

Agnieszka Orwat-Acedańska

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

WERYFIKACJA ODPORNO-BAYESOWSKIEGO MODELU ALOKACJI DLA RÓŻNYCH TYPÓW ROZKŁADÓW – PODEJŚCIE SYMULACYJNE

Wprowadzenie

Nowoczesne metody analizy portfelowej koncentrują się na narzędziach służących ograniczeniu ryzyka estymacji związanym z możliwością poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów. Z punktu widzenia procesu alokacji aktywów, szczególnie istotne są narzędzia ograniczania tego ryzyka w sytuacjach obecności wielowymiarowych obserwacji odstających w próbie lub asymetrycznych rozkładów stóp zwrotu. W niniejszej pracy alokacja aktywów jest rozumiana jako dobór aktywów w różnych proporcjach (poprzez rozwiązanie zadania optymalizacji udziałów portfela) celem osiągnięcia najwyższej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka¹.

Do metod służących ograniczeniu ryzyka estymacji, którego źródłem jest wrażliwość optymalizowanej funkcji alokacji na nieznanne wartości charakterystyk portfela należą m.in.

- alokacja odporna (ang. *robust allocation*),
- alokacja bayesowska (ang. *Bayesian allocation*),
- odporna alokacja bayesowska (ang. *robust Bayesian allocation*).

Idea metody alokacji odpornej jest oparta na założeniu, że parametry będące charakterystykami składowych portfela znajdują się w otoczeniach zwanych zbiorami niepewności (ang. *uncertainty sets*). Reprezentują one tzw. profil inwestora (ang. *investor profile*), gdyż są odzwierciedleniem stosunku inwestora do ryzyka estymacji. Jednym z proponowanych w literaturze podejść jest wybór portfela w pesymistycznym scenariuszu, zakładającym, że oczekiwane stopy zwrotu aktywów będą najniższe z możliwych a ryzyko największe. Wybór portfela odpornego w sensie tej metody pozwala uzyskać możliwie najwyższą stopę zwrotu portfela przy najmniej korzystnym poziomie ryzyka. Zadanie alokacji

¹ Jest to definicja zgodna z głównym założeniem polityki lokacyjnej funduszy emerytalnych i inwestycyjnych.

odpornej jest zadaniem maxminowym², polegającym na maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu dla najgorszego przypadku ze względu na minimalny oczekiwany zwrot portfela, pod warunkiem, że największe oczekiwane ryzyko portfela jest nie większe niż ustalona wartość maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela [Meucci 2005].

Alokacja bayesowska dotyczy konstrukcji portfeli maksymalnego oczekiwanego zwrotu przy ograniczeniu na ryzyko, których charakterystyki są szacowane na podstawie rozkładów a posteriori oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka składowych portfela. Istotą analizy bayesowskiej jest uwzględnienie w procesie estymacji informacji spoza próby reprezentowanej przez rozkład a priori. W podejściu alokacji bayesowskiej [Meucci 2005] inwestor może formułować rozkłady a priori stóp zwrotu na przykład opierając się na analizie technicznej, fundamentalnej lub ekstrapolacji na podstawie przeszłych obserwacji stóp zwrotu. Uwzględnienie oprócz informacji z próby również wiedzy a priori, dotyczącej wartości parametrów, może zmniejszać błędy spowodowane szacowaniem oczekiwanej stopy zwrotu portfela, a więc ograniczać ryzyko estymacji.

Trzecia z wymienionych metod jest połączeniem alokacji odpornej i alokacji bayesowskiej [Meucci 2006]. Dokładny opis formalny metodologii alokacji odpornej, alokacji bayesowskiej i odporno-bayesowskiej wraz ze specyfikacją zbiorów niepewności oraz przykład ich aplikacji na danych rzeczywistych polskiego rynku kapitałowego można znaleźć m.in. w pracach Orwat [2010] i Orwat-Acedańska [2011].

W tej oraz powyższych pracach ryzyko estymacji jest utożsamiane z różnicą między wartościami charakterystyk portfela otrzymanych przy założeniu macierzy kowariancji i wektora wartości oczekiwanych stóp zwrotu z rozkładu populacji oraz otrzymanych przy założeniu ocen tych parametrów szacowanych na podstawie próby. Wartości charakterystyk portfela optymalizowanego przy założeniu macierzy kowariancji i wektora oczekiwanych stóp zwrotu z rozkładu populacji są określane na potrzeby pracy mianem rzeczywistych charakterystyk. Praca podejmuje ocenę przydatności odporno-bayesowskiego modelu alokacji z innej perspektywy niż przedstawiono to w poprzedniej pracy autorki [Orwat-Acedańska 2011]. Celem artykułu jest zbadanie, w jakim stopniu wartość rzeczywistego ryzyka portfela przekracza ustaloną wartość dopuszczalnego ryzyka portfeli optymalizowanych klasycznie i odpornie-bayesowsko oraz w przypadku których portfeli przekroczenia te są większe. Celem porównania wartości rzeczywistego ryzyka portfeli i dopuszczalnego ryzyka zastosowano metody statystycznej symulacji dla różnych typów rozkładów populacji stóp zwrotu. Analiza

² Zadanie wyboru portfela metodą alokacji odpornej jest szczególnym przypadkiem odpornej optymalizacji (ang. *robust optimization*). Estymatory punktowe charakterystyk składowych portfela są w tej metodologii klasycznymi ocenami parametrów i w tym kontekście nie jest ona tożsama z estymacją odporną (ang. *robust estimation*).

ta ma na celu ocenę przydatności metody odpornej alokacji bayesowskiej w sytuacji, gdy założenie, że stopy zwrotu aktywów mają rozkład normalny, nie jest spełnione.

Podrozdział pierwszy zawiera opis metodologii odpornej alokacji bayesowskiej. Etapy procedury badawczej są wymienione w podrozdziale drugim, natomiast główne charakterystyki rozkładów wykorzystanych w analizie empirycznej zamieszczono w podrozdziale trzecim. Założenia oraz wyniki przeprowadzonych analiz empirycznych zawiera podrozdział czwarty.

1. Metodologia odpornej alokacji bayesowskiej

Charakterystyczną cechą tej metody jest uwzględnienie tzw. profilu inwestora. Jest on reprezentowany przez:

- zbiory niepewności³ dla wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji składowych portfela, które z określonym prawdopodobieństwem zawierają nieznaną wartość parametru (im większe prawdopodobieństwo pokrycia przez zbiór niepewności nieznaną wartość parametru, tym inwestor określający to prawdopodobieństwo cechuje się większą awersją do ryzyka estymacji danego parametru);
- wiedzę a priori⁴ inwestora dotyczącą przyjęcia przez wartość oczekiwaną oraz macierz kowariancji określonych wartości, przy czym ryzyko estymacji odnosi się przede wszystkim do losowego charakteru rozważanych parametrów.

Taka „dwukierunkowa” charakteryzacja profilu inwestora jest zaletą metody odpornej alokacji bayesowskiej. Z jednej strony bowiem zbiory niepewności odzwierciedlają postawę inwestora wobec ryzyka estymacji charakterystyk składowych portfela, z drugiej strony wiedza a priori inwestorów powinna poprawiać dokładność oszacowań parametrów.

Celem zapisu odporno-bayesowskiego modelu alokacji przyjęto następującą notację: $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$ – wektor losowy wartości oczekiwanych stóp zwrotu, $\boldsymbol{\Sigma}$ – macierz kowariancji wektora losowego stóp zwrotu $(R_1, R_2, \dots, R_k)'$. Oczekiwana stopa zwrotu k -składnikowego portfela $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$ ze zbioru dopuszczalnego $\mathcal{C} = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}\mathbf{1} = 1\}$ ma postać $\mathbf{x}'\boldsymbol{\mu}$, natomiast $\sqrt{\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x}}$ jest ryzykiem portfela.

Przypomnijmy, że klasyczne zadanie alokacji (zadanie Markowitza maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu przy ograniczeniu na ryzyko) ma postać:

³ Jest to element właściwy alokacji odpornej.

⁴ Jest to element właściwy alokacji bayesowskiej.

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \mathbf{x}' \boldsymbol{\mu} \\ \text{p.w. } & \sqrt{\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}} \leq \nu \end{aligned} \quad (1)$$

Odporno-bayesowski odpowiednik tego zadania ma postać:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \left\{ \min_{\boldsymbol{\mu} \in \Theta_{\boldsymbol{\mu}_B}} \mathbf{x}' \boldsymbol{\mu} \right\}, \\ \text{p.w. } & \max_{\boldsymbol{\Sigma} \in \Theta_{\boldsymbol{\Sigma}_B}} \sqrt{\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}} \leq \nu \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: $\Theta_{\boldsymbol{\mu}_B}$, $\Theta_{\boldsymbol{\Sigma}_B}$ są bayesowskimi zbiorami niepewności parametrów $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, natomiast ν jest ustaloną wartością maksymalnego dopuszczalnego ryzyka portfela.

Istnieje wiele możliwości specyfikacji zbiorów niepewności⁵. Jedną z propozycji spotykanych w literaturze są elipsoidy niepewności⁶ dla wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji stóp zwrotu. Inwestor może wyznaczyć wartości estymatorów parametru położenia i parametru kształtu elipsoid oraz promienie elipsoid na podstawie szeregu czasowego stóp zwrotu. Jeśli stopy zwrotu mają wielowymiarowy rozkład normalny, wówczas estymatory parametru położenia i parametru kształtu elipsoid oraz ich promienie mają znane określone rozkłady, co ułatwia ich analityczne wyznaczenie oraz interpretację probabilistyczną.

Założmy zatem, że wektor losowy stóp zwrotu \mathbf{R}_t , $t = 1, 2, \dots, T$ ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\mu}$ i macierzą kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ (w skrócie $\mathbf{R}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$)⁷, wówczas podejście bayesowskie w alokacji odpornej umożliwia naturalną specyfikację elipsoidalnych zbiorów niepewności. Są one wyznaczone przez obszary, w których rozkłady a posteriori parametrów $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ charakteryzują się najwyższą gęstością, co oznacza, że środki elipsoid pokrywają się z modalnymi rozkładów a posteriori tych parametrów. Oznaczmy przez

⁵ Na przykład R.H. Tütüncü i M. Koenig [2004] konstruują zbiory niepewności w postaci przedziałów; D. Goldfarb i G. Iyengar [2001] wykorzystują przedział jako zbiór niepewności dla wektora wartości oczekiwanych, natomiast zbiór niepewności dla macierzy kowariancji konstruują za pomocą modeli czynnikowych.

⁶ Zob. A. Meucci [2005; 2006].

⁷ Wówczas estymator $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{I}_T) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_t$ ma k -wymiarowy rozkład t -Studenta z T stopniami swobody, parametrem położenia $\boldsymbol{\mu}$, macierzą kowariancji $T^{-1} \boldsymbol{\Sigma}$. Estymator $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{I}_T) = T^{-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{I}_T))(\mathbf{X}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{I}_T))'$ ma rozkład Wisharta z T stopniami swobody i macierzą kowariancji $T^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$.

$\mathbf{i}_T = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T\}$ szereg czasowy T obserwacji, będący realizacją zbioru $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_T\} = \mathbf{I}_T$ wektorów losowych stóp zwrotu.

Zanim przy powyższych założeniach zostaną podane postacie elipsoid niepewności, określimy rozkłady a priori i a posteriori parametrów $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ ⁸. W tym celu oznaczymy przez $\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{i}_T, d_c)$, $\boldsymbol{\Sigma}_1(\mathbf{i}_T, d_c)$ wartości oczekiwane brzegowych rozkładów a posteriori parametrów odpowiednio $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$, a przez $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$ – parametry rozkładu a priori odpowiednio dla $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$. Natomiast d_c będzie ilościowym odpowiednikiem profilu inwestora, będącym zbiorem następujących wartości:

$$d_c = \{T_0, \nu_0, \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0\}, \quad (3)$$

gdzie: T_0, ν_0 – liczby reprezentujące stopień przekonania inwestora o jego subiektywnej wiedzy dotyczącej prawdziwych wartości parametrów odpowiednio $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$. Im większe wartości T_0, ν_0 w stosunku do T , tym większe znaczenie ma wiedza a priori w wyznaczeniu rozkładu a posteriori.

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach rozkłady a priori parametrów $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ są następujące [Meucci 2006]:

$$\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_0, \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{T_0}); \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W_k(\nu_0, \frac{\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}}{\nu_0}), \quad (4)$$

gdzie: $W_k(\nu_0, \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} / \nu_0)$ oznacza rozkład Wisharta z ν_0 stopniami swobody i macierzą kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} / \nu_0$.

Rozkłady a posteriori parametrów $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{\Sigma}$ są natomiast następujące [Meucci 2006]:

$$\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{i}_T, d_c), \frac{\boldsymbol{\Sigma}}{T_1}); \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \sim W_k(\nu_1, \frac{\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}(\mathbf{i}_T, d_c)}{\nu_1}), \quad (5)$$

gdzie: $T_1 = T_0 + T$; $\nu_1 = \nu_0 + T$; $\boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{i}_T, d_c) = \frac{1}{T_1}(T_0\boldsymbol{\mu}_0 + T\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T))$,

⁸ W praktyce rozkład a priori może być określany dowolnie. W przypadku implementacji odpornej alokacji bayesowskiej wiąże się to z koniecznością stosowania procedur całkowania numerycznego do oszacowania momentów rozkładu a posteriori. W związku z tym analityczne wyznaczenie parametrów rozkładów a posteriori, znacznie ułatwiające stosowanie metody, jest możliwe przy założeniu, że rozkład stóp zwrotu ma rozkład normalny.

$$\Sigma_1(\mathbf{i}_T, d_c) = \frac{1}{\nu_1} \left[\nu_0 \Sigma_0 + T \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T) + \frac{(\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T))(\boldsymbol{\mu}_0 - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T))'}{\frac{1}{T} + \frac{1}{T_0}} \right],$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{r}_t.$$

Bayesowski elipsoidalny zbiór niepewności parametru $\boldsymbol{\mu}$ [Meucci 2006]:

$$\Theta_{\boldsymbol{\mu}_B} = \{ \boldsymbol{\mu} : (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_T, d_c))' \mathbf{S}_{\boldsymbol{\mu}}^{-1}(\mathbf{i}_T, d_c) (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T, d_c)) \leq q_{\boldsymbol{\mu}_B}^2 \}, \quad (6)$$

gdzie:

$q_{\boldsymbol{\mu}_B}^2$ – kwadrat promienia elipsoidy, będący kwantylem rzędu $p_{\boldsymbol{\mu}}$ rozkładu χ^2 z k stopniami swobody ($q_{\boldsymbol{\mu}}^2 = \chi_k^2(p_{\boldsymbol{\mu}})$),

$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_T, d_c)$ – wartość oczekiwana wektora losowego $\boldsymbol{\mu}$ w rozkładzie a posteriori parametru $\boldsymbol{\mu}$, przy czym $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{i}_T, d_c) = \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{i}_T, d_c)$,

$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T, d_c)$ – macierz kowariancji rozkładu a posteriori parametru $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T, d_c) = \frac{1}{T_1} \frac{\nu_1}{\nu_1 - 2} \Sigma_1(\mathbf{i}_T, d_c) \quad (7)$$

Bayesowski elipsoidalny zbiór niepewności dla parametru Σ [Meucci 2006]:

$$\Theta_{\Sigma_B} = \{ \Sigma : \text{vech}(\Sigma - \Sigma_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T, d_c))' \mathbf{S}_{\Sigma}^{-1}(\mathbf{i}_T, d_c) \text{vech}(\Sigma - \Sigma_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T, d_c)) \leq q_{\Sigma_B}^2 \}, \quad (8)$$

gdzie:

$\Sigma_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T, d_c)$ – modalna macierzy kowariancji Σ w rozkładzie a posteriori parametru Σ :

$$\Sigma_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T, d_c) = \frac{\nu_1}{\nu_1 + k + 1} \Sigma_1(\mathbf{i}_T, d_c), \quad (9)$$

$\mathbf{S}_{\Sigma}(\mathbf{i}_T, d_c)$ – macierz kowariancji modalnej macierzy Σ w rozkładzie a posteriori:

$$\mathbf{S}_{\Sigma}(\mathbf{i}_T, d_c) = \frac{2\nu_1^2}{(\nu_1 + k + 1)^3} (\mathbf{D}'_k (\Sigma_1^{-1}(\mathbf{i}_T, d_c) \otimes \Sigma_1^{-1}(\mathbf{i}_T, d_c)) \mathbf{D}_k)^{-1} \quad (10)$$

$q_{\Sigma_B}^2$ – kwadrat promienia elipsoidy Θ_{Σ_B} , ($q_{\Sigma_B}^2 = \chi_{k(k+1)/2}^2(p_{\Sigma_B})$).

Przy powyższych specyfikacjach elipsoid niepewności, zadanie (2) sprowadza się do równoważnej postaci:

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{C}} \{ \mathbf{x}' \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{i}_T, d_c) - \gamma_{\boldsymbol{\mu}_B} \sqrt{\mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}_1(\mathbf{i}_T, d_c) \mathbf{x}} \} \\ & \text{p.w. } \mathbf{x}' \boldsymbol{\Sigma}_1(\mathbf{i}_T, d_c) \mathbf{x} \leq \gamma_{\Sigma_B} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{gdzie: } \gamma_{\boldsymbol{\mu}_B} = \sqrt{\frac{q_{\boldsymbol{\mu}_B}^2}{T_1} \frac{\nu_1}{\nu_1 - 2}}, \quad \gamma_{\Sigma} = \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1 + k + 1} + \sqrt{\frac{2\nu_1^2 q_{\Sigma_B}^2}{(\nu_1 + k + 1)^3}}}}$$

W celu otrzymania dokładnego rozwiązania zadania (10), należy je przekształcić do zadania optymalizacji stożkowej drugiego rzędu (SOCP – ang. *second order cone program*)⁹.

Spełnienie założenia normalności stóp zwrotu umożliwia bezpośrednią interpretację probabilistyczną elipsoidalnych zbiorów niepewności¹⁰. Jeśli rozkład stóp zwrotu nie jest rozkładem normalnym, wówczas trudno arbitralnie dobrać wartości promieni elipsoid mających prostą interpretację probabilistyczną. Powstają zatem pytania:

- Jaka jest statystyczna „jakość” wyników dla portfeli będących rozwiązaniem zadania (11) w sytuacjach, gdy rozkład stóp zwrotu populacji nie jest wielowymiarowym rozkładem normalnym? Czy przeprowadzenie wówczas analizy empirycznej przy specyfikacjach określonych pod warunkiem założenia normalności jest nadal użyteczne?
- Czy uwzględnienie elementu bayesowskiego w modelu alokacji odpornej, czyli wiedzy a priori inwestora o wartościach parametrów $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$, ma wpływ na odsetek przypadków, w których rzeczywiste ryzyko portfela przekracza poziom dopuszczalny oraz średnie przekroczenie¹¹ dopuszczalnego ryzyka portfeli?

⁹ Optymalizacja stożkowa jest rodzajem programowania wypukłego z liniową funkcją celu, zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest przecięciem hiperpłaszczyzny rzeczywistej i stożka.

¹⁰ Wartość promienia elipsoidy jest wówczas oszacowana na podstawie rozkładu chi-kwadrat.

¹¹ W ten sposób określono wartość przekroczenia, która pokazuje, o ile średnio rzeczywiste ryzyko portfela przekracza wartość dopuszczalnego ryzyka portfela.

Odpowiedziom na powyższe pytania służy realizacja celu pracy za pomocą empirycznej analizy porównawczej wyników dla portfeli klasycznych, odpornych i odporno-bayesowskich przy różnych wartościach parametrów oraz różnych typach rozkładów populacji stóp zwrotu.

2. Etapy procedury badawczej

- generowanie N prób liczących n stóp zwrotu z wielowymiarowego rozkładu o zadanych parametrach;
- optymalizacja klasyczna i odporno-bayesowska portfeli na podstawie otrzymanych prób przy założeniu macierzy kowariancji i wektora wartości oczekiwanych z rozkładu populacji stóp zwrotu;
- analiza wielkości przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli w zależności od wartości dopuszczalnego ryzyka portfeli;
- analiza rzeczywistych charakterystyk portfela w zależności od zmian wartości dopuszczalnego ryzyka;
- analiza porównawcza uzyskanych wyników dla portfeli optymalizowanych klasycznie i portfeli odporno-bayesowskich.

Wymienione etapy badawcze przy uwzględnieniu wybranych wariantów przeprowadzono dla różnych typów rozkładów stóp zwrotu.

3. Rozkłady populacji wykorzystane w analizie empirycznej

Oprócz rozkładu normalnego, jednym z rozkładów wykorzystanych w analizie empirycznej jest uogólniony rozkład t-Studenta. Funkcja gęstości jednowymiarowego uogólnionego rozkładu t-Studenta ma postać:

$$f(r)_{\mu,\lambda,\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\lambda}{\pi\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\lambda(r-\mu)^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (12)$$

gdzie μ, λ są parametrami odpowiednio położenia i skali, ν jest liczbą stopni swobody. Wartość oczekiwana oraz wariancja zmiennej losowej R są postaci:
 $E(R) = Mod(R) = \mu$, dla $\nu > 1$ (12)

$$D^2(R) = \frac{1}{\lambda} \frac{\nu}{\nu-2}, \text{ dla } \nu > 2. \quad (13)$$

Ocena ryzyka portfeli jest także dokonywana przy założeniu rozkładu Gumbela, który jest szczególnym przypadkiem rozkładu GEV (ang. *Generalized Extreme Value distribution*). Funkcja gęstości rozkładu Gumbela zmiennej losowej R ma postać [Gumbel 1954]:

$$f(r) = \frac{ze^{-z}}{\lambda}, \text{ gdzie } z = e^{-\frac{r-\mu}{\lambda}}, \quad (14)$$

natomiast μ, λ są parametrami odpowiednio położenia i skali.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej R o tym rozkładzie jest postaci:

$$E(R) = \mu + \lambda\gamma, \quad (15)$$

gdzie γ jest stałą Eulera–Mascheroniego, a wariancja wyraża się wzorem:

$$D^2(R) = \frac{\pi^2}{6} \lambda^2. \quad (16)$$

W analizie empirycznej uwzględniono również rozkład Laplace'a, charakteryzowany następującą funkcją gęstości:

$$f(r)_{\mu,\lambda} = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|r-\mu|}{\lambda}}. \quad (17)$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej R o tym rozkładzie są następujące:

$$E(R) = \mu, \quad (18)$$

$$D^2(R) = 2\lambda^2. \quad (19)$$

4. Wyniki analizy empirycznej

Na wstępie badania przyjęto założenie, że analizowane portfele są dwuskładnikowe, a stopy zwrotu dwóch klas aktywów są nieskorelowane. Metodą statystycznej symulacji wygenerowano N prób ($N = 5000$) pochodzących z populacji dwuwymiarowego rozkładu normalnego o następujących parametrach bazowych:

$$\boldsymbol{\mu} = (1,2)', \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Na podstawie każdej z nich dokonywano optymalizacji portfeli: klasycznych odpornych oraz odporno-bayesowskich, przeprowadzając kolejne analizy. Badano odsetek przypadków, w których rzeczywiste ryzyko portfela przekraczało poziom dopuszczalny ν oraz wartość przekroczenia, która pokazywała, o ile średnio rzeczywiste ryzyko portfela (średnie przekroczenie) przekroczyło wartość ν . Opis, założenia oraz wyniki analiz zawierają punkty **A-C**.

Wymienione w rozdziale drugim etapy procedury badawczej przeprowadzono najpierw przy założeniu wielowymiarowego rozkładu normalnego populacji stóp zwrotu o ustalonych parametrach. We wszystkich analizach przyjęto następujące założenia:

- liczebność każdej próby: $n = 100$;
- prawdopodobieństwo, określające wielkość promienia elipsoidy dla wektora $\boldsymbol{\mu}$: $p_{\boldsymbol{\mu}} = 0$;
- prawdopodobieństwo, określające wielkość promienia elipsoidy dla macierzy $\boldsymbol{\Sigma}$: $p_{\boldsymbol{\Sigma}} = 0,25$.

Wszystkie obliczenia wykonano w programie Matlab za pomocą procedur zbudowanych przez Autorkę. Zadania optymalizacji odporno-bayesowskiej przekształcono do postaci SOCP za pomocą formatu SeDuMi [Stürm 1999].

A. Analiza wpływu wiedzy a priori inwestora o wartościach parametrów $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$ rozkładu a priori na odsetek przekroczeń i średnie przekroczenie dopuszczalnego ryzyka portfela przy założeniu, że populacja stóp zwrotu ma wielowymiarowy rozkład normalny z wartością oczekiwaną $\boldsymbol{\mu}$ i macierzą kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$.

Analizy dokonano dla 4 przykładowych wariantów wiedzy a priori inwestora, odzwierciedlającej jego oczekiwania co do kształtowania się wartości oczekiwanej stopy zwrotu i ryzyka składowych portfela. W szczególności wiedza ta wyraża postawę inwestora wobec ryzyka składowych portfela. Przyjęte założenia o $\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0$ mają charakter poglądowy i służą ocenie „wpływu” elementu bayesowskiego w alokacji odpornej.

Wariant 1 – Inwestor nie posiada wiedzy a priori o wartościach parametrów μ_0, Σ_0 . Zadanie (10) sprowadza się wówczas do zadania alokacji odpornej [Orwat 2010; Orwat-Acedańska 2011, 2012], przy założeniu elipsoidy niepewności dla macierzy kowariancji Σ , element bayesowski nie występuje, tzn. $T_0 = 0, \nu_0 = 0$.

Wariant 2 – Inwestor posiada wiedzę a priori o wartościach parametrów μ_0, Σ_0 dokładnie odzwierciedlającą „rzeczywistość” – wartości parametrów μ_0, Σ_0 pokrywają się z ich odpowiednikami w rozkładzie populacji stóp zwrotu, tzn.:

$$\mu_0 = (1,2)' = \mu, \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \Sigma.$$

Inwestor cechuje się jednakże awersją do ryzyka estymacji macierzy kowariancji (założenie elipsoidy niepewności dla Σ) oraz niepewnością co do rzeczywistych wartości μ, Σ .

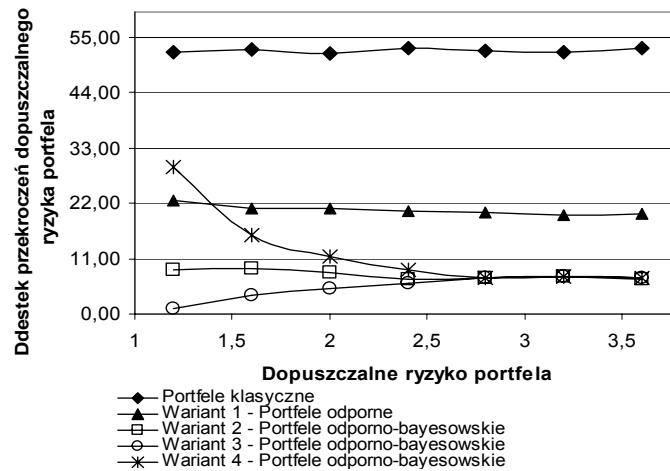
Wariant 3 – Inwestor posiada taką samą wiedzę a priori o parametrze μ_0 jak w wariantie 2, lecz jego wiedza dotycząca Σ_0 odzwierciedla postawę „asekuracyjną” wobec ryzyka składowych portfela – przeszacowuje je:

$$\mu_0 = (1,2)' = \mu, \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wariant 4 – Inwestor posiada taką samą wiedzę a priori o parametrze μ_0 jak w wariantach 2 i 3, lecz jego wiedza dotycząca Σ_0 odzwierciedla postawę „optymistyczną” wobec ryzyka składowych portfela – niedoszacowuje on tego ryzyka, tzn.:

$$\mu_0 = (1,2)' = \mu, \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

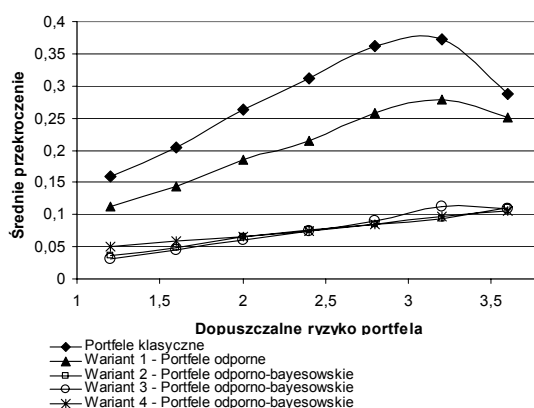
Wyniki uzyskane przy powyższych wariantach porównano z wynikiem uzyskanym dla klasycznych portfeli. Zależność odsetka przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od wielkości dopuszczalnego ryzyka dla wariantów 1-4 oraz portfeli klasycznych przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Zależność odsetka przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od wielkości dopuszczalnego ryzyka portfela, przy założeniu, że populacja stóp zwrotu ma wielowymiarowy rozkład normalny

Wyniki symulacji zestawione w postaci rysunku 1 wskazują, że w podejściu alokacji odpornej (wariant 1) odsetek przypadków, w których rzeczywiste ryzyko portfela przekracza poziom dopuszczalny jest ponad 2-krotnie mniejszy niż w podejściu klasycznym. Odsetek przekroczeń nie zależy od wartości dopuszczalnego ryzyka, zarówno w przypadku portfeli klasycznych, jak również odpornych. Uwzględnienie elementu bayesowskiego w zadaniu alokacji odpornej ma już jednak istotny wpływ na odsetek przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela. W przypadku wariantu 2 poziom ten prawie nie zależy od wartości dopuszczalnego ryzyka portfela, jednak jest on 2-krotnie mniejszy niż w przypadku portfeli z wariantu 1 i prawie 5-krotnie mniejszy w stosunku do portfeli klasycznych. Dla portfeli konstruowanych przez inwestora „asekuracyjnego” wobec ryzyka składowych portfela (wariant 3) odsetek przekroczeń wzrasta natomiast od poziomu 1% do 10% wraz ze wzrostem dopuszczalnego ryzyka, a następnie utrzymuje się na stałym poziomie, takim jak w przypadku wariantów 2 i 4. „Optymistyczna” postawa inwestora wyrażona wariantem 4 determinuje portfele odporno-bayesowskie, których odsetek przekroczeń wraz ze wzrostem dopuszczalnego ryzyka maleje do wartości 7,28. Dla początkowych wartości dopuszczalnego ryzyka przekroczenia te są większe od przekroczeń przez portfele określone pozostałymi wariantami. Reasumując, odsetek przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli odpornych i odporno-bayesowskich jest zdecydowanie mniejszy niż w przypadku portfeli klasycznych, co dowodzi, że portfele te są bezpieczniejsze z tego punktu widzenia. Uwzględnienie elementu bayesowskiego w alokacji odpornej (model odporno-bayesowski) wpływa na odsetek przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela (w stosunku do jego poziomu w podejściu klasycznym i alokacji odpornej).

Ostatnie wnioski są prawdziwe również dla średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfela, przy założeniu, że populacja stóp zwrotu ma wielowymiarowy rozkład normalny (rys. 2). Średnie przekroczenie dla portfeli odpor-no-bayesowskich jest prawie 3-krotnie mniejsze niż portfeli odpornych i 4-krotnie mniejsze niż klasycznych.



Rys. 2. Zależność średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfela od wielkości dopuszczalnego ryzyka portfela, przy założeniu, że populacja stóp zwrotu ma wielowymiarowy rozkład normalny

Zależy ono od zmian wartości dopuszczalnego ryzyka portfela – w przypadku klasycznej alokacji oraz odpornej alokacji rośnie ona wraz ze wzrostem dopuszczalnego ryzyka portfela do pewnej wartości, a następnie zaznacza się tendencja malejąca. Analizowane zależności dla wszystkich wariantów odpor-no-bayesowskich mają natomiast charakter rosnący.

B. Analiza porównawcza wyników – zależności odsetka przekroczeń i średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfela od wartości dopuszczalnego ryzyka portfela – między różnymi typami rozkładów z uwzględnieniem wariantów wiedzy a priori inwestora.

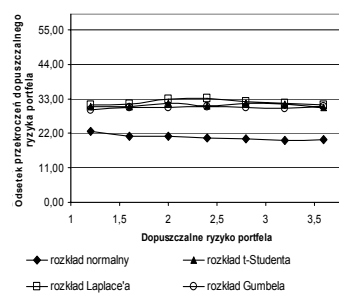
W przypadku każdego rozważanego wariantu 1-4 odsetek przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela jest najmniejszy, gdy populacja stóp zwrotu ma rozkład normalny. Nie ma natomiast zasadniczych różnic między poziomami odsetka przekroczeń dla poszczególnych pozostałych rozważanych rozkładów. Różnica między poziomem odsetka przekroczeń dla rozkładu normalnego a poziomem odsetka dla grupy pozostałych rozkładów jest średnio wielkości 10%. Jest to niewiele w porównaniu z odsetkiem przekroczeń dla wszystkich rozkładów (łącznie z normalnym) w przypadku portfeli klasycznych (rys. 3e) który utrzymuje się na poziomie około 55%.

Dokonując analogicznej analizy, z punktu widzenia średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka (rys. 4), należy stwierdzić, że w analizowanych modelach

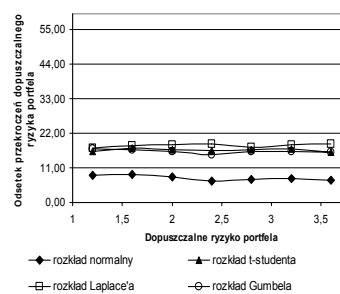
odporno-bayesowskich (warianty 2-4) nie ma zasadniczych różnic między poziomami tej wielkości dla poszczególnych rozważanych rozkładów (w tym rozkładu normalnego). Największe różnice (w kształtowaniu się średniego przekroczenia) między rozkładem normalnym a pozostałymi rozważanymi rozkładami zachodzą w przypadku alokacji odpornej (rys. 4a).

Wyniki analizy w punkcie B przemawiają za uznaniem stosowania metody odpornej alokacji bayesowskiej za nadal użyteczne w przypadku rozważanych w pracy rozkładów innych niż normalny, biorąc pod uwagę odsetek i średnie przekroczenie dopuszczalnego ryzyka portfela.

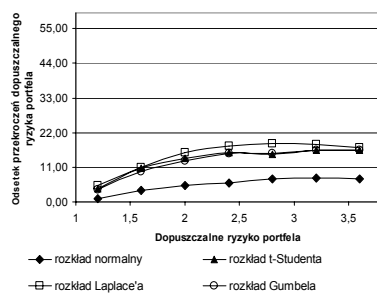
a) wariant 1



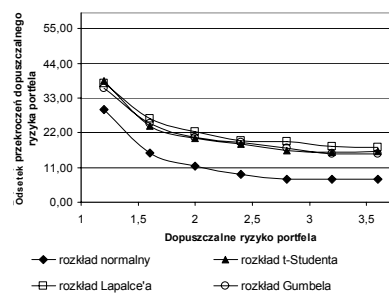
b) wariant 2



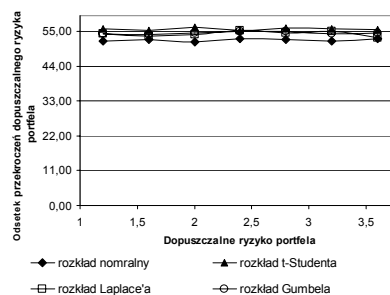
c) wariant 3



d) wariant 4

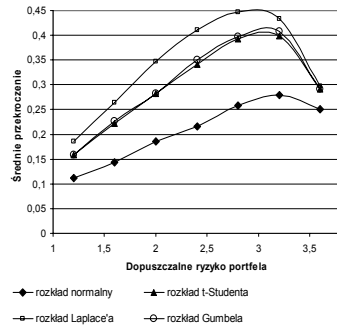


e) portfele klasyczne

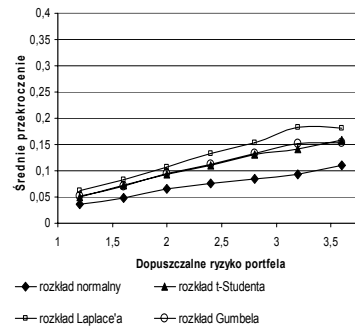


Rys. 3. Zależność odsetka przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od wielkości dopuszczalnego ryzyka portfela, przy założonych wariantach, dla różnych rozkładów populacji stóp zwrotu

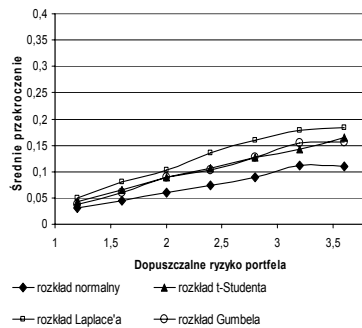
a) wariant 1



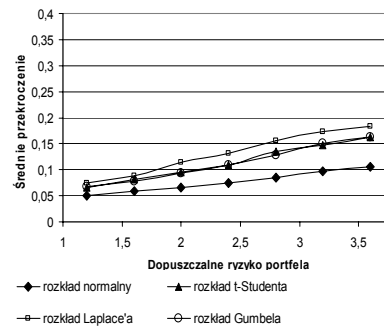
b) wariant 2



c) wariant 3



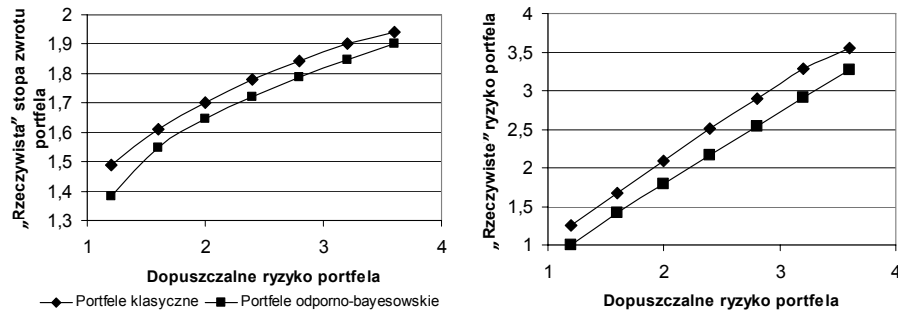
d) wariant 4



Rys. 4. Zależność średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfela od wielkości dopuszczalnego ryzyka portfela przy wariantach 1-4, dla różnych rozkładów populacji stóp zwrotu

C. Analiza rzeczywistych charakterystyk portfela w zależności od zmian wartości dopuszczalnego ryzyka.

Przykładowo, na rys. 5 zilustrowano wyniki tej analizy dla przypadku rozkładu t-Studenta w wariancie 3. Portfele odporno-bayesowskie cechują się mniejszą rzeczywistą stopą zwrotu i rzeczywistym ryzykiem niż portfele klasyczne. Fakt ten jest prawdziwy również w przypadku pozostałych wszystkich wariantów oraz pozostałych rozważanych rozkładów populacji stóp zwrotu.



Rys. 5. Zależność rzeczywistych charakterystyk portfeli od dopuszczalnego ryzyka w przypadku rozkładu t-Studenta i wariantu 3

W tabelach 1 i 2 zamieszczono wartości rzeczywistych charakterystyk portfeli w zależności od wartości dopuszczalnego ryzyka portfela dla rozważanych wariantów oraz rozkładów stóp zwrotu. Wartości rzeczywistych stóp zwrotu i rzeczywistego ryzyka portfeli są bardzo zbliżone w poszczególnych wariantach 1-4 oraz rozkładach.

Tabela 1

Zależność rzeczywistej stopy zwrotu portfeli od dopuszczalnego ryzyka

Dopuszczalne ryzyko portfela	Portfele klasyczne	rozkład normalny – warianty				rozkład t-Studenta – warianty			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	1,485	1,425	1,441	1,394	1,467	1,412	1,440	1,382	1,469
1,6	1,604	1,554	1,561	1,547	1,573	1,559	1,563	1,548	1,574
2	1,694	1,644	1,650	1,643	1,656	1,652	1,651	1,645	1,657
2,4	1,771	1,718	1,723	1,720	1,726	1,724	1,726	1,722	1,727
2,8	1,839	1,782	1,788	1,786	1,788	1,790	1,790	1,787	1,790
3,2	1,896	1,839	1,846	1,845	1,845	1,846	1,848	1,848	1,848
3,6	1,944	1,892	1,898	1,899	1,899	1,892	1,900	1,901	1,901
Dopuszczalne ryzyko portfela	Portfele klasyczne	rozkład Laplace'a – warianty				rozkład Gumbela – warianty			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	1,485	1,408	1,441	1,382	1,469	1,409	1,442	1,386	1,468
1,6	1,604	1,561	1,562	1,548	1,574	1,559	1,562	1,548	1,573
2	1,694	1,653	1,652	1,645	1,658	1,650	1,650	1,645	1,657
2,4	1,771	1,729	1,726	1,723	1,727	1,725	1,724	1,721	1,728
2,8	1,839	1,790	1,789	1,788	1,791	1,789	1,790	1,788	1,791
3,2	1,896	1,846	1,848	1,848	1,847	1,844	1,848	1,847	1,847
3,6	1,944	1,889	1,902	1,899	1,900	1,892	1,899	1,901	1,900

Tabela 2

Zależność rzeczywistego ryzyka portfeli od dopuszczalnego ryzyka

Dopuszczalne ryzyko portfela	Portfele klasyczne	rozkład normalny – warianty				rozkład t-Studenta – warianty			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	1,226	1,086	1,095	1,003	1,161	1,100	1,101	1,003	1,169
1,6	1,631	1,444	1,457	1,407	1,499	1,480	1,465	1,416	1,506
2	2,039	1,801	1,816	1,783	1,843	1,856	1,826	1,798	1,852
2,4	2,450	2,160	2,170	2,157	2,189	2,212	2,190	2,171	2,200
2,8	2,858	2,515	2,531	2,520	2,536	2,580	2,551	2,534	2,553
3,2	3,241	2,862	2,893	2,886	2,887	2,927	2,911	2,912	2,907
3,6	3,583	3,213	3,245	3,248	3,249	3,232	3,263	3,271	3,270
Dopuszczalne ryzyko portfela	Portfele klasyczne	rozkład Laplace'a – warianty				rozkład Gumbela – warianty			
		1	2	3	4	1	2	3	4
1,2	1,226	1,103	1,101	1,004	1,170	1,096	1,103	1,007	1,167
1,6	1,631	1,488	1,463	1,414	1,509	1,478	1,461	1,416	1,504
2	2,039	1,866	1,831	1,801	1,859	1,844	1,822	1,799	1,853
2,4	2,450	2,243	2,193	2,176	2,201	2,214	2,180	2,166	2,205
2,8	2,858	2,587	2,548	2,543	2,559	2,574	2,548	2,536	2,556
3,2	3,241	2,931	2,912	2,913	2,905	2,913	2,909	2,905	2,903
3,6	3,583	3,212	3,277	3,256	3,264	3,231	3,257	3,266	3,260

Podsumowanie

W artykule weryfikowano model odpornej alokacji bayesowskiej dla różnych typów rozkładów za pomocą podejścia symulacyjnego. Sprowadzało się to do badania wpływu błędu estymacji na ryzyko portfela, będącego rozwiązaniem problemu maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy ograniczeniu na jego wariancję. W tym celu porównywano wyniki dla klasycznej alokacji Markowitza i odpornej alokacji bayesowskiej.

Druga z metod pozwala na uwzględnienie poziomu niepewności inwestora związanej z szacowaniem charakterystyk składowych portfela na podstawie próby oraz jego wiedzy a priori dotyczącej kształtowania się rzeczywistych wartości tych charakterystyk w populacji. Te dwa elementy składające się na tzw. profil inwestora służą ograniczeniu ryzyka estymacji charakterystyk składowych portfela.

Niniejsze opracowanie jest kontynuacją pracy autorki [Orwat-Acedańska 2012] weryfikującej odporny model alokacji dla różnych typów rozkładów za pomocą podejścia symulacyjnego. W poprzedniej pracy poddano analizie m.in. liczbę i wielkość przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli oraz rzeczywistych charakterystyk portfeli w zależności od wartości dopuszczalnego ryzyka, liczebności podprób i wielkości elipsoid niepewności dla macierzy kowariancji

i wektora wartości oczekiwanej. Mając na względzie uzyskane tam wnioski, w niniejszej pracy skupiono uwagę na aspekcie bayesowskim w modelu odpornym. W szczególności analizowano wpływ wiedzy a priori inwestora na poziom przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela oraz kształtowanie się rzeczywistych charakterystyk portfela w zależności od tego ryzyka. Porównanie wyników tych analiz dla różnych typów rozkładów stóp zwrotu służyło ocenie przydatności metody w sytuacji, gdy rozkład stóp zwrotu populacji nie jest wielowymiarowym rozkładem normalnym.

W pracy pokazano, że omówione podejście odporno-bayesowskie pozwala uzyskać portfele, które są bezpieczniejsze z punktu widzenia inwestora, biorąc pod uwagę niepewność związaną z szacowaniem ich charakterystyk na podstawie próby. W szczególności dla rozkładu normalnego, odsetek i średnie przekroczenie dopuszczalnego ryzyka (w zależności od wartości przekroczeń dopuszczalnego) portfeli odporno-bayesowskich są zdecydowanie mniejsze niż w przypadku portfeli klasycznych. Ponadto, uwzględnienie elementu bayesowskiego w alokacji odpornej wpływa na zmianę odsetka przekroczeń w zależności od wartości dopuszczalnego ryzyka portfela. W przypadku średniego przekroczenia, „włączenie” elementu bayesowskiego w alokację odporną powoduje natomiast zmniejszenie średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfela.

Wnioski te są również prawdziwe dla pozostałych rozkładów rozważanych w pracy, przy czym odsetek przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela w przypadku tych rozkładów jest większy (średnio o 10%) niż dla rozkładu normalnego. Przemawia to jednak za uznaniem metody odpornej alokacji bayesowskiej za nadal użyteczną w przypadku rozważanych w pracy rozkładów innych niż normalny, biorąc pod uwagę odsetek i średnie przekroczenie dopuszczalnego ryzyka portfela. Portfele odporno-bayesowskie cechują się także mniejszą rzeczywistą stopą zwrotu i rzeczywistym ryzykiem niż portfele klasyczne. Fakt ten jest prawdziwy również w przypadku pozostałych rozważanych rozkładów populacji stóp zwrotu innych niż rozkład normalny.

Literatura

- Goldfarb D., Iyengar G. (2001): *Robust Portfolio Selection Problem*. „Mathematics of Operations Research”, No. 28.
- Gumbel E.J. (1954): *Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications*. Applied mathematics series 33. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- Markowitz H. (1952): *Portfolio Selection*. „Journal of Finance”, No. 7.
- Meucci A. (2005): *Risk and Asset Allocation*. Springer, Berlin.

- Meucci A. (2006): *Robust Bayesian Allocation*. Working paper.
- Orwat A. (2010): *Odporne metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji*. „Skuteczne inwestowanie”, nr 616.
- Orwat-Acedańska A. (2011): *Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji. Modelowanie Preferencji a Ryzyko'11*. Red T. Trzaskalik. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Orwat-Acedańska A. (2012): *Ocena ryzyka portfela w alokacji odpornej przy różnych typach rozkładów – podejście symulacyjne. Analiza szeregów czasowych a statystyczny pomiar ryzyka*. Red. G. Trzpiot. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice.
- Sturm J. (1999): *Using SeDuMi 1.02, MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones*. „Optimization Methods and Software”, No. 11-12.
- Tütüncü R.H., Koenig M. (2004): *Robust Asset Allocation*. „Annals of Operations Research”, No. 132.

VERIFICATION OF THE ROBUST-BAYESIAN ASSET ALLOCATION MODEL FOR DIFFERENT TYPES OF DISTRIBUTION – SIMULATION APPROACH

Summary

In the paper robust Bayesian allocation method was verified for different distributions of returns using simulation approach. An impact of estimation error on the portfolio risk was examined when portfolios were built as a solution to the problem of maximizing expected return with restrictions imposed on its variance. Classical Markowitz approach results were compared to the robust Bayesian approach. Using simulations it was shown that in robust Bayesian method a fraction of samples where a portfolio risk exceeded its maximum limit as well as mean excess risk were much lower than in the classic approach. Moreover extending robust allocation with Bayesian approach significantly affects the portfolio riskiness. This results also holds if the distribution of returns in nonnormal although the differences are smaller.