

**Robert Jankowski**  
Uniwersytet w Białymstoku

# OPÓŹNIENIA W MODELACH SPOŁECZNYCH DYNAMIKI REPLIKATOROWEJ

## Wstęp

Pionierem w dziedzinie badania ewolucji populacji z wykorzystaniem analizy teorii gier był John Maynard Smith. Wprowadził on definicję strategii ewolucyjnie stabilnej. Jeżeli wszyscy grają taką strategię, to wówczas żadna inna strategia nie może rozpowszechnić się w populacji. Kolejnym krokiem było stworzenie systemu równań różnicowych (różniczkowych), zwanych równaniami replikatorowymi [Taylor, Jonker 1978; Hofbauer 1979; Zeeman 1981], opisujących ewolucję w czasie częstotliwości strategii graczy. Wiadomo przy tym, że każda równowaga Nasha będąca ewolucyjnie stabilną strategią jest lokalnie asymptotycznie stabilnym stacjonarnym punktem w takim dynamicznym modelu [Hofbauer, Sigmund 1988; Weibull 1997].

Zazwyczaj zakłada się, iż efekt interakcji pomiędzy graczami jest natychmiastowy. W rzeczywistości rezultat może się pojawić w przyszłości. Przykładem są modele dynamiki replikatorowej, w których gracze wybierają swoje strategie na podstawie wydarzeń z przeszłości [Albosza, Miękiś 2004].

W poniższym artykule zostanie omówiony wpływ opóźnień na stabilność wewnętrznego punktu stacjonarnego dynamiki replikatorowej (decyzji optymalnej w populacji) w modelach społecznych. Zaprezentowane wyniki zostaną poparte przykładami i symulacjami. Obok standardowego modelu dynamiki replikatorowej zostanie przedstawiony model zmodyfikowany zakładający, iż gracze naśladują przeciwników stosujących strategię z wyższą średnią wypłatą, z uwzględnieniem opóźnionej informacji, oraz model, w którym każda strategia będzie miała własne opóźnienie.

## 1. Standardowa dynamika replikatorowa

Załóżmy, że gracze w pewnej dużej, ale skończonej populacji mają do dyspozycji tylko dwie różne czyste strategie: A i B. W każdym momencie czasu gracze parują się i odbywają dwuosobową grę, której macierz wypłat jest następująca:

$$W = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{array}{cc} A & B \\ \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \end{array},$$

gdzie  $W_{kl}$ ,  $k, l = A, B$  jest wypłatą pierwszego (wierszowego) gracza grającego strategię  $k$  przy założeniu, że gracz drugi (kolumnowy) gra strategię  $l$ . Załóżmy, że obaj gracze są tacy sami, a wypłaty gracza kolumnowego są dane poprzez macierz transponowaną do  $W$ . Takie gry nazywamy symetrycznymi. Co więcej, aby istniała unikalna mieszana równowaga Nasha, należy założyć, że zawsze  $c > a$  oraz  $b > d$  lub  $c < a$  oraz  $b < d$ .  $x^* = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ , gdzie  $\Delta_1 = c - a$ ,  $\Delta_2 = b - d$  i  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$  jest optymalną (w sensie równowagi Nasha) częstotliwością występowania strategii A w populacji.

Niech  $g_i(t)$ ,  $i = A, B$  będzie liczbą graczy grających odpowiednio strategię A oraz B w chwili  $t$ . Wówczas  $g(t) = g_A(t) + g_B(t)$  jest liczbą wszystkich graczy, a  $x(t) = \frac{g_A(t)}{g(t)}$  jest odsetkiem populacji graczy grających strategię A. Zakładamy, że w krótkim okresie  $\varepsilon$  tylko część populacji bierze udział w grach (mianowicie  $\varepsilon$ ). Mamy więc:

$$g_i(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g_i(t) + \varepsilon g_i(t)P_i(t); \quad i = A, B, \quad (1)$$

gdzie  $P_A(t) = ax(t) + b(1 - x(t))$  i  $P_B(t) = cx(t) + d(1 - x(t))$  są średnimi wypłatami graczy, którzy grają strategię A i B odpowiednio. Całkowita liczba graczy da się opisać za pomocą następującego równania:

$$g(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g(t) + \varepsilon g(t)\bar{P}(t), \quad (2)$$

gdzie  $\bar{P}(t) = x(t)P_A(t) + (1 - x(t))P_B(t)$  jest średnią wypłatą w populacji w chwili  $t$ . Otrzymujemy natychmiast równanie opisujące częstotliwość występowania strategii A:

$$x(t + \varepsilon) - x(t) = \varepsilon \frac{x(t)[P_A(t) - \bar{P}(t)]}{1 - \varepsilon + \varepsilon \bar{P}(t)}. \quad (3)$$

Jeżeli podzielimy teraz obie strony równania przez  $\varepsilon$  i przejdziemy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to otrzymamy różniczkowe równanie replikatorowe:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[P_A(t) - \bar{P}(t)]. \quad (4)$$

Równanie (4) można równoważnie zapisać jako:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t))[P_A(t) - P_B(t)] = (a - c + d - b)x(t)(1 - x(t))(x(t) - x^*). \quad (5)$$

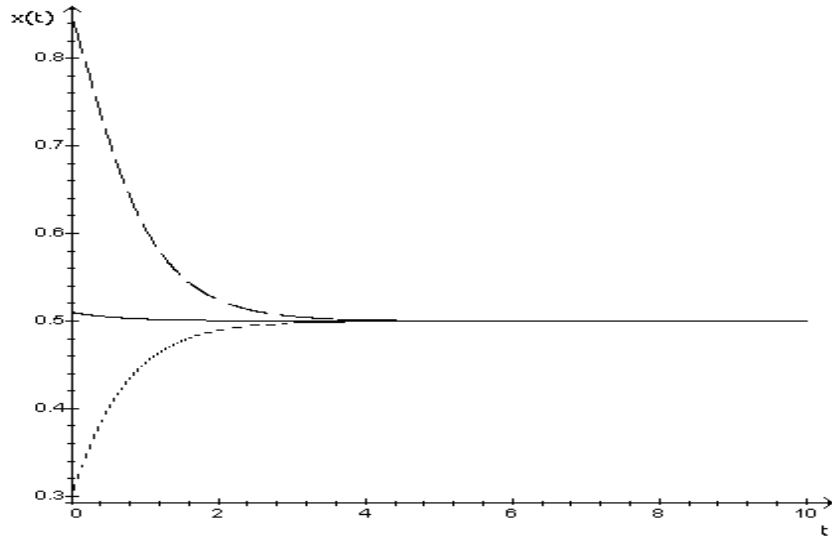
Widzimy, że punkt  $x^*$  jest asymptotycznie stabilny. Oznacza to, że populacja graczy prędzej czy później będzie otrzymywała optymalne (w sensie równowagi Nasha) wypłaty.

### Przykład 1

Rozważmy grę z następującą macierzą wypłat:

$$W = \begin{array}{c} A \quad B \\ A \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} \\ B \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Jak łatwo zauważyć,  $x^*=1/2$ . Oznacza to, że niezależnie od warunków początkowych, przy założeniu standardowej dynamiki replikatorowej, po pewnym czasie, z jednakowym prawdopodobieństwem, będzie można znaleźć w populacji graczy stosujących zarówno strategię A, jak i B. Wykorzystując program Maple, można prześledzić symulacje dynamiki częstotliwości wybierania przez graczy strategii A w nieustannie rosnącej populacji:



Rys. 1. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy różnych warunkach początkowych – 0,85; 0,51; 0,3;  $\varepsilon = 0,01$

Na rysunku 1 widać, że niezależnie od warunków początkowych strategia  $x^*$  stabilizuje się. Maksymalnie po 5 jednostkach czasu (przyjmijmy, że są to sekundy) w całej populacji tak samo często stosuje się strategię A, jak i B.

## 2. Dynamika replikatorowa z jednym opóźnieniem

Zakładamy, że gracze w czasie  $t$  zwiększają swoją liczebność zgodnie ze średnimi wypłatami uzyskanymi w czasie  $t - \tau$  dla  $\tau > 0$ . Tak jak w standardowej dynamice replikatorowej, zakładamy, że w krótkim okresie  $\varepsilon$  tylko część populacji bierze udział w grach.

Niech  $g_i(t)$ ,  $i = A, B$  będzie liczbą graczy grających odpowiednio strategię A oraz B w chwili  $t$ . Wówczas  $g(t) = g_A(t) + g_B(t)$  jest liczbą wszystkich graczy, a  $x(t) = \frac{g_A(t)}{g(t)}$  jest odsetkiem populacji graczy grających strategię A. Otrzymujemy zatem następujące równanie:

$$g_i(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g_i(t) + \varepsilon g_i(t)P_i(t - \tau); i = A, B. \quad (6)$$

Wówczas całkowita liczba graczy da się opisać równaniem:

$$g(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g(t) + \varepsilon g(t) \overline{P'}(t - \tau), \quad (7)$$

gdzie  $\overline{P'}(t - \tau) = x(t)P_A(t - \tau) + (1 - x(t))P_B(t - \tau)$ . Wzory (6) i (7) pokazują, jak zmienia się częstotliwość występowania strategii A:

$$x(t + \varepsilon) - x(t) = \varepsilon \frac{x(t)[P_A(t - \tau) - \overline{P'}(t - \tau)]}{1 - \varepsilon + \varepsilon \overline{P'}(t - \tau)}. \quad (8)$$

Jeżeli podzielimy teraz obie strony równania przez  $\varepsilon$  i przejdziemy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to otrzymamy opóźnione różniczkowe równanie replikatorowe:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)[P_A(t - \tau) - \overline{P'}(t - \tau)]. \quad (9)$$

Można je równoważnie zapisać jako:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t))[P_A(t - \tau) - P_B(t - \tau)] = -\Delta x(t)(1 - x(t))(x(t - \tau) - x^*). \quad (10)$$

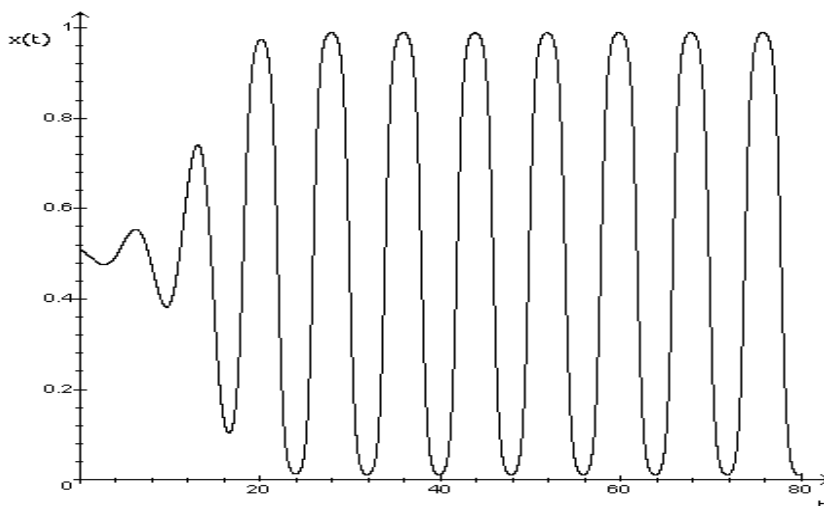
Załóżmy, że losowo wybrany gracz naśladowuje losowo wybranego przeciwnika. Wówczas prawdopodobieństwo, że gracz, który gra strategię A, będzie chciał naśladować przeciwnika grającego B w czasie  $t$ , wynosi dokładnie  $x(t)(1 - x(t))$ . Natężenie naśladowania zależy od opóźnionej informacji o różnicy odpowiednich wypłat w chwili  $t - \tau$ .

Tao i Wang [1997] pokazali, że jeżeli  $\tau < (c - a + b - d)\pi / 2(c - a)(b - d)$ , to równowaga Nasha (w strategiach mieszanych)  $x^*$  jest punktem asymptotycznie stabilnym opóźnionego równania różniczkowego. Jeżeli natomiast opóźnienie jest większe niż  $(c - a + b - d)\pi / 2(c - a)(b - d)$ , to  $x^*$  staje się punktem niestabilnym.

## Przykład 2

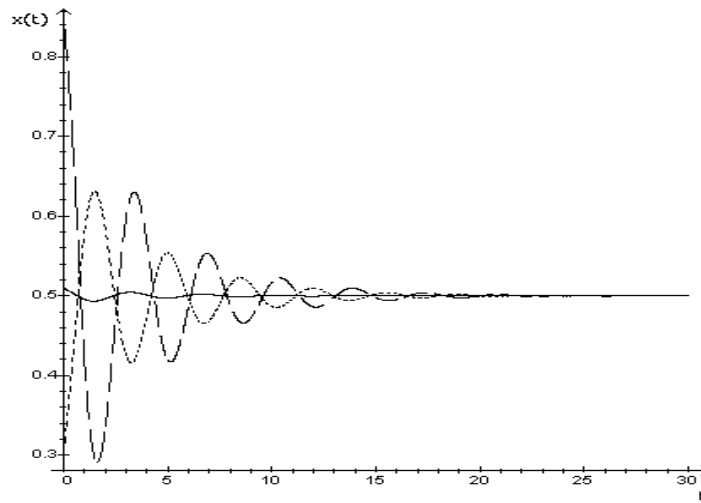
Rozważmy ponownie macierz wypłat z przykładu 1. Tak jak poprzednio  $x^* = 1/2$ . Tym razem przed wyborem strategii pozwólmy graczom sprawdzać średnie wypłaty z gry z przeszłości. Aby w populacji utrwaliła się optymalna strategia  $x^*$  (w sensie równowagi Nasha), horyzont czasowy nie może być większy niż  $\frac{\pi}{3}$ . Sytu-

ację, w której gracze podejmują swoje decyzje na podstawie wypłat uzyskanych  $\tau = 1,3$  jednostek czasu (sekundy) temu pokazuje rys. 2.



Rys. 2. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,51;  $\tau = 1,3$ ;  $\varepsilon = 0,01$  – brak stabilności strategii  $x^*$

Nawet niewiele opóźniona informacja prowadzi bardzo szybko do mocnych wahań częstotliwości  $x(t)$ . Zbyt stare informacje powodują rozchwianie populacji. W jednym momencie czasu prawie wszyscy gracze stosują strategię A, a po chwili sytuacja całkowicie się odwraca. W populacji prawie wcale nie stosuje się optymalnej (w sensie równowagi Nasha) strategii  $x^*$ . Należy jednak pamiętać o tym, że opóźnienie powodujące rozchwianie częstotliwości  $x(t)$  zależy tylko i wyłącznie od macierzy wypłat. Niemniej jednak można przewidzieć, z jaką częstotliwością będzie występowała strategia A w populacji w konkretnym momencie czasu. Przeanalizujmy jeszcze sytuację, gdy  $\tau = 0,8$  (rys. 3).



Rys. 3. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy różnych warunkach początkowych - 0,85; 0,51; 0,3;  $\tau = 0,8$ ;  $\varepsilon = 0,01$

Jak pokazuje rys. 3, jeżeli zostanie spełnione kryterium  $\tau < \frac{\pi}{3}$ , to niezależnie od warunków początkowych strategia  $x^*$  się stabilizuje. Zauważmy jeszcze, że im warunek początkowy jest bliższy  $x^*$ , tym szybciej możemy się spodziewać sytuacji, w której prawdopodobieństwo znalezienia w populacji gracza grającego strategię A wynosi 1/2.

### 3. Dynamika replikatorowa z dwoma opóźnieniami

Rozważmy teraz sytuację, w której gracze w czasie  $t$  zwiększają swoją liczebność zgodnie ze średnimi wypłatami uzyskanymi przez ich strategię w momentach czasu  $t - \tau_A$  i  $t - \tau_B$  odpowiednio.

Niech  $g_i(t)$ ,  $i = A, B$  będzie liczbą graczy grających strategię A oraz B odpowiednio w chwili  $t$ . Zatem  $g(t) = g_A(t) + g_B(t)$  jest liczbą wszystkich graczy, a  $x(t) = \frac{g_A(t)}{g(t)}$  jest odsetkiem populacji graczy grających strategię A. Mamy

wówczas następujące równanie:

$$g_i(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g_i(t) + \varepsilon g_i(t)P_i(t - \tau_i); \quad i = A, B. \quad (11)$$

Całkowita liczba graczy da się opisać poprzez równanie:

$$g(t + \varepsilon) = (1 - \varepsilon)g(t) + \varepsilon(r_A(t)P_A(t - \tau_A) + r_B(t)P_B(t - \tau_B)). \quad (12)$$

Równania (11) i (12) pokazują, jak zmienia się częstotliwość występowania strategii A:

$$x(t + \varepsilon) - x(t) = \varepsilon \frac{x(t)P_A(t - \tau_A) - x^2(t)P_A(t - \tau_A) - x(t)(1 - x(t))P_B(t - \tau_B)}{1 - \varepsilon + \varepsilon(x(t)P_A(t - \tau_A) + (1 - x(t))P_B(t - \tau_B))}. \quad (13)$$

Jeżeli podzielimy teraz obie strony równania przez  $\varepsilon$  i przejdziemy do granicy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , to otrzymamy opóźnione różniczkowe równanie replikatorowe:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t))[P_A(t - \tau_A) - P_B(t - \tau_B)]. \quad (14)$$

Założmy, że losowo wybrany gracz naśladuje losowo wybranego przeciwnika. Wówczas prawdopodobieństwo, że gracz, który gra strategię A, będzie chciał naśladować przeciwnika grającego B w czasie  $t$ , wynosi dokładnie  $x(t)(1 - x(t))$ . Natężenie naśladowania zależy od opóźnionych informacji o różnicy odpowiednich wypłat we wcześniejszych momentach czasu.

### Twierdzenie 1\*

Jeżeli jeden z poniższych warunków będzie spełniony:

- (1)  $b - a + c - d > 0$ ,  $|b - a| \tau_A + |c - d| \tau_B < \frac{b - a + c - d}{|b - a| + |c - d|}$ ;
- (2)  $b - a > 0$ ,  $(b - a) \tau_A < \frac{b - a - |c - d|}{b - a + |c - d|}$ ;
- (3)  $c - d > 0$ ,  $(c - d) \tau_B < \frac{c - d - |b - a|}{|b - a| + c - d}$ ,

to  $x^*$  będzie punktem asymptotycznie stabilnym równania (14).

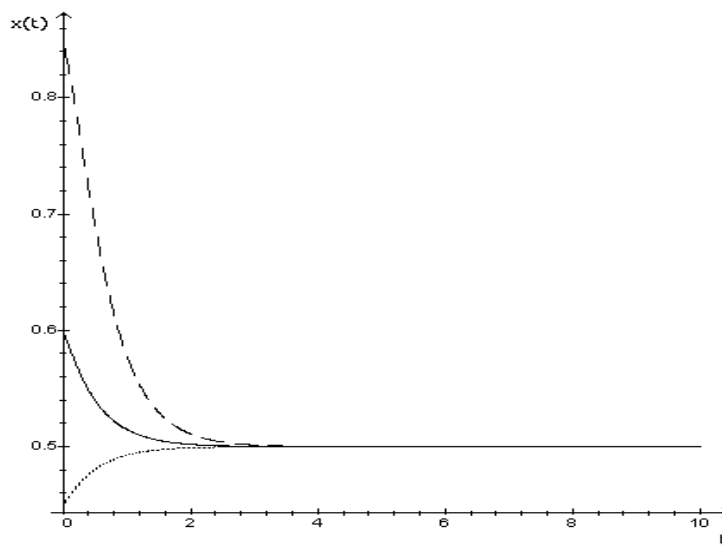
---

\* Berezansky, Braverman [2006, s. 391-411]; Li, Ruin, Wei [1999, s. 254-280].



### Przykład 3

Rozważmy ponownie macierz wypłat z przykładu 1. Tak jak poprzednio  $x^* = 1/2$ . Wykorzystując twierdzenie 1, zauważamy, że  $b - a + c - d > 0$ . Zatem jeżeli  $\tau_A + \tau_B < \frac{1}{3}$ , to możemy oczekiwać, że po pewnym czasie z jednakowym prawdopodobieństwem w populacji będzie występowała zarówno strategia A, jak i B. Pozostałe warunki nie mogą być spełnione, ponieważ zawsze  $\tau_i > 0$  dla  $i = A, B$ . Przeprowadźmy więc symulacje w przypadku, gdy  $\tau_A = 0,16$ , a  $\tau_B = 0,14$  (rys. 4).

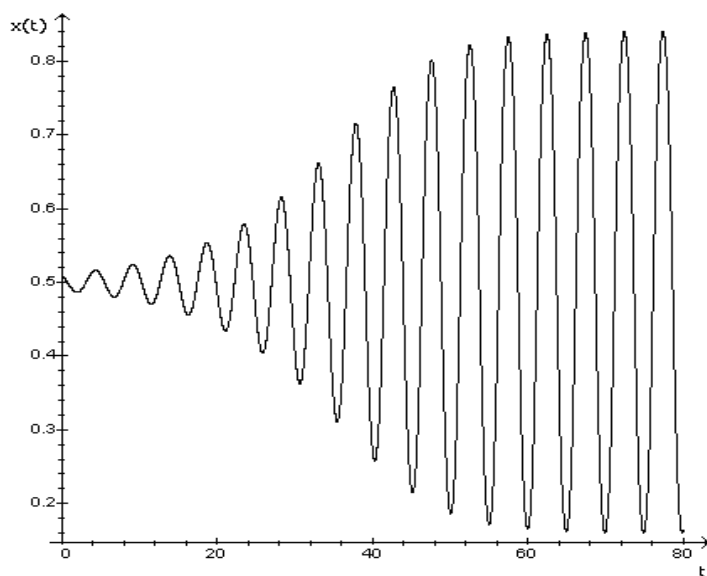


Rys. 4. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy różnych warunkach początkowych – 0,85; 0,6; 0,45;  $\tau_A = 0,16$ ;  $\tau_B = 0,14$ ;  $\epsilon = 0,01$

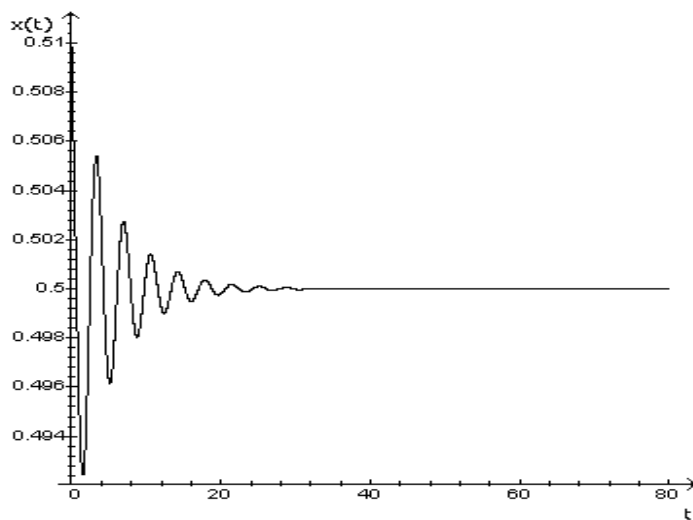
W efekcie otrzymujemy wykres bardzo podobny do rys. 1. Nie powinno to dziwić, gdyż opóźnienia są bardzo mocno zbliżone do zera.

W twierdzeniu 1 nie występuje równoważność, ale sprawdźmy, co się stanie, gdy np.  $\tau_A = 1,1$ , a  $\tau_B = 1,4$  (rys. 5). Nietrudno się domyślić, że  $x^*$  przestanie być punktem stacjonarnym. Przeprowadzone symulacje, przedstawione na rys. 5, 6, 7, pokazują, że dzieje się tak nie dlatego, że  $\tau_A + \tau_B > \frac{1}{3}$ , a bardziej z powodu niespełnienia warunku

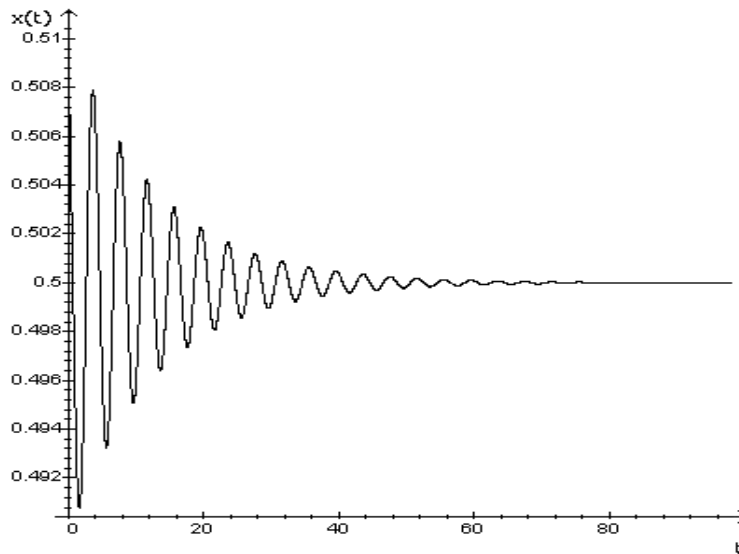
$$\tau_i < \frac{\pi}{3} = (c - a + b - d)\pi / 2(c - a)(b - d) \text{ dla } i = A, B.$$



Rys. 5. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,51;  $\tau_A = 1,1$ ;  $\tau_B = 1,4$ ;  $\varepsilon = 0,01$



Rys. 6. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,51;  $\tau_A = 0,8$ ;  $\tau_B = 0,9$ ;  $\varepsilon = 0,01$



Rys. 7. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,51;  $\tau_A = 1,1$ ;  $\tau_B = 0,8$ ;  $\varepsilon = 0,01$

#### Przykład 4

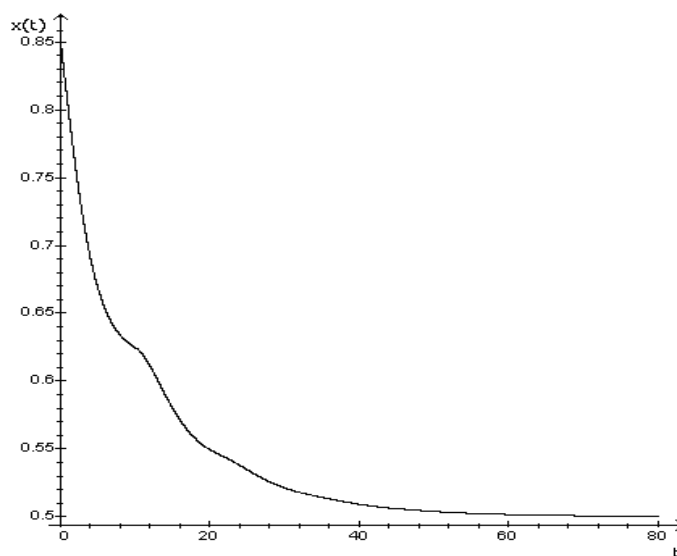
Rozważmy grę znaną w literaturze pod nazwą „jastrzęb-gołąb”. Została ona szczegółowo opisana przez Smitha oraz Price’a [1973]. Gracze walczą o zasoby. W biologicznym sensie im więcej ich posiadają (może to być np. powierzchnia potrzebna do rozrodu), tym liczniejsze mają potomstwo. Każdy z graczy ma do dyspozycji tylko dwie strategie: jastrzębia – zawsze walczyć o zasoby, i gołębia – nie wdawać się w konflikty. Jastrzębie mają 50% szansy na wygraną z innym jastrzębiem. Gołębie zawsze uciekają, jeżeli tylko ktoś je zaatakuje. Jastrzębie walcząc odnoszą rany, które kosztują je dwa razy więcej niż zysk zasobu. Natomiast gołębie zawsze się wszystkim dzielą ze sobą. Przyjmijmy, że zasób ma wartość 1. Wówczas macierz wypłat takiej gry jest następująca:

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} J & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} J \\ G \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Załóżmy, że każda strategia ma swoje własne opóźnienie. Zatem jak daleko mogą sięgać gracze pamięcią wstecz, aby stan  $x^*$  był asymptotycznie stabilny?

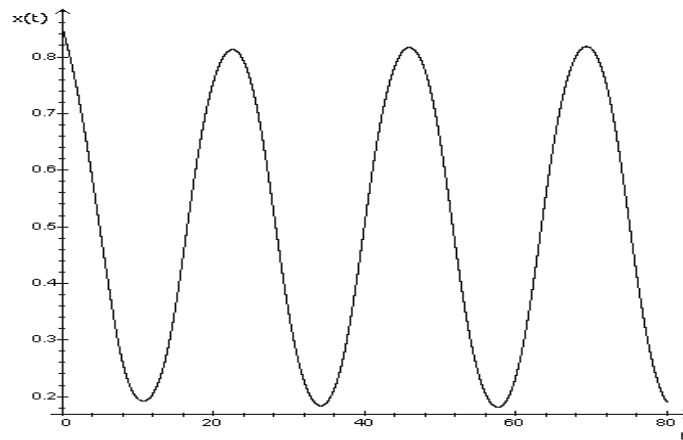
Rozważmy warunek (2) twierdzenia 1:  $b - a = \frac{3}{2} > 0$ , więc jeżeli tylko  $\tau_J < \frac{1}{3}$ ,

to w populacji utrzyma się równowaga w stosowaniu strategii A i B na poziomie  $x^* = 1/2$ . Zauważmy ponadto, że przy stosowaniu strategii gołębia możemy sprawdzać dowolnie odległe (stare) średnie wypłaty z gry. Przeprowadźmy przykładową symulację, w której przyjmiemy  $\tau_J = 0,2$ ,  $\tau_G = 10$ . Otrzymany w jej wyniku wykres przedstawiony na rys. 8 jest bardzo zbliżony do rys. 1.



Rys. 8. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,85;  $\tau_J = 0,2$ ;  $\tau_G = 10$ ;  $\varepsilon = 0,01$

Analizując rys. 8, warto zauważyć, że znacząco wydłużył się czas potrzebny do osiągnięcia równowagi. Jest to spowodowane bardzo dużym opóźnieniem strategii gołębia. Kiedy zatem strategia  $x^*$  nie będzie stanem stabilnym? Zgodnie z przypuszczeniami z przykładu 3 niech wypłaty obu strategii będą opóźnione o więcej niż  $2\pi = (c - a + b - d)\pi/2(c - a)(b - d)$ . Przeprowadźmy symulację, w której  $\tau_J = 7$ ,  $\tau_G = 10$  (rys. 9).



Rys. 9. Zmiana częstotliwości  $x(t)$  w zależności od czasu, przy warunku początkowym 0,85;  $\tau_I = 7$ ;  $\tau_G = 10$ ;  $\varepsilon = 0,01$

Na rysunku 9 widać wyraźnie brak stabilności  $x^*$ . Wydłużył się również znacząco czas potrzebny na przejście populacji od stanu „prawie wszyscy stosują strategię J” do „prawie wszyscy stosują strategię G”.

## Podsumowanie

Zaprezentowane modele mają na celu pokazanie sposobu podejmowania decyzji w populacji. Zanim cokolwiek kupimy, sprzedamy, zainwestujemy, sprawdzamy, czy nasze działanie przyniesie korzyści. Jak to zrobić najprościej? Wystarczy skorzystać z doświadczenia swojego lub bliskich. Wystarczy przypomnieć sobie, czy dawniej dana strategia dała nam realne zyski w porównaniu z inną opcją. Niekiedy napotykamy dodatkowy problem – decyzje nie mogą być porównywane w tym samym punkcie przeszłości.

W zaprezentowanych modelach istnieją ostre warunki zapewniające stabilność równowagi Nasha. Niezależnie od tego, czy mamy jedno opóźnienie, czy dwa, potrafimy wyznaczyć maksymalnie odległe punkty w przeszłości, w których zawarte informacje zapewnią optymalne wypłaty graczom. Jest to bardzo naturalne – również w prawdziwym życiu nieaktualne informacje są nieprzydatne i mogą prowadzić do przekłamań o rzeczywistości.

Oczywiście przedstawione modele dotyczą sytuacji uproszczonych, zazwyczaj mamy bowiem więcej możliwości do wyboru niż tylko dwie strategie. Niemniej jednak jest to dobry punkt wyjścia do rozważań na temat podświadomego dążenia do równowagi Nasha w społeczeństwie.

## Bibliografia

- Albosza J., Miękiś J., 2004: Stability of Evolutionarily Stable Strategies in Discrete Replicator Dynamics. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 231, No. 2, 175-179.
- Berezansky L., Braverman E., 2006: On Stability of Some Linear and Nonlinear Delay Differential Equations. „Journal of Mathematical Analysis and Applications”, Vol. 314, No. 2, 391-411.
- Friedman D., 1998: On Economic Applications of Evolutionary Game Theory. „Journal of Evolutionary Economics”, No. 8, 15-43.
- Hofbauer J., Shuster P., Sigmund K., 1979: A Note on Evolutionarily Stable Strategies and Game Dynamics. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 81, No. 3, 609-612.
- Hofbauer J., Sigmund K., 1988: The Theory of Evolution and Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge.
- Iijima R., 2012: On Delayed Discrete Evolutionary Dynamics. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 300, 1-6.
- Li X., Ruin S., Wei J., 1999: Stability and Bifurcation in Delay-differential Equations with Two Delays. „Journal of Mathematical Analysis and Applications”, Vol. 236, No. 2, 254-280.
- Maynard Smith J., 1974: The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 47, No. 1, 209-221.
- Maynard Smith J., Price G.R., 1973: The Logic of Animal Conflict. „Nature”, Vol. 246, No. 5427, 15-18.
- Maynard Smith J., 1982: Evolution and the Theory of Games. Cambridge University Press, Cambridge.
- Moreira J.A., Pinheiro F.L., Nunes A., Pacheco J.M., 2012: Evolutionary Dynamics of Collective Action when Individual Fitness Derives from Group Decisions Taken in the Past. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 298, 8-15.
- Tao Y., Wang Z., 1997: Effect of Time Delay and Evolutionarily Stable Strategy. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 187, No. 1, 111-116.
- Taylor P.D., Jonker L.B., 1978: Evolutionarily Stable Strategy and Game Dynamics. „Mathematical Biosciences”, Vol. 40, No. 1-2, 145-156.
- Weibull J., 1995: Evolutionary Game Theory. MIT Press, Cambridge MA.
- Zeeman E., 1981: Dynamics of the Evolution of Animal Conflicts. „Journal of Theoretical Biology”, Vol. 89, No. 2, 249-270.

---

**DELAYS IN SOCIAL MODELS OF REPLICATOR DYNAMICS****Summary**

This paper discusses the impact of delayed information on the social models of replicator dynamic. Internal fixed point is here the optimal decision in the population. Examples and simulations confirm presented results. Here is described both the standard replicator dynamic and the modified model, which assumes that players imitate opponents taking strategies with a higher average payoff in the past. Moreover the model, in which each strategy has its own delay is presented.