożądanymi są zasady decyzyjne reprezentujące wybory wszystkich lub prawie wszystkich decydentów, których funkcje użyteczności posiadają jedynie pewne ogólne cechy. Zasadami wyboru spełniającymi wspomniane postulaty są dominacje stochastyczne lub prawie dominacje stochastyczne.

Zasady dominacji stochastycznych oparte na funkcji dystrybuanty wprowadzili w matematyce Mann i Whitney [1947] oraz Lehmann [1955], zaś w ekonomii Quirk i Saposnik [1962], Hadar i Russel [1969], Hanoch i Levy [1969] oraz Rothschild i Stiglitz [1970, 1971]. Od lat zasady dominacji stochastycznych są wykorzystywane jako narzędzie wspomagające podejmowanie decyzji w różnych obszarach ekonomii i zarządzania. Celem pracy jest konstrukcja modeli wspomagających wybór optymalnego portfela akcji dominującego portfel wzorcowy w sensie prawie dominacji stochastycznych pierwszego lub drugiego stopnia oraz przedstawienie przykładów ich zastosowania[1].

1. Dominacje stochastyczne i prawie dominacje stochastyczne

Zasady dominacji stochastycznych umożliwiają podział losowych alternatyw na zdominowane i niezdominowane. Rozważmy dwie inwestycje (dwa port-

---

[1] Pierwszą propozycję modelu z warunkiem prawie dominacji stochastycznej stopnia drugiego przy założeniu różnych skokowych rozkładów wyznaczanego portfela i portfela wzorcowego przedstawiono w pracy Michalskiej [2011].

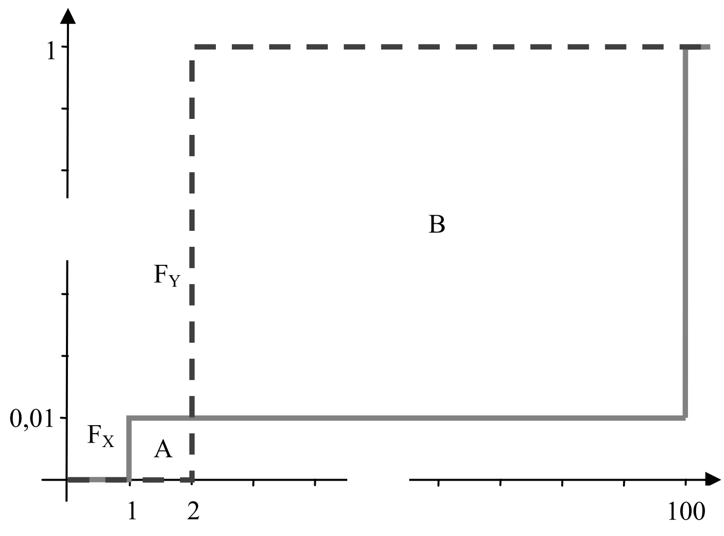
fele) X i Y wraz z odpowiadającymi im funkcjami dystrybuanty stóp zwrotu F_X i F_Y oraz zbiór S stanowiący łączny zbiór realizacji zmiennych losowych X i Y.

FSD: Inwestycja X dominuje Y w sensie dominacji stochastycznej pierwszego stopnia, co zapiszemy $X\,\mathrm{FSD}\,Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_X(r) - F_Y(r) \le 0$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_X(r) - F_Y(r) < 0$.

SSD: Inwestycja X dominuje Y w sensie dominacji stochastycznej drugiego stopnia, co zapiszemy $X\,\mathrm{SSD}\,Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_X^{(2)}(r) - F_Y^{(2)}(r) \le 0$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_X^{(2)}(r) - F_Y^{(2)}(r) < 0$, gdzie $F_X^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_X(t)\,dt$, $F_Y^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_Y(t)\,dt$.

Kryteria dominacji stochastycznych (w ich tradycyjnym rozumieniu) nie zawsze potwierdzają intuicyjne wybory większości „rozsądnych” inwestorów, co pokazuje następujący przykład:

Przykład 1. Inwestycja X to zysk 1 zł z prawdopodobieństwem 0,01 i 100 zł z prawdopodobieństwem 0,99, zaś inwestycja Y to pewny zysk wynoszący 2 zł. Wykresy odpowiednich prawdopodobieństw skumulowanych przedstawiono na rysunku 1.



Rys.1. Wykres prawdopodobieństw skumulowanych F_X i F_Y

Inwestycja X nie dominuje inwestycji Y ani w sensie dominacji pierwszego ani drugiego stopnia, jednak większość „rozsądnych” inwestorów (jeśli nie wszyscy) będzie preferować X nad Y. Ponadto obszar A odpowiadający przedziałowi, w którym inwestycja Y dominuje X jest bardzo mały w stosunku do obszaru B odpowiadającego przedziałowi, w którym inwestycja X dominuje Y w sensie dominacji stopnia pierwszego. Powiemy zatem, że inwestycja X „prawie" dominuje inwestycję Y w sensie dominacji stochastycznej stopnia pierwszego. Podobne przykłady skłoniły Leshno i Levy'ego do zaproponowania w 2002 r. „złagodzonych" warunków dominacji stochastycznych w postaci koncepcji prawie dominacji stochastycznych LL-ASD (Leshno Levy-Almost Stochastic Dominance) – [Leshno i Levy 2002].

LL-AFSD: Inwestycja X dominuje inwestycję Y w sensie LL-prawie dominacji stochastycznej stopnia pierwszego LL-AFSD, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ε, $0 \le \varepsilon < \varepsilon^*$, taki, że

$$\int_{S_1} (F_X(r) - F_Y(r))dr \le \varepsilon \int_{S} | F_X(r) - F_Y(r) | \, dr ,$$

gdzie S jest łącznym zbiorem realizacji zmiennych losowych X i Y oraz $S_1 = \{r \in S : F_Y(r) < F_X(r)\}$.

LL-ASSD: Inwestycja X dominuje inwestycję Y w sensie LL-prawie dominacji stochastycznej stopnia drugiego LL-ASSD, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ε, $0 \le \varepsilon < \varepsilon^*$, taki, że

$$\int_{S_2} (F_X(r) - F_Y(r))dr \le \varepsilon \int_{S} | F_X(r) - F_Y(r) | \, dr$$

oraz

$$E(X) \ge E(Y),$$

gdzie S jest łącznym zbiorem realizacji zmiennych losowych X i Y oraz $S_2 = \{r \in S_1 : F_Y^{(2)}(r) < F_X^{(2)}(r)\}$.

Zarówno dla prawie dominacji stochastycznych rzędu pierwszego, jak i drugiego przyjmuje się, że wartość parametru ε związanego z obserwowanym obszarem niezgodności powinna być mniejsza niż $\varepsilon^* = 0{,}5$.

W rozważanym wcześniej przykładzie X nie dominuje Y w sensie dominacji pierwszego ani drugiego stopnia, ale dominuje Y w sensie LL-AFSD, ponieważ $\varepsilon \approx 0{,}000103 < 0{,}5$. Warunki prawie dominacji stochastycznych Leshno i Levy'ego mogą być z łatwością wykorzystane w sytuacji, gdy bada się istnienie relacji dominacji pomiędzy danymi portfelami, jednak znalezienie przy ich pomocy portfela dominującego dany portfel (w sensie LL-ASD) w nieskończonym zbiorze możliwych portfeli może być praktycznie niewykonalne. Fakt ten przyczynił się do zaproponowania przez Lizyayeva następujących definicji prawie dominacji stochastycznych [Lizyayev 2010]:

AFSD: Inwestycja X dominuje Y w sensie prawie dominacji stochastycznej pierwszego stopnia, co zapiszemy $X\,\mathrm{AFSD}\,Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_X(r) - F_Y(r) \leq \varepsilon$.

ASSD: Inwestycja X dominuje Y w sensie prawie dominacji stochastycznej drugiego stopnia, co zapiszemy $X\,\mathrm{ASSD}\,Y$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_X^{(2)}(r) - F_Y^{(2)}(r) \leq \varepsilon$.

Lizyayev proponuje także następujące równoważne warunki prawie dominacji stochastycznej odpowiednio pierwszego i drugiego stopnia [Lizyayev 2010]:

Twierdzenie 1. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie prawie dominacji stochastycznej pierwszego stopnia, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieujemna zmienna losowa Z, taka, że $E(Z) \leq \varepsilon$ i $X + Z$ dominuje Y w sensie FSD.

Twierdzenie 2. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie prawie dominacji stochastycznej drugiego stopnia, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieujemna zmienna losowa Z, taka, że $E(Z) \leq \varepsilon$ i $X + Z$ dominuje Y w sensie SSD.

Parametr ε oznacza najmniejszą wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z, którą należy dodać do zmiennej losowej X, by ich suma dominowała dany portfel Y. W przykładzie 1 inwestycja X dominuje Y w sensie prawie dominacji stochastycznych AFSD dla $\varepsilon \approx 0{,}01$. By zmienna losowa X dominowała Y (w sensie prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego), należy do X dodać zmienną losową Z, której wartość oczekiwana wynosi co najmniej 0,01.

2. Modele wyboru optymalnego portfela z warunkiem dominacji stochastycznych lub prawie dominacji stochastycznych

Podstawowym założeniem modelu wyboru optymalnego portfela akcji zawierającego warunki dominacji stochastycznych pierwszego lub drugiego stopnia jest istnienie portfela wzorcowego Y o skończonej wartości oczekiwanej stopy zwrotu (może to być np. wybrany indeks giełdowy). Rozwiązanie takiego modelu ma na celu znalezienie portfela R_P o możliwie największej oczekiwanej stopie zwrotu dominującego portfel wzorcowy Y.

Niech $R_1, R_2, ..., R_n$ oznaczają losowe stopy zwrotu akcji $1, 2, ..., n$ stanowiących potencjalne składniki szukanego portfela, przy czym zakładamy, że wartość oczekiwana $E[R_j] < \infty$, dla $j = 1, 2, ..., n$. Ponadto

$W = \{w \in R^n : w_1 + w_2 + ... + w_n = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\}$, gdzie $w_1, w_2, ..., w_n$ oznaczają udziały akcji $1, 2, ..., n$ w portfelu oraz stopa zwrotu portfela $R_P = R_1 w_1 + R_2 w_2 + ... + R_n w_n$. Model wyboru portfela R_P zawierający warunek dominacji stopnia pierwszego (FSD) ma postać [Noyan, Rudolf i Ruszczyński 2006]:

$$\begin{aligned} &\max_w E[R_P] \\ &R_P \; FSD \; Y \; . \\ &w \in W \end{aligned} \tag{1}$$

Uwzględniając warunek dominacji stochastycznych drugiego stopnia (SSD), model wyboru portfela akcji formułuje się następująco [Dentcheva i Ruszczyński 2003]:

$$\begin{aligned} &\max_w E[R_P] \\ &R_P \; SSD \; Y \; . \\ &w \in W \end{aligned} \tag{2}$$

W literaturze można znaleźć kilka propozycji modeli ekwiwalentnych do (1) i (2), przy założeniu rozkładu dyskretnego zmiennych losowych R_P oraz Y [Dentcheva i Ruszczyński 2003; Kuosmanen 2004; Noyan, Rudolf i Ruszczyński 2006]. Prostą postać modelu (1) oraz (2) otrzymamy także zastępując warunek dominacji stochastycznych (odpowiednio pierwszego i drugiego stopnia) warunkami równoważnymi, na podstawie twierdzeń 3 i 4, które proponuje w swojej pracy Luedtke [2008]:

Twierdzenie 3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi skokowymi o rozkładach odpowiednio $\Pr\{X = x_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$, $\Pr\{Y = y_k\} = q_k$, dla $k = 1, 2, ..., s$. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie dominacji stochastycznej stopnia pierwszego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\pi = [\pi_{ik}]$ ($i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., s$) spełniająca warunki:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \leq x_i && i = 1, 2, ..., m \\ &\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 && i = 1, 2, ..., m \\ &\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \leq \sum_{l=1}^{k-1} q_l && k = 2, ..., s \\ &\pi_{ik} \in \{0, 1\} && i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s \, . \end{aligned} \tag{3}$$

Twierdzenie 4. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi skokowymi o rozkładach odpowiednio $\Pr\{X = x_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$, $\Pr\{Y = y_k\} = q_k$, dla $k = 1, 2, ..., s$. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie dominacji stochastycznej stopnia drugiego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\pi = [\pi_{ik}]$ ($i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., s$) spełniająca warunki:

$$\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \le x_i & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \le \sum_{l=1}^{k-1} q_l & k = 2, ..., s \\ \pi_{ik} \ge 0 & i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s\,. \end{array} \tag{4}$$

W obu twierdzeniach zakłada się bez straty ogólności, że $y_1 < y_2 < ... < y_s$.

Zastępując zmienną losową X zmienną losową R_P oznaczającą stopę zwrotu portfela akcji oraz podstawiając $E(R_P) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j \right) p_i$ (gdzie r_{ij} – oznacza i-tą realizację losowej stopy zwrotu R_j), po uwzględnieniu warunków (3) lub odpowiednio (4), modele wyboru portfela akcji mają postać [Luedtke 2008]:

– dla dominacji stochastycznych stopnia pierwszego (FSD):

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j \right) p_i \to max & \\ \sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \le x_i & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 & i = 1, 2, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \le \sum_{l=1}^{k-1} q_l & k = 2, ..., s \\ \pi_{ik} \in \{0, 1\} & i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s\,. \\ w \in W & \end{array} \tag{5}$$

– dla dominacji stochastycznych stopnia drugiego (SSD):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j\right) p_i \to max \\
&\sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \le x_i && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \le \sum_{l=1}^{k-1} q_l && k = 2, ..., s \\
&\pi_{ik} \ge 0 && i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s\,. \\
&w \in W
\end{aligned} \tag{6}$$

W dalszej części pracy zostaną zaproponowane modele wyboru portfela akcji z uwzględnieniem warunków prawie dominacji stochastycznych. Analogicznie jak w przypadku modeli (1) i (2), konstruujemy:

– model z warunkiem prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego (AFSD):

$$\begin{aligned}
&\max_{w} E[R_P] \\
&R_P \text{ AFSD } Y \\
&w \in W
\end{aligned} \tag{7}$$

– model z warunkiem prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego (ASSD)

$$\begin{aligned}
&\max_{w} E[R_P] \\
&R_P \text{ ASSD } Y \\
&w \in W
\end{aligned} \tag{8}$$

Z twierdzeń 1 i 3 oraz 2 i 4 wynikają odpowiednio twierdzenia 5 i 6:

Twierdzenie 5. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi skokowymi o rozkładach odpowiednio $\Pr\{X = x_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$, $\Pr\{Y = y_k\} = q_k$, dla $k = 1, 2, ..., s$. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie prawie dominacji stochastycznej stopnia pierwszego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\pi = [\pi_{ik}]$ ($i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., s$) oraz nieujemna zmienna losowa Z ($\Pr\{Z = z_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$) spełniające warunki:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \le x_i + z_i && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i z_i \le \varepsilon && \\
&\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \le \sum_{l=1}^{k-1} q_l && k = 2, ..., s \\
&\pi_{ik} \in \{0, 1\} && i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Twierdzenie 6. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi skokowymi o rozkładach odpowiednio $\Pr\{X = x_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$, $\Pr\{Y = y_k\} = q_k$, dla $k = 1, 2, ..., s$. Zmienna losowa X dominuje zmienną losową Y w sensie prawie dominacji stochastycznej stopnia drugiego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\pi = [\pi_{ik}]$ ($i = 1, 2, ..., m$, $k = 1, 2, ..., s$) oraz nieujemna zmienna losowa Z ($\Pr\{Z = z_i\} = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., m$) spełniające warunki:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \le x_i + z_i && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i z_i \le \varepsilon && \\
&\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 && i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \le \sum_{l=1}^{k-1} q_l && k = 2, ..., s \\
&\pi_{ik} \ge 0 && i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Podstawiając w modelu (7) w miejsce warunku prawie dominacji stochastycznej warunki równoważne (9), w których zastąpiono zmienną losową X zmienną losową R_P, otrzymujemy model wyboru portfela akcji dominującego portfel wzorcowy Y w sensie prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego (AFSD) postaci:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j\right) p_i \to max \\
&\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j + z_i - \sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \ \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i z_i \leq \varepsilon \\
&\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \leq \sum_{l=1}^{k-1} q_l \qquad k = 2, ..., s \\
&\pi_{ik} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s \\
&z_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&w \in W
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Zamieniając z kolei w modelu (8) warunek prawie dominacji stochastycznej na warunki równoważne (10), w których zastąpiono zmienną losową X zmienną losową R_P, otrzymujemy model wyboru portfela akcji dominującego portfel wzorcowy Y w sensie prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego (ASSD):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j\right) p_i \to max \\
&\sum_{j=1}^{n} r_{ij} w_j + z_i - \sum_{k=1}^{s} y_k \pi_{ik} \ \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i z_i \leq \varepsilon \\
&\sum_{k=1}^{s} \pi_{ik} = 1 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{l=1}^{k-1} \pi_{il} \leq \sum_{l=1}^{k-1} q_l \qquad k = 2, ..., s \\
&\pi_{ik} \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m, k = 1, 2, ..., s \\
&z_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., m \\
&w \in W
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Rozwiązanie zadań optymalizacyjnych postaci (11) lub (12) polega na znalezieniu takich wartości elementów macierzy $Z=[z_i]$, $i=1,...,m$, $\pi=[\pi_{ik}]$, ($i=1,2,...,m$, $k=1,2,...,s$) oraz $w=[w_j]$, $j=1,...,n$, by otrzymać portfel o możliwie największej oczekiwanej stopie zwrotu, jednocześnie dominujący portfel wzorcowy Y w sensie dominacji stochastycznej odpowiednio AFSD lub ASSD.

W kontekście proponowanego podejścia wyboru portfela akcji dominującego portfel wzorcowy w sensie prawie dominacji pierwszego lub drugiego stopnia, twierdzenia (1) i (2) prowadzą do prostej i jednocześnie użytecznej interpretacji parametru ε. Jeżeli $E(Z)\le\varepsilon$ i $X+Z$ dominuje Y w sensie dominacji pierwszego lub drugiego stopnia, wówczas $E(Z)\le\varepsilon$ oraz $E(X+Z)\ge E(Y)$, stąd $E(Y)-E(X)\le\varepsilon$. Parametr ε oznacza zatem maksymalną różnicę wartości oczekiwanych stóp zwrotu portfela wzorcowego i wyznaczanego portfela lub inaczej maksymalną stratę w stosunku do portfela wzorcowego (mierzoną wartością oczekiwaną) akceptowaną przez decydenta. Dla zilustrowania proponowanych modeli zostaną przedstawione dwa proste przykłady.

Przykład 2. Dane są:

– portfel wzorcowy Y

Stopa zwrotu (y_k)	Prawdop. (q_k)
2%	0,1
5%	0,2
6%	0,5
8%	0,2

– akcje R_1 i R_2

Stopa zwrotu (r_{i1})	Stopa zwrotu (r_{i2})	Prawdop. (p_i)
4%	2%	0,1
2%	4%	0,1
7%	5%	0,2
5%	9%	0,6

Przyjmując wartość parametru ε równą zero, wykorzystano modele (11) i (12) do zbadania istnienia relacji dominacji stochastycznych (odpowiednio pierwszego i drugiego stopnia) pomiędzy akcjami R_1, R_2 a portfelem wzorcowym Y. Następnie zbadano istnienie portfela o potencjalnych składnikach R_1, R_2, dominującego portfel wzorcowy w sensie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego i drugiego. R_1 podobnie jak R_2 nie dominuje Y ani w sensie dominacji FSD, ani SSD, nie istnieje też portfel (o potencjalnych składnikach R_1, R_2) dominujący portfel wzorcowy Y w sensie FSD czy SSD.

Badając istnienie relacji prawie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego stopnia na podstawie modeli odpowiednio (11) i (12) ustalono, że R_1 dominuje Y w sensie AFSD dla ε = 0,9 oraz w sensie ASSD dla ε = 0,8. R_2 dominuje z kolei Y w sensie AFSD i ASSD dla ε = 0,2. Portfelem dominującym portfel wzorcowy w sensie AFSD (dla ε = 0,2) jest portfel jednoskładnikowy P1 zawierający tylko akcje R_2. Istnieje także zdywersyfikowany portfel P2 (R_1 – udział 25%, R_2 – udział 75%) dominujący portfel wzorcowy Y w sensie ASSD dla ε = 0,1. Otrzymane wyniki zestawiono w tabelach 1 oraz 2.

Tabela 1

Relacje dominacji pomiędzy R_1, R_2, portfelem R_P a portfelem wzorcowym Y

	Rodzaj dominacji			
	FSD	SSD	AFSD	ASSD
(R_1,Y)	-	-	ε = 0,9	ε = 0,8
(R_2,Y)	-	-	ε = 0,2	ε = 0,2
(R_P,Y)	-	-	Portfel P1: R_1 – udział 0% R_2 – udział 100% ε = 0,2	Portfel P2: R_1 – udział 25% R_2 – udział 75% ε = 0,1

Tabela 2

Wartości oczekiwane badanych zmiennych losowych

Zmienna losowa	Y	R_1	R_2	R_{P1}	R_{P2}
Wartość oczekiwana	5,8	5	7	7	6,5

W sytuacji gdy akceptowana przez decydenta strata w stosunku do wartości oczekiwanej portfela wzorcowego wyniesie co najwyżej 0,1% (ε = 0,1), wówczas portfelem dominującym portfel wzorcowy Y będzie portfel zawierający 25% akcji R_1 oraz 75% akcji R_2 i jest to relacja prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego[2]. Dla wartości ε < 0,1 nie istnieje portfel dominujący portfel wzorcowy zarówno w sensie AFSD, jak i ASSD.

Przykład 3. Dane są:

– portfel wzorcowy *Y*

Stopa zwrotu (y_k)	Prawdop. (q_k)
5%	0,25
9%	0,25
10%	0,25
12%	0,25

[2] Nie oznacza to jednak, że zawsze oczekiwana stopa zwrotu wyznaczanego portfela będzie mniejsza niż oczekiwana stopa zwrotu portfela wzorcowego (tutaj E(Y) = 5,8, zaś E(R_{P2}) = 6,5).

– akcje R_1 i R_2

Stopa zwrotu (r_{i1})	Stopa zwrotu (r_{i2})	Prawdop. (p_i)
4%	9%	0,25
8%	8%	0,25
12%	7%	0,25
10%	15%	0,25

Badając istnienie relacji dominacji stochastycznych (dla $\varepsilon = 0$) oraz prawie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego stopnia na podstawie modeli odpowiednio (11) i (12) ustalono, że zarówno R_1 jak i R_2 nie dominują Y sensie dominacji FSD. Brak też portfela o potencjalnych składnikach R_1, R_2 dominującego portfel wzorcowy w sensie FSD. Rozważając dominacje SSD, stwierdzono, że R_2 dominuje Y oraz istnieje jedynie jednoskładnikowy portfel P1 (R_1 – udział 0%, R_2 – udział 100%) dominujący portfel wzorcowy Y.

W przypadku prawie dominacji stochastycznych, R_1 i R_2 dominują Y w sensie AFSD dla $\varepsilon = 0,5$. Istnieje również zdywersyfikowany portfel P2 (R_1 – udział 60%, R_2 – udział 40%) dominujący Y w sensie AFSD dla $\varepsilon = 0,25$. Ponadto R_1 dominuje Y w sensie ASSD dla $\varepsilon = 0,5$ i R_2 dominuje Y w sensie ASSD dla $\varepsilon = 0$, jak również istnieje jednoskładnikowy portfel P3 (R_1 –udział 0%, R_2 – udział 100%) dominujący portfel wzorcowy Y (co jest konsekwencją SSD). Otrzymane wyniki zestawiono w tabelach 3 i 4.

Tabela 3

Relacje dominacji pomiędzy R_1, R_2, portfelem R_P a portfelem wzorcowym Y

	Rodzaj dominacji			
	FSD	SSD	AFSD	ASSD
(R_1,Y)	-	-	$\varepsilon = 0,5$	$\varepsilon = 0,5$
(R_2,Y)	-	tak	$\varepsilon = 0,5$	$\varepsilon = 0$
(R_P,Y)	-	Portfel P1: R_1 – udział 0% R_2 – udział 100%	Portfel P2: R_1 – udział 60% R_2 – udział 40% $\varepsilon = 0,25$	Portfel P3: R_1 – udział 0% R_2 – udział 100% $\varepsilon = 0$

Tabela 4

Wartości oczekiwane badanych zmiennych losowych

Zmienna losowa	Y	R_1	R_2	R_{P1}	R_{P2}	R_{P3}
Wartość oczekiwana	9	8,5	9,75	9,75	9	9,75

W przykładzie tym dla akceptowanego poziomu straty ε = 0,5, będą istniały portfele dominujące portfel wzorcowy zarówno w sensie SSD, AFSD, jak i ASSD. Będą to jednak portfele jednoskładnikowe zawierające tylko R_2. Obniżenie wartości ε do poziomu 0,25 spowoduje pojawienie się portfela zdywersyfikowanego P2 dominującego portfel wzorcowy w sensie AFSD (dla którego oczekiwana stopa zwrotu wynosi 9). Warunek ε = 0,25 spełniają także portfele jednoskładnikowe P1 i P3 dominujące Y w sensie dominacji odpowiedni SSD i ASSD.

Podsumowanie

Model optymalizacyjny z ograniczeniem w postaci warunku dominacji stochastycznych stanowi atrakcyjne podejście do problemu wyboru portfela akcji. Proponowane w pracy modele (11) i (12) – zawierające warunek prawie dominacji stochastycznych odpowiednio pierwszego i drugiego stopnia – mogą być stosowane dla dowolnej, skończonej liczby akcji przy założeniu różnych, skokowych rozkładów szukanego portfela i portfela wzorcowego[3]. Niewątpliwą zaletą proponowanych modeli jest też fakt, iż różnią się one między sobą jedynie warunkiem binarności elementów macierzy π, co pozwala na szybką modyfikację modelu (11) na (12) (i odwrotnie) w stosowanych do obliczeń programach. Ponadto przyjęcie wartości parametru epsilon równej zero umożliwia wykorzystanie modeli (11) i (12) do wyznaczania portfeli dominujących portfel wzorcowy w sensie dominacji stochastycznych FSD czy SSD. Proponowane modele mogą służyć również badaniu istnienia relacji dominacji stochastycznych (prawie dominacji stochastycznych) pomiędzy danymi portfelami lub dowolnymi losowymi wariantami decyzyjnymi o rozkładach skokowych.

Literatura

Dentcheva D., Ruszczyński A. (2003): *Optimization with Stochastic Dominance Constraints*. „SIAM Journal on Optimization", Vol. 14, Iss. 2.

Hadar J., Russel W.R. (1969): *Rules for Ordering Uncertain Prospects*. „American Economic Review", Vol. 59, Iss. 1.

[3] Proponowany przez Lizyayeva podobny model zawierający warunek prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego można wykorzystać jedynie w szczególnym przypadku, gdy zakłada się jednakowy skokowy rozkład prawdopodobieństwa dla szukanego portfela i portfela wzorcowego [Lizyayev 2010; Lizyayev i Ruszczyński 2012]. Ponadto stosowanie wspomnianego modelu, dla warunku prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego, zmieniając jedynie (jak sugeruje Lizyayev) warunek dotyczący nieujemności elementów macierzy, oznaczonej tutaj symbolem π, na warunek ich binarności jest błędne (patrz twierdzenia 3, 5, 6 [Luedtke 2008]).

Hanoch G., Levy H. (1969): *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*. „Review of Economic Studies", Vol. 36, No. 3.
Kuosmanen T. (2004): *Efficient Diversification According to Stochastic Dominance Criteria*. „Management Science", Vol. 50, No. 10.
Lehmann E.L. (1955): *Ordered Families of Distributions*. „Annals of Mathematical Statistics", Vol. 26, No. 3.
Leshno M., Levy H. (2002): *Preferred by "all" and Preferred by "most" Decision Makers: Almost Stochastic Dominance*. „Management Science", Vol. 48, Iss. 8.
Lizyayev A. (2010): *Stochastic Dominance in Portfolio Analysis and Asset Pricing*. Tinbergen Institute Research Series No. 487, Erasmus University Rotterdam.
Lizyayev A., Ruszczyński A. (2012): *Tractable Almost Stochastic Dominance*. „European Journal of Operational Research", Vol. 218.
Luedtke J. (2008): *New Formulation for Optimization under Stochastic Dominance Constraints*. „SIAM Journal on Optimization", Vol.19, Iss. 3.
Mann H., Whitney D.R. (1947): *On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other*. „Annals of Mathematical Statistics", Vol. 18, No. 1.
Michalska E. (2011): *Zastosowanie prawie dominacji stochastycznych w konstrukcji portfela akcji*. W: Zastosowanie badań operacyjnych. Zarządzanie projektami, decyzje finansowe, logistyka. Red. E. Konarzewska-Gubała. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław.
Noyan N., Rudolf G., Ruszczyński A. (2006): *Relaxations of Linear Programming Problems with First Order Stochastic Dominance Constraints*. „Operations Research Letters", Vol. 34.
Quirk J., Saposnik R. (1962): *Admissibility and Measurable Utility Functions*. „Review of Economic Studies", Vol. 29, No. 2.
Rothschild M., Stiglitz J. (1970): *Increasing Risk. I. A Definition*. „Journal of Economic Theory", Vol. 2.
Rothschild M., Stiglitz J. (1971): *Increasing Risk. II. Its Economic Consequences*. „Journal of Economic Theory", Vol. 3.

MODELS OF PORTFOLIO SELECTION WITH STOCHASTIC DOMINANCE OR ALMOST STOCHASTIC DOMINANCE CONSTRAINTS

Summary

In the paper models of share portfolio selection with first order or second order almost stochastic dominance constraints (for discrete random variables) are proposed. There are several simple examples as an illustration of our models.