

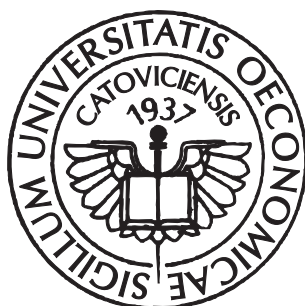
**ANALIZA SZEREGÓW CZASOWYCH  
A STATYSTYCZNY POMIAR RYZYKA**

# **Studia Ekonomiczne**

**ZESZYTY NAUKOWE  
WYDZIAŁOWE  
UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO  
W KATOWICACH**

# **ANALIZA SZEREGÓW CZASOWYCH A STATYSTYCZNY POMIAR RYZYKA**

**Redaktor naukowy  
Grażyna Trzpiot**



**Katowice 2012**

#### **Komitet Redakcyjny**

Krystyna Lisiecka (przewodnicząca), Anna Lebda-Wyborna (sekretarz),  
Halina Henzel, Anna Kostur, Maria Michałowska, Grażyna Musiał, Irena Pyka,  
Stanisław Stanek, Stanisław Swadźba, Janusz Wywiół, Teresa Żabińska

#### **Komitet Redakcyjny Informatyki i Komunikacji**

Tadeusz Trzaskalik (redaktor naczelny), Mariusz Żytniewski (sekretarz),  
Andrzej Bajdak, Stanisław Stanek, Grażyna Trzpiot

#### **Rada Programowa**

Lorenzo Fattorini, Mario Glowik, Miloš Král, Bronisław Micherda,  
Zdeněk Mikoláš, Marian Noga, Gwo-Hsiu Tzeng

#### **Redaktor**

Karolina Koluch

#### **Skład**

Urszula Grendys

© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach 2012

**ISBN 978-83-7875-036-9**

**ISSN 2083-8611**

Wersją pierwotną „Studiów Ekonomicznych” jest wersja papierowa

Wszelkie prawa zastrzeżone. Każda reprodukcja lub adaptacja całości  
bądź części niniejszej publikacji, niezależnie od zastosowanej  
techniki reprodukcji, wymaga pisemnej zgody Wydawcy

#### **WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO W KATOWICACH**

ul. 1 Maja 50, 40-287 Katowice, tel. 32 257-76-30, fax 32 257-76-43  
www.wydawnictwo.ue.katowice.pl, e-mail: wydawnictwo@ue.katowice.pl

## SPIS TREŚCI

---

---

|  |     |
|--|-----|
| WPROWADZENIE .....   | 7   |
| Grażyna Trzpiot: EKSTREMALNA REGRESJA KWANTYLOWA .....   | 11  |
| Summary .....  | 20  |
| Grażyna Trzpiot: O WŁASNOŚCIACH TRANSFORMUJĄCYCH MIAR<br>RYZYKA .....  | 21  |
| Summary .....  | 36  |
| Alicja Ganczarek-Gamrot: MODELE O-GARCH W OCENIE RYZYKA<br>PORTFELA INWESTYCJI NA RYNKU DNIA NASTĘPNEGO ..   | 37  |
| Summary .....  | 48  |
| Agnieszka Orwat-Acedańska: OCENA RYZYKA PORTFELA<br>W ALOKACJI ODPORNEJ PRZY RÓŻNYCH TYPAH<br>ROZKŁADÓW – PODEJŚCIE SYMULACYJNE .....                            | 49  |
| Summary .....  | 66  |
| Grażyna Trzpiot, Agnieszka Orwat-Acedańska: KWANTYLOWA<br>ANALIZA STYLU NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH<br>FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH AKCJI .....                          | 67  |
| Summary .....  | 83  |
| Grażyna Trzpiot, Przemysław Jeziorski: ZASTOSOWANIE<br>SKOINTEGROWANYCH MODELI VAR<br>NA MIĘDZYNARODOWYCH RYNKACH FINANSOWYCH ...                                | 85  |
| Summary .....  | 98  |
| Grażyna Trzpiot, Dominik Krężolek: JEDNOCZYNNIKOWY MODEL<br>SHARPE'A – ANALIZA EMPIRYCZNA NA PRZYKŁADZIE<br>WYBRANYCH WALORÓW RYNKU METALI<br>NIEŻELAZNYCH ..... | 99  |
| Summary .....  | 109 |

|  |     |
|--|-----|
| Grażyna Trzpiot, Justyna Majewska: METODY IDENTYFIKACJI<br>OBSERWACJI JEDNORAZOWYCH I DŁUGOTRWAŁYCH<br>– ANALIZA PORÓWNAWCZA NA ŚWIATOWYCH RYNKACH<br>KAPITAŁOWYCH ..... | 111 |
| Summary .....  | 121 |
| Alicja Ganczarek-Gamrot, Justyna Majewska: ODPORNA ESTYMACJA<br>ZMIENNOŚCI NA RYNKU ENERGII ELEKTRYCZNEJ .....   | 123 |
| Summary .....  | 137 |
| Agnieszka Orwat-Acedańska, Anna Ojrzyńska: STATYSTYCZNA<br>ANALIZA STRUKTURY DEMOGRAFICZNEJ CZŁONKÓW<br>OFE .....  | 139 |
| Summary .....  | 154 |
| Grażyna Trzpiot, Joanna Tomanek: SZACOWANIE STRUKTURY<br>TERMINOWEJ STÓP PROCENTOWYCH .....  | 155 |
| Summary .....  | 164 |

## WPROWADZENIE

---

Statystyczne miary opisowe wartości badanych zmiennych dały początek rozwojowi metodologii pomiaru ryzyka związanej z miarami ryzyka. Początkowo ryzyko było postrzegane jedynie w odniesieniu do rynków kapitałowych i koncentrowano się na pomiarze ryzyka z wykorzystaniem miar zmienności. Kolejnym krokiem modelowania jest ilościowa reprezentacja ryzyka w ustalonym horyzoncie czasowym, a następnie reprezentacja ryzyka poprzez wyznaczenie prawdopodobieństwa dla zadanych scenariuszy. Tego rodzaju podejście zapoczątkowało rozwój konstrukcji miar ryzyka zwanych miarami zagrożenia. Następnie pojawiła się grupa prac badawczych podejmująca zagadnienie własności tych miar, a co za tym idzie – użyteczności w badaniach i zastosowaniach praktycznych. Metodologia w tym obszarze badań wykorzystuje metody symulacyjne Monte Carlo, analizy danych historycznych, jak również nieklasyczny opis statystyczny, np. regresję kwantylową. Kwantylowe miary ryzyka mają zastosowanie jako miary ekstremalne dla pesymistycznych scenariuszy. Opierając się na takim podejściu, wykorzystuje się miary wartości zagrożonej oraz warunkowe miary wartości zagrożonej z ograniczeniami na wartości lub typ rozkładu. Opisywane miary są wyznaczane dla empirycznych szeregów czasowych będących punktem wyjścia do analiz z wykorzystaniem metodologii stochastycznych opisów szeregów czasowych. Przedmiotem badań było zastosowanie metodologii statystycznej analizy szeregów czasowych do opisu ryzyka z wykorzystaniem miar zmienności oraz miar zagrożenia na rynku kapitałowym i terminowym oraz na rynkach towarowych: w obrocie metalami oraz na rynku energii.

Artykuł Grażyny Trzpiot otwierający niniejszy Zeszyt Naukowy ma charakter teoretycznego wprowadzenia w metodologię teorii regresji kwantylowej w ogonach rozkładów. Omówiono w nim w szczególności ekstremalne własności regresji kwantylowej dla dużej próby. To szczególne badanie ma znaczenie aplikacyjne w kontekście szeregów czasowych o wysokiej częstotliwości. Drugi artykuł tej Autorki to uporządkowanie własności transformujących miar ryzyka. Omówione własności wychodzą naprzeciw następującym problemom: zapewniają, że transformująca miara ryzyka wykorzysta wszystkie informacje z rozkładu prawdopodobieństwa strat oraz że użyje odpowiednio tych informacji.

Temat wielowymiarowego modelowania na rynku energii porusza artykuł Alicji Ganczarek-Gamrot. Omówiono w nim klasyczne wielowymiarowe modele GARCH: modele VECM oraz BEKK, które w ogólnej swojej postaci wymagają estymacji wielu parametrów. W części badawczej wykorzystano wielowymiarowy model czynnikowy O-GARCH do estymacji ryzyka zmiany wartości portfela złożonego z kontraktów na energię elektryczną.

Metodologiczne podejście do stosowanych w praktyce modeli przyjmuje w swoim artykule Agnieszka Orwat-Acedańska. Rozważa ważny problem ryzyka estymacji, rozumiany w kontekście ryzyka inwestycji jako możliwość poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów modeli. Autorka podejmuje ocenę przydatności metody alokacji odpornej, przeprowadzając badanie, w jakim stopniu wartość „rzeczywistego” ryzyka portfela przekracza ustaloną wartość dopuszczalnego ryzyka. Porównaniu wartości „rzeczywistego” ryzyka portfeli i dopuszczalnego ryzyka służy zastosowanie metod symulacji rozkładu populacji.

Grażyna Trzpiot i Agnieszka Orwat-Acedańska połączyły metodologię klasycznego modelu analizy stylu Sharpe’a z pewną szczególną wersją regresji kwantylowej w badaniach rynku funduszy inwestycyjnych akcji. Zbadały wpływ pewnych czynników na cały rozkład warunkowy stóp zwrotu funduszu poprzez modelowanie warunkowych kwantyli stóp zwrotu wybranych funduszy inwestycyjnych zrównoważonych. Przedstawiły uogólnienie modelu analizy stylu Sharpe’a do modelu wielorakiej regresji kwantylowej z ograniczeniami na parametry (kwantylowa analiza stylu).

W artykule Grażyny Trzpiot i Przemysława Jeziorskiego podjęto metodologię wektorowych modeli autoregresyjnych (VAR), które pozwalają na modelowanie wielowymiarowych szeregów czasowych. Modele VAR zakładają, że modelowane szeregi czasowe posiadają własność stacjonarności. Istnienie niestacjonarności szeregów czasowych uniemożliwia bezpośrednią implementację modeli VAR. Podjęta analiza obejmuje wykorzystanie własności tych modeli oraz szacowanie modeli VAR w odniesieniu do wybranych szeregów czasowych z rynku kapitałowego.

Model czynnikowy opisuje poziom stopy zwrotu poprzez dekompozycję czynników na właściwe wszystkim aktywom i specyficzne dla konkretnie analizowanego waloru. To podejście przyjęli Grażyna Trzpiot i Dominik Krężolek w swoim artykule, przedstawiając trzy podstawowe grupy modeli czynnikowych: makroekonomiczne, fundamentalne oraz statystyczne. Badania empiryczne skoncentrowano na rynku metali.

Problem występowania obserwacji odstających w szeregach czasowych jest przedmiotem rozważań zarówno na płaszczyźnie praktycznej, jak i teoretycznej. W artykule Grażyny Trzpiot i Justyny Majewskiej przedstawiono

klasyczną procedurę identyfikacji obserwacji nietypowych wykorzystującą estymację parametrów klasyczną metodą największej wiarygodności oraz zmodyfikowaną procedurę wykorzystującą odporną metodę estymacji parametrów ( $\tau$ -estymację). Zweryfikowano porównywane metody na danych empirycznych pochodzących z parkietów światowych.

Zastosowanie podejścia odpornego w modelowaniu na rynku energii można znaleźć w artykule Alicji Ganczarek-Gamrot i Justyny Majewskiej. Na podstawie notowań z polskiej Towarowej Giełdy Energii dokonano analizy zidentyfikowanych gwałtownych skoków zmienności cen energii elektrycznej oraz zastosowano odporne metody estymacji parametrów modeli GARCH.

Celem artykułu Agnieszki Orwat-Acedańskiej i Anny Ojrzyńskiej jest statystyczny opis struktury demograficznej członków Otwartych Funduszy Emerytalnych oraz zmian tej struktury w okresie badawczym 1999-2009. Do analizy zmian struktury demograficznej członków OFE ogółem oraz według płci i wieku zastosowano wybrane statystyczne wskaźniki demograficzne. Uzupełnienie opisu struktury demograficznej stanowi klasyfikacja funduszy pod względem struktury członków według różnych grup wiekowych.

Grażyna Trzpiot i Joanna Tomanek podejmują zagadnienie szacowania parametrów modeli przybliżających strukturę terminową stóp procentowych w aspekcie aproksymacji krzywej dochodowości. Najszerszym podejściem modelowania stóp procentowych jest aproksymacja całej krzywej dochodowości poprzez estymację pewnej funkcji opisującej wszystkie stopy procentowe, przy czym parametry tej funkcji mają praktyczną interpretację. Zastosowano dwa modele: Nelsona-Siegela oraz Svenssona. Model Svenssona jest rozwinięciem modelu Nelsona-Siegela. Model ten pozwala na większą elastyczność w modelowaniu krzywej dzięki dwóm dodatkowym parametrom. Przedstawiono również oszacowanie modelu Svenssona.

Przedstawione artykuły są wynikiem badań statutowych prowadzonych w zespole badawczym składającym się z młodych naukowców, adiunktów oraz doktorantów, tworzących dynamiczną grupę poszukującą nowego ujęcia znanych podejść do opisu ryzyka w szeregach czasowych. Wykorzystanie znanych metodologii, ale zastosowanych w badaniach w odmiennych konfiguracjach, pozwala na wskazanie obszarów badań wcześniej niezauważalnych bądź nie dość ostro widzianych. Autorzy mają nadzieję, że przedstawione Czytelnikowi wyniki badań pobudzą do refleksji i pytań, co zawsze jest początkiem nowych badań.

*Grażyna Trzpiot*



**Grażyna Trzpiot**

## **EKSTREMALNA REGRESJA KWANTYLOWA**

---

---

### **Wprowadzenie**

Omawiana metoda regresji – regresja kwantylowa – wyznacza estymatory warunkowych kwantyli (Koenker, Bassett, 1978) objaśnianej zmiennej  $Y$  na podstawie wartości zmiennych objaśniających  $X$ . Autorzy rozwinęli regresję medianową Laplace’a (1818) (bezwzględny minimalny estymator) oraz uogólnili zwykle kwantyle wyznaczone dla próby w zbiór regresji kwantylowych. Regresja kwantylowa jest ważnym narzędziem w estymacji warunkowych kwantyli wyjaśnianej zmiennej  $Y$ , w przypadku gdy dysponuje się macierzą kowariancji  $X$ . Może być wykorzystywana nie tylko do mierzenia efektów zmian wartości w centrum rozkładu, ale również w prawym lub lewym ogonie rozkładu. Poniżej przedstawiono teorię regresji kwantylowej w ogonach rozkładów.

W artykule w szczególności zostaną omówione ekstremalne własności dla dużej próby (ekstremalny porządek oraz centralny porządek) estymatorów regresji kwantylowej dla modelu liniowego regresji kwantylowej z obciętym ogonem rozkładu do istotnego minimum rozważanej dziedziny oraz domknięte pod warunkiem ekwiwalentności ogona względem wartości regresorów. Takie założenia w modelowaniu łączą ograniczenia teorii wartości ekstremalnych z homoscedastycznością i heteroscedastycznością liniowej specyfikacji analizy regresji. W dużych próbach ekstremalny porządek regresji kwantylowej jest słabo zbieżny do funkcjonałów całek stochastycznych procesu Poissona zależnego od regresorów, podczas gdy centralna kwantylowa regresja oraz jej funkcjonały są zbieżne do wektora o rozkładzie normalnym macierzy kowariancji zależnym od parametrów w ogonie oraz rozkładu parametrów.

Regresja kwantylowa ma wiele zastosowań w badaniach empirycznych oraz wiele opracowań teoretycznych. W wielu ważnych zastosowaniach regresji kwantylowej występują studia łączne z obserwacją występujących wartości ekstremalnych. W ekonometrycznych zastosowaniach można wskazać badania wykorzystujące analizę czynnikową, która uwzględnia ekstremalne wartości (przykładowo: dolna wartość wagi noworodków, Abrevaya, 2001) czy analizę wysokich notowań na aukcjach (zob. Donald, Paarsch, 1993) oraz estymację czynników wysokiego ryzyka finansowego (zob. Tsay, 2002; Chernozhukov, Umantsev, 2001).

## 1. Regresja kwantylowa

Zmienna  $Y$  jest zmienną objaśnianą o wartościach w  $\mathbb{R}$ , natomiast  $X = (1, X'_{-1})$  jest wektorem zmiennych objaśniających o wymiarach  $d \times 1$  (zazwyczaj transformowane zmienne wejściowe)\*. Warunkową dystrybuantę zmiennej  $Y$  przy ustalonej wartości  $X = x$  zapiszemy jako  $F_Y(\cdot|x)$ . Zadaniem jest wyznaczenie  $F_Y^{-1}(\tau|x) = \inf\{y : F_Y(y|x) > \tau\}$ , gdzie  $\tau$  jest bliskie zeru. Rozpatrujemy próbę  $\{Y_t, X_t, t = 1, \dots, T\}$ , gdzie  $X_t \in \mathbf{X}$ , która generuje model probabilistyczny z warunkową funkcją kwantylową:

$$F_Y^{-1}(\tau|x) = x' \beta(\tau) \quad \text{dla } \tau \in \mathcal{L}, x \in \mathbf{X} \quad (1.1)$$

Funkcja  $\beta(\cdot)$  jest nieparametryczną funkcją  $\tau$ , które jeżeli  $\mathcal{L} = (0, 1)$  również odpowiada modelowi stochastycznemu z losowymi parametrami:

$$Y = X' \beta(\varepsilon) \quad \text{oraz } \varepsilon = U(0, 1), X \in \mathbf{X}. \quad (1.2)$$

Ważne jest, aby było spełnione równanie 1.1 przy dodatkowych ograniczeniach:

$$\mathcal{L} = [0, \eta] \quad \text{dla pewnego } 0 < \eta < 1 \quad \text{oraz } x \in \mathbf{X}, \quad \text{który jest zwartym podzbiorem } \mathbb{R}^d. \quad (1.3)$$

Różne modele liniowe (1.1) mogą być stosowane dla różnych podzbiorów danych generujących różne macierze kowariancji  $X$  (przykładowo mogą być rozpatrywane w lokalnym sąsiedztwie danego  $x_0$ , wówczas model liniowy (1.1) może być traktowany jako rozwinięcie Taylora). Model (1.1) ma fundamentalne znaczenie w teoretycznej i empirycznej literaturze o regresji kwantylowej. Jego przyszłe zastosowania to możliwość wyznaczania kwantylowej specyfikacji efektu kowariancji w znanym modelowaniu liniowym.

Wykorzystamy następujące podejście metodologiczne: połączymy liniowy model z ograniczeniami na ogonie rozkładu, zaczerpniętymi z teorii wartości ekstremalnych, aby uzasadnić własności asymptotyczne.

Wnioskowanie o wartościach  $\beta(\tau)$  wykorzystuje w regresji kwantylowej statystyki  $\hat{\beta}(\tau)$  zdefiniowane jako rozwiązanie problemu wyznaczenia minimum absolutnych asymetrycznych odchyleń:

$$\hat{\beta}(\tau) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^d} \sum_{t=1}^T \rho_\tau(Y_t - X_t' \beta) \quad (1.4)$$

gdzie  $\rho_\tau(u) = (\tau - I(u \leq 0))u$ \*\*.

\* Zapis  $x_{-1}$  oznacza wektor  $x$  z pominięciem pierwszej składowej  $x_1$ .

\*\*  $I[A] = 1$  if  $A$  is true,  $I[A] = 0$  otherwise.

Regresja Laplace'a (1818) – medianowa regresja – jest szczególnym przypadkiem tego zadania, wówczas  $\rho_{1/2}(u) = |u|/2$ . Statystyki  $\hat{\beta}(\tau)$  są naturalnym uogólnieniem kwantyli z próby do przypadku ciągłego. W przypadku zadania jednowymiarowego kwantyl rzędu  $\tau$  może być wyznaczony jako rozwiązanie powyższego problemu (bez kowariancji), wówczas  $X_i = 1$ .

Aby wprowadzić własności  $\beta(\tau)$  dla dużych prób w ogonach rozkładów, wyróżnimy trzy typy regresji kwantylowej w próbie zgodnie z teorią wartości ekstremalnych<sup>\*</sup>:

- ekstremalny porządek ciągu:  $\tau_T \rightarrow 0$ ,  $\tau_T T \rightarrow k > 0$ ,
- wewnętrzny porządek ciągu:  $\tau_T \rightarrow 0$ ,  $\tau_T T \rightarrow \infty$ ,
- centralny porządek ciągu:  $\tau \in (0,1)$ , jest ustalone,  $T \rightarrow \infty$ .

Będziemy rozpatrywać statystyki  $\hat{\beta}(\tau)$  dla ekstremalnych i wewnętrznych porządków ciągów, a następnie zapiszemy statystyki spełniające równocześnie założenia jako ekstremalne regresje kwantylowe, przyjmując oznaczenie  $\hat{\beta}(\tau_T)$ . Oznacza to, że pominiemy zapis  $T$  w przyjętym oznaczeniu  $\tau_T$  (jeżeli nie spowoduje to niezrozumienia).

## 2. Teoria wartości ekstremalnych a model liniowy regresji kwantylowej

Mamy zmienną losową  $U$  z dystrybuantą  $F_u$  oraz najmniejszą wartością (ang. lower end-point)  $s_u = 0$  lub  $s_u = -\infty$  oraz następujące możliwe ogony rozkładów (Resnik, 1987):

typu 1 jeżeli  $z \rightarrow s_u = 0$  lub  $s_u = -\infty$

$$F_u(z + va(z)) \sim F_u(z)e^v, \quad \forall v \in R, \xi \equiv 0,$$

typu 2 jeżeli  $z \rightarrow s_u = -\infty$

$$F_u(vz) \sim v^{1/\xi} F_u(z), \quad \forall v > 0, \xi > 0,$$

typu 3 jeżeli  $z \rightarrow s_u = 0$

$$F_u(vz) \sim v^{1/\xi} F_u(z), \quad \forall v > 0, \xi < 0$$

gdzie  $a(z) = \int_{s_u}^z F_u(v) dv / F_u(z)$ , dla  $z > s_u$ .

<sup>\*</sup> Ostatnie sformułowanie odpowiada klasycznej teorii.

Liczba  $\xi$  jest nazywana indeksem ogona (ang. extreme value index), natomiast  $F_u$  z ogonem typu 1-3 należy do rodziny minimum przyciągania w dziedzinie ( $a(z) \sim b(z)$ ), co zapisujemy następująco:  $a(z)/b(z) \rightarrow 1$  granica wyznaczana jest po  $z$ ).

**Warunek 1.** Dla modelu zapisanego jako 1.1 istnieje odwzorowanie, linia pomocnicza (auxiliary line)  $x \mapsto x'\beta_r$  taka, że:

$$U = Y - X'\beta_r \text{ wraz z } s_U = 0 \text{ lub } s_U = -\infty \quad (2.1)$$

dla pewnych  $F_u$  typu 1, 2 lub 3 w ogonach:

$$F_U(z|x) \sim K(x) F_u(z) \quad (2.2)$$

$K(\cdot) > 0$  jest ciąglą ograniczoną funkcją na  $\mathbf{X}$ . Bez straty ogólności można przyjąć, że  $K(x) = 1$ ,  $x = \mu_X$  oraz  $F_u(z) = F_U(z|x)$ .

**Warunek 2.** Dystrybuanta rozkładu  $X = (1, X'_{-1})$  jest wektorem zmiennych objaśniających o wymiarach  $d \times 1$ ,  $F_X$  ma zwartą dziedzinę  $\mathbf{X}$  oraz  $EXX'$  określone dodatnio. Bez straty ogólności można przyjąć, że  $\mu_X = EX = (1, 0, \dots, 0)'$ .

Jeżeli  $Y$  ma skończoną dolną wartość, czyli  $X\beta(0) > -\infty$ , wówczas, co wynika z warunku 1,  $\beta_r \equiv \beta(0)$ , zatem  $U = Y - X'\beta(0) \geq 0$  ma najmniejszą wartość wynoszącą 0, co wynika z przyjętej konstrukcji. W przypadku nieograniczonym  $X\beta(0) = -\infty$  nie wskażemy rozwiązania i nie dopasujemy pomocniczej linii.

Zapisany warunek 1 jest założeniem podstawowym. Po pierwsze, warunek 1 wymaga od ogonów zmiennej  $U = Y - X'\beta_r$ , dla pewnych  $\beta_r$ , aby były w minimum przyciągania w dziedzinie, która jest nieparametryczną klasą rozkładów (Resnick, 1987; Embrechts, Kliippelberg, Mikosch, 1997). W tym sensie specyfikacja warunku 1 jest semiparametryczna. Przykłady 2.1 oraz 2.2 prezentują pewne modele regresji spełniające warunek 1. Po drugie, warunek 1 wymaga, aby dla dowolnych  $x', x'' \in \mathbf{X}$ ,  $z \rightarrow F_U(z|x')$  oraz  $z \rightarrow F_U(z|x'')$  miały ogony równoważne co do stałej. Ten warunek jest uzasadniony poprzez domknięcie dziedziny do minimum ważności z minimum przyciągania w dziedzinie przy równoważności ogonów – własność 1.19 w Resnick (1987).

Własność zawartości zbioru  $X$  w warunku 1 jest konieczna, co wynika z teorii granic dla regresji kwantylowej; granica (w szczególnych przypadkach) może ogólnie się zmienić. W zastosowaniach zwartość może być narzucona przez obcięte explicite obserwacje zależne od tego, czy  $X_i \in \mathbf{X}$ . W tym przy-

padku liniowy model (1.1) z założenia może być zastosowany tylko do wartości  $X$  w  $\mathbf{X}$ . Zasadniczo, im mniejszy zbiór  $X$ , tym mniej restrykcyjny jest liniowy model (Chaudhuri, 1991). Również obcięcie  $X$  do  $\mathbf{X}$  eliminuje wpływ odstających wartości na graniczną dystrybuantę, a wnioskowanie przebiega jak w przypadku centralnej regresji kwantylowej.

Poniższe twierdzenie wskazuje (Chernozhukov, 2005), jaką reprezentację może mieć  $K(x)$  określone w warunku 1.

**Twierdzenie 1.** Przy spełnieniu warunku 1 i 2 dla pewnego  $c \in R^d$ :

$$K(x) = \begin{cases} e^{-x'c}, & \text{dla } F_U, \text{ typu 1, } \xi = 0 \\ (x'c)^{1/\xi}, & \text{dla } F_U, \text{ typu 2, } \xi > 0 \\ (x'c)^{1/\xi}, & \text{dla } F_U, \text{ typu 3, } \xi < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

gdzie  $\mu'_x c = 1$  dla ogonów typu 2 i 3,  $\mu'_x c = 0$  dla typu 1 oraz  $x'c > 0$  dla wszystkich  $x \in \mathbf{X}$  dla ogonów typu 2 i 3.

### Przykład 2.1

Rozważmy model regresji ze zmienną przesunięcia:

$$Y = X'\beta + U \quad (2.4)$$

gdzie  $U$  jest niezależne od  $X$ , oraz rozpatrzmy przypadek taki, że  $U$  jest w minimum przyciągania w dziedzinie. Jeżeli dolna wartość dziedziny  $U$  jest skończona, to jest unormowana do zera. Jest to szczególny przypadek z warunku 1, gdzie  $X'\beta_r \equiv X'\beta \equiv Y - X'\beta$ ,  $K(X) = 1$  p.w. Przedstawiony proces generujący dane (2.4) był wielokrotnie wykorzystywany w pracach związanych z regresją (Huber, 1973; Rao, 1965). Różne standardowe modele przeżycia czy dożycia również wykorzystują model 2.4 po transformacji danych, przykładowo model Coxa z rozkładem hazardu Weibulla. Również wiele teoretycznych prac wykorzystuje równanie 2.4. Ważne jest, że model ten jest zgodny z warunkiem 1.

### Przykład 2.2

Rozważmy model regresji ze zmienną skali i przesunięcia:

$$Y = X'\beta + X'\sigma \cdot V, \quad V \text{ jest niezależne od } X \quad (2.5)$$

gdzie  $X'\sigma > 0$  (p.w.) jest funkcją skali, natomiast  $V$  jest w minimum przyciągania w dziedzinie z  $\xi \neq 0$ . Wówczas równanie 2.5 implikuje następującą liniową funkcję warunkowych kwantyli:

$$F_Y^{-1}(\tau|x) = X'\beta + X'\sigma \cdot F_V^{-1}(\tau) \quad (2.6)$$

Wówczas dla  $X'\beta_r \equiv X'\beta$ ,  $U \equiv Y - X'\beta_r = X'\sigma \cdot V$ , gdzie  $P(X'\sigma \cdot V \leq z | X) \sim (X'\sigma)^{1/\xi} \cdot F_V(z)$ , jeżeli  $z \rightarrow 0$  lub  $-\infty$ , zatem warunek 1 jest spełniony dla  $F_U \equiv F_V$  oraz  $K(X) = (X'\sigma)^{1/\xi}$ .

Proces generujący dane 2.5 wykorzystano w pracach Koneker, Basset (1982), Gutenbrunner, Jureckowa (1992), He (1997).

### Przykład 2.3

Rozważmy model regresji kwantylowej ze zmienną przesunięcia:

Zauważyliśmy, że warunek 1 spełniają ogólne modele stochastyczne zapisane równaniami 2.4 i 2.5. Dodajmy, że z warunku 1 wynika, iż  $F_U(u | X) = F_V(u | X)$  są niezależne jedynie w ogonach. W obydwu przypadkach ta słaba niezależność określa wymagania co do  $X$ , przykładowo negatywny wpływ na najwyższe i najniższe kwantyle, ale dodatni wpływ na kwantyle blisko mediany. I odwrotnie, zauważmy, że z równania 2.6 oraz 2.4 i 2.5 wynika ten specyficzny wniosek w odniesieniu do kwantyli. Zatem warunek 1 uzasadnia własność heterogeniczności modelu 1.1, pozwalając na wnioskowanie o wektorze kowariancji ekstremalnych kwantyli, który jest odmienny od wektora kowariancji środkowych kwantyli.

## 3. Asymptotyczność porządku ekstremalnego kwantylowej regresji

Rozpatrzmy ciąg  $\tau_i, i = 1, \dots, l$ , taki, że  $\tau_i T \rightarrow k_i > 0$ , jeżeli  $T \rightarrow \infty$ , oraz odpowiednią znormalizowaną statystykę regresji kwantylowej  $\hat{Z}_T(k_i)$  jako:

$$\hat{Z}_T(k) \equiv a_T(\hat{\beta}(\tau) - \beta_r - b_T e_1) \quad (3.1)$$

gdzie  $\hat{\beta}(\tau)$  jest regresją kwantylową,  $\beta_r$  – współczynnikiem linii pomocniczej zdefiniowanej w (2.2),  $e_1 = (1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^d$ , a  $(a_T, b_T)$  są normalizowanymi kanonicznymi stałymi określonymi następująco dla ogona:

$$\begin{array}{ll} \text{typu 1} & a_T = 1/a \left[ F_u^{-1} \left( \frac{1}{T} \right) \right], \quad b_T = F_u^{-1} \left( \frac{1}{T} \right) \\ \text{typu 2} & a_T = -1 / F_u^{-1} \left( \frac{1}{T} \right), \quad b_T = 0 \end{array} \quad (3.2)$$

typu 3 
$$a_T = 1 / F_u^{-1}\left(\frac{1}{T}\right), \quad b_T = 0$$

gdzie  $F_u$  jest zdefiniowane w warunku 1. Dodatkowo rozważmy scentrowaną statystykę:

$$\hat{Z}_T^c(k) \equiv a_T(\hat{\beta}(\tau) - \beta(\tau)) \tag{3.3}$$

oraz proces punktowy dla  $U_i = Y_i - X_i' \beta$ , jako proces Poissona.

**Twierdzenie 2 (ekstremalny porządek kwantylowej regresji\*)**

Zakładamy spełnienie warunku W1 i W2, dodatkowo  $\{Y_i, X_i\}$  są niezależne i o takim samym rozkładzie. Wówczas, jeżeli  $\tau T \rightarrow k > 0$  oraz  $T \rightarrow \infty$ :

$$\hat{Z}_T^c(k) \xrightarrow{d} Z_\infty(k) \equiv \arg \min_{z \in Z} \left[ -k \mu_X' z + \int (x'z - u)^+ dN(u, x) \right] \tag{3.4}$$

gdzie  $Z_\infty(k)$  jest wyznaczone jednoznacznie dla wektorów należących do  $Z$ , gdzie  $(x'z - u)^+ = \mathbf{1}(u \leq x'z) (x'z - u)$ ,  $Z = \mathbb{R}^d$  dla ogonów typu 1 oraz 3, natomiast  $Z = \{z \in \mathbb{R}^d: \max_{x \in X} z'x \leq 0\}$  dla ogonów typu 2. Dodatkowo:

$$\hat{Z}_T^c(k) \xrightarrow{d} Z_\infty^c(k) \equiv Z_\infty(k) - \eta(k) \tag{3.5}$$

gdzie 
$$\eta(k) = \begin{cases} c + \ln ke_1, & \text{typu 1} \\ -k^{-\xi} c, & \text{typu 2} \\ k^{-\xi} c, & \text{typu 3} \end{cases}$$

W przypadku  $\tau T \rightarrow 0$  estymator otrzymywany poprzez rozwiązanie zadania programowania liniowego był w przypadku modelu regresji ze zmienną przesunięcia (przykład 2.1) rozwiązaniem zadania:

$$\max_{\beta \in \mathbb{R}^d} \bar{X}' \beta \quad \text{takie, że} \quad Y_i \geq X_i' \beta,$$

dla wszystkich  $t \leq T$ , gdzie  $\bar{X} = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t$ .

---

\* Chernozhukov (2005).

#### 4. Asymptotyczność porządku centralnego kwantylowej regresji

Aby zapisać asymptotyczny wynik dla środkowych regresji kwantylowych, zapiszemy dodatkowy warunek. Po pierwsze jest wymagane istnienie kwantylowej funkcji gęstości  $\partial F_U^{-1}(\tau|x)/\partial\tau \equiv x'\partial\beta(\tau)/\partial\tau$  oraz jej regularność. Po drugie równoważność warunkowego rozkładu, zakładanego w warunku 1, musi być wzmocniona równoważnością w ogonie warunkowego rozkładu kwantylowej funkcji gęstości.

**Warunek 3.** Dodatkowo do założeń W1 i W2, dla  $\xi$  zdefiniowanego jako indeks ogona\*, zachodzi:

- a)  $\frac{\partial F_U^{-1}(\tau|x)}{\partial\tau} \sim \frac{\partial F_U^{-1}(\tau|K(x))}{\partial\tau} \quad \text{w } x \in X,$
- b)  $\frac{\partial F_u^{-1}(\tau)}{\partial\tau}$  jest regularna w 0 z wykładnikiem  $-\xi-1$ .

Następujące twierdzenie określa słabą zbieżność  $\hat{Z}_T$  oraz wszystkich  $\hat{Z}_T(l)$ . Ponieważ  $\tau \rightarrow 0$ , granica zależy jedynie od  $\xi$  oraz  $c$ , tak jak w twierdzeniu poprzednim, ale ponieważ  $\tau T \rightarrow \infty$ , granica ma rozkład normalny.

#### Twierdzenie 3 (ekstremalny porządek kwantylowej regresji\*\*)

Zakładamy spełnienie warunków 1-3 oraz  $\{Y_t, X_t\}$  są niezależne i o takim samym rozkładzie. Wówczas, jeżeli  $\tau T \rightarrow \infty$  oraz  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\hat{Z}_T \rightarrow Z_\infty \stackrel{d}{=} N(0, \Omega_0), \quad \Omega_0 = Q_H^{-1} Q_X Q_H^{-1} \frac{\xi^2}{(m^{-\xi} - 1)^2}$$

gdzie dla  $\xi = 0$  interpretujemy wielkość  $\xi^2/(m^{-\xi} - 1)^2$  jako  $(\ln m)^{-2}$  oraz:

$$Q_H \equiv E[H(X)]^{-1} X X', \quad Q_X \equiv E X X'$$

$$H(x) \equiv x'c, \quad \text{dla ogonów typu 2 i 3}$$

$$H(x) \equiv 1, \quad \text{dla ogonów typu 1.}$$

\* Por. punkt 3.

\*\* Chernozhukov (2005).

Ostatecznie  $a_T(l)$  może być zastąpione przez:

$$\sqrt{dT} / \bar{X}'(\hat{\beta}(ml\tau) - \hat{\beta}(m\tau))$$

zatem:

$$a_T(l) / \frac{\sqrt{dT}}{\bar{X}'(\hat{\beta}(ml\tau) - \hat{\beta}(m\tau))} \xrightarrow{p} 1, \text{ gdzie } \bar{X} = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t.$$

## Podsumowanie

W pracy omówiono teorię regresji kwantylowej w ogonach rozkładów. W szczególności przedstawiono ekstremalne własności dla dużej próby (ekstremalny porządek oraz centralny porządek) estymatorów regresji kwantylowej dla modelu liniowego regresji kwantylowej z obciętym ogonem rozkładu do istotnego minimum rozważanej dziedziny i domknięte pod warunkiem ekwiwalentności ogona względem wartości regresorów.

## Literatura

- Abrevaya J. (2001): The Effects of Demographics and Maternal Behavior on the Distribution of Birth Outcomes. „Empirical Economics”, 26, s. 247-257.
- Chamberlaing G. (1994): Quantile Regression, Censoring, and the Structure of Wages. W: Advances in Econometrics: Sixth World Congress Red. C. Sims. Cambridge University Press.
- Chaudhuri P. (1991): Nonparametric Estimates of Regression Quantiles and Their Local Bahadur Representation. „Ann. Statist.”, 19, s. 760-777.
- Chernozhukov V. (1998): Nonparametric Extreme Regression Quantiles. Working Paper. Presented at Princeton Econometrics Seminar, Stanford University, December 1998.
- Chernozhukov V. (2005): Extremal Quantile Regression. „The Annals Of Statistics”, Vol. 33, No. 2, s. 806-839.
- Chernozhukov V., (1999): Conditional Extremes and Near-Extremes: Estimation, Inference, and Economic Applications. Ph.D. Dissertation, Dept. Economics, Stanford University, available at: [www.Mit.Edu/Tvchern](http://www.Mit.Edu/Tvchern).
- Chernozhukov V., Umantsev L. (2001): Conditional Value-At-Risk: Aspects of Modeling and Estimation. „Empirical Economics”, 26, s. 271-292.
- Donald S.G., Paarsch H.J. (1993): Piecewise Pseudo-maximum Likelihood Estimation in Empirical Models of Auctions. „Internat. Econom. Rev.”, 34, s. 121-148.

- Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. (1997): *Modelling Extremal Events*. Springer, Berlin.
- Gutenbrunner C., Jureckova J. (1992): Regression Rank Scores and Regression Quantiles. „Ann. Statist.”, 20, s. 305-330.
- He X. (1997): Quantile Curves without Crossing. „Amer Statist.”, 51, s. 186-192.
- Huber P.J. (1973): Robust Regression: Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo. „Ann. Statist.”, 1, s. 799-821.
- Koenker R., Bassett, G.S. (1978): Regression Quantiles. „Econometrica”, 46, s. 33-50.
- Koenker R., Bassett G.S. (1982): Robust Tests for Heteroscedasticity Based on Regression Quantiles. „Econometrica”, 50, s. 43-61.
- Laplace P.-S. (1818): *Theorie Analytique Des Probabilitis*. Editions Jacquesgabay (1995), Paris.
- Rao C.R. (1965): *Linear Statistical Inference and Its Applications*. Wiley, New York.
- Resnick S.I. (1987): *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer, New York.
- Tsay R.S. (2002): *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, New York.

## EXTREMAL QUANTILE REGRESSION'

### Summary

Quantile regression is an important tool for estimation of conditional quantiles of a response  $Y$  given a vector of covariates  $X$ . It can be used to measure the effect of covariates not only in the center of a distribution, but also in the upper and lower tails. This paper describe a theory of quantile regression in the tails. Specifically, it obtains the large sample properties of extremal (extreme order and intermediate order) quantile regression estimators for the linear quantile regression model with the tails restricted to the domain of minimum attraction and closed under tail equivalence across regressor values.

**Grażyna Trzpiot**

## **O WŁASNOŚCIACH TRANSFORMUJĄCYCH MIAR RYZYKA**

---

### **Wprowadzenie**

W ostatnich latach miara Value at Risk ( $VaR_\alpha$ ) była wybierana w instytucjach do pomiaru ryzyka jako miara ryzyka rynkowego. Podstawową zaletą  $VaR_\alpha$ , w porównaniu z innymi miarami ryzyka jest fakt, że kiedy zastosuje się tę miarę do dowolnego instrumentu finansowego, otrzymuje się ocenę ryzyka wyrażoną jako strata w jednostkach pieniężnych. Dodatkowo  $VaR_\alpha$  jest stosunkowo prosta w zastosowaniu w ocenie różnych ryzyk na różnych rynkach. Pomimo tej uniwersalności wielu autorów wymienia słabości tej miary jako miary ryzyka, ponieważ nie posiada własności subaddytywności lub wypukłości, dodatkowo jest trudna do wykorzystania w zadaniach optymalizacyjnych, ponieważ może mieć kilka lokalnych wartości minimalnych (Basak, Shapiro, 2001).

Artzner, Delbaen i Eber (1997) sformułowali pytanie: jakie własności powinna posiadać miara ryzyka dla różnych ryzyk w skończonej wymiarowej przestrzeni probabilistycznej? Autorzy zaproponowali zbiór własności dla miary ryzyka tak, aby była koherentną miarą ryzyka: subaddytywność, translację inwariantną, dodatnią homogeniczność i monotoniczność. Ich praca została rozszerzona do ogólnej przestrzeni probabilistycznej przez Delbaena (2002). Wraz z koncepcją koherentnych miar ryzyka oraz ich własności pojawiły się różne zbiory miar, każde z innymi własnościami: miar wypukłych (Föllmer, Shied, 2002; Frittelli, Rosazza, 2002), miar spektralnych (Acerbi, 2002) lub miar odchyleń (Rockafellar, Uryasev, Zabarankin, 2006).

Aksjomaty charakteryzujące miary ryzyka podzielono na trzy grupy: racjonalne, addytywne oraz o charakterze tylko technicznym. Autorzy zdefiniowali swoje miary ryzyka jako funkcjonal zależny od ekonomicznych własności modelu, takich jak oczekiwana użyteczność lub transformowana użyteczność (Denuit i in., 2006). Goovaerts i inni (2003b) uzyskali wiele miar ryzyka poprzez wyznaczenie minimum ograniczenia Markowa przyjętego dla ogona rozkładu.

Poniżej omówiono miary ryzyka, które nie spełniają wszystkich własności wymaganych, aby uniknąć niewłaściwych decyzji. Zapisano, czym jest zupełność, którą powinny mieć wszystkie miary ryzyka. Następnie w zależności od przyjętej miary ryzyka pokazano dodatkowe zbiory własności definiujące miary wyczerpujące oraz adaptacyjne.

## 1. Własności miar ryzyka

Przestrzeń prób zapiszemy jako  $\Omega$ , następnie jako  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  zapiszemy zmienną losową opisującą straty lub zyski (ryzyko) powiązane z pewną inwestycją, w pewnym ustalonym okresie inwestycji w czasie  $[0, T]$ . Rozważymy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathbf{P})$  oraz zbiór wszystkich ryzyk zapiszemy jako  $\mathbf{X}$ . Jest to zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych na  $\Omega$ . Miare ryzyka definiujemy następująco:

**Definicja 1.1.** Miarą ryzyka jest funkcja  $\rho: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{R}$ .

Jeżeli wartość  $\rho(X)$  związana z miarą  $\rho$  do ryzyka  $X$  jest dodatnia, może być interpretowana jako minimalna kwota pieniężna, jaką agent musi dodać do pozycji  $X$ , poprzez inwestycje o stopie wolnej od ryzyka. Przeciwnie, jeżeli  $\rho(X)$  jest ujemne, wówczas wielkość  $-\rho(X)$  może być usunięta, bez ryzyka, z bieżącej pozycji.

$VaR_\alpha$  może być zdefiniowane następująco (dla wartości rynkowej inwestycji i może być zapisane w bardziej ogólnym kontekście) (Duffie, Pan, 1997):

Dla ustalonego horyzontu czasowego  $T$  oraz ustalonego poziomu ufności  $\alpha \times 100\%$ ,  $VaR_\alpha$  jest poziomem strat na rynku, które mogą być przekroczone z prawdopodobieństwem nie większym niż  $1 - \alpha$ .

$VaR_\alpha$  zazwyczaj odpowiada na pytanie: Jaka jest minimalna strata pojawiająca się w  $(1 - \alpha) \times 100\%$  najgorszych przypadkach stopy zwrotu w portfelu? Przy takiej interpretacji tej miary widać, że  $VaR_\alpha$  jest  $\alpha$ -kwantylem rozkładu strat.

**Definicja 1.2.** Dla ryzyka  $X$  w ustalonym okresie  $[0, T]$  oraz przy ustalonym  $0 < \alpha < 1$ , Value at Risk jest zdefiniowana jako:

$$VaR_\alpha(X) = \sup\{x \in \mathbf{R} \mid \mathbf{P}(X \geq x) > 1 - \alpha\}.$$

Jedną z największych zalet  $Var_\alpha$  jest fakt, że niezależnie od instrumentu finansowego, do którego stosuje się tę miarę, wynik jest wyrażony stratą pieniężną. Dodatkowo dość łatwo wyznaczyć wartości tej miary dla różnych ryzyk, ale pomimo uniwersalności nie mamy zachowanych wielu własności. Poniżej zapisać zbiór własności, które powinny spełniać koherentne miary ryzyka.

**Definicja 1.3.** Miara ryzyka  $\rho$  jest nazywana koherentną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące aksjomaty (Artzner i in., 1997; Trzpiot, 2004a, 2006, 2008):

1. Subaddytywność:

$$\text{dla dowolnych } X, Y \in \mathbf{X}, \text{ wówczas } \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

2. Dodatnia homogeniczność:

$$\text{dla dowolnych } X \in \mathbf{X} \text{ oraz } \lambda \geq 0, \text{ wówczas } \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X).$$

3. Translacja inwariantna:

$$\text{dla ustalonego } X \in \mathbf{X} \text{ oraz dowolnych } a \in \mathbf{R}, \text{ wówczas}$$

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a.$$

4. Monotoniczność:

$$\text{dla } X, Y \in \mathbf{X} \text{ takich, że } X \leq Y, \text{ wówczas } \rho(X) \leq \rho(Y).$$

Miary posiadające te własności są opisywane poprzez rozpatrywane scenariusze. Wybór miary ryzyka zaczyna być traktowany równoważnie z wyborem zbioru uogólnionych scenariuszy (Song, Yan, 2006). Dla rozkładu strat alternatywną miarą do  $Var_\alpha$  jest Conditional Value at Risk ( $CVaR_\alpha$ ), zapisywana również jako Conditional Tail Expectation ( $CTE$ ).  $CVaR_\alpha$  odpowiada na pytanie: Jaka jest oczekiwana strata pojawiająca się w  $(1 - \alpha) \times 100\%$  najgorszych przypadków przy zamknięciu pozycji?

**Definicja 1.4.** Dla ryzyka  $X$  na  $(\Omega, \mathbf{P})$  oraz dla poziomu ufności  $0 < \alpha < 1$ ,  $CVaR_\alpha$  definiujemy jako (Artzner i in., 1997):

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_t(X) dt.$$

Z definicji wynika, że dla dowolnych ryzyk  $X$   $CVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$ . Własności  $CVaR_\alpha$  są korzystniejsze niż  $Var_\alpha$ : zachodzi subaddytywność oraz jest to miara wypukła, zatem jest to miara koherentna.

W badaniach podjęto (Föllmer, Shied, 2002) temat zmian poziomu ryzyka rynkowego. Zauważono, że ryzyko rośnie nieliniowo wraz z rosnącą wartością pozycji rynkowej. Przykładowo możliwe jest, że ryzyko płynności pojawia się wraz ze wzrostem wartości pozycji: w sytuacji gdy wartość pozycji rośnie kilkukrotnie (pomnożenie przez odpowiednio duży współczynnik). Następuje zmiana warunku dodatniej homogeniczności oraz subaddytywności na wypukłość (Frittelli, Rosazza, 2002).

**Definicja 1.5.** Miara ryzyka  $\rho$  jest nazwana wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy (Föllmer, Shied, 2002):

$$\rho[\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y),$$

dla dowolnych ryzyk  $X$  na  $(\Omega, \mathcal{P})$  oraz wagi  $\lambda \in [0, 1]$ .

Wypukłość implikuje, że dywersyfikacja nie podnosi ryzyka, ponieważ wartość ryzyka zdywersyfikowanego portfela  $\lambda X + (1 - \lambda)Y$  jest mniejsza lub równa przeważonej średniej indywidualnych wartości ryzyka. Koherentne miary ryzyka, wypukłe miary ryzyka mogą mieć reprezentacje w postaci scenariuszy.

## 2. Transformujące miary ryzyka

Rozpatrzmy zbiór funkcji  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  zdefiniowanych na  $\sigma$ -algebrze  $\mathcal{F}$  takich, że  $\mu(\emptyset) = 0$  oraz  $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ , dla  $A, B \in \mathcal{F}$ . Jeżeli  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ , dla wszystkich  $A, B \in \mathcal{F}$ , wówczas funkcję  $\mu$  nazywamy subaddytywną.

**Definicja 2.1\***. Transformująca funkcja  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  jest funkcją niemalejącą oraz taką, że  $g(0) = 0$  oraz  $g(1) = 1$ . Dualna transformująca funkcja dla  $g$  jest definiowana jako:

$$\tilde{g}(u) = 1 - g(1 - u), u \in [0, 1]. \quad (1)$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek  $\mu(A) = g[P(X \in A)] := P^*(A)$ , gdzie  $g$  jest funkcją transformującą,  $P$  – miarą probabilistyczną na  $\sigma$ -algebrze zbiorów Borelowskich  $\mathcal{B}$  oraz  $X$  – zmienną losową. Tak określona funkcja

\* Trzpiot (2004a, 2006a, 2006b).

$\mu$  jest funkcją transformującą prawdopodobieństwo  $P^*$ . Zauważmy, że  $P^*$  nie jest rzeczywistą miarą probabilistyczną, jest zazwyczaj nazywana transformowanym prawdopodobieństwem. Analogicznie rozpatrzmy funkcję dualną  $\tilde{\mu}(A) = \tilde{g}[P(X \in A)] := \tilde{P}^*(A)$ .

Przestudiujemy miary ryzyka dla instrumentów finansowych oraz aktuarialnych zdefiniowanych jako całka Choqueta dla zmiennej losowej portfela zysków oraz strat:

$$\rho_g(X) = \int X dP^* = \int X^+ dP^* - \int X^- d\tilde{P}^*,$$

jeżeli wszystkie całki są zbieżne (Denneberg, 1994). Rozpatrzmy specjalne przypadki transformujących prawdopodobieństwo miar ryzyka. Można pokazać, że całka Choqueta dla zmiennej losowej  $X$ , z funkcją transformującą zapisaną odpowiednio jako  $g$ , jest równoważna\* wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $X$  względem transformującego rozkładu  $P^*$  (z odpowiednią dystrybuantą rozkładu  $F^*$  oraz funkcją przeżycia  $S^* = 1 - F^*$ \*\*):

$$\begin{aligned} E_{P^*}(X) &= \int_0^{\infty} S^*(x) dx - \int_0^{\infty} F^*(-x) dx = \int_0^{\infty} g[S(x)] dx - \int_0^{\infty} \tilde{g}[F(-x)] dx = \\ &= \int_0^{\infty} g[S(x)] dx - \int_0^{\infty} \{1 - g[S(-x)]\} dx = \rho_g(X). \end{aligned} \quad (2)$$

Taka transformująca miara ryzyka jest wówczas wartością oczekiwaną nowej zmiennej losowej, dla której prawdopodobieństwa są przeważone (na nowo określone). Z konstrukcji tych miar wynika, że transformujące miary ryzyka spełniają kilka własności z definicji 1.3.

Z własności całki Choqueta oraz niezależnego wyboru funkcji transformującej wynika, że miara spełnia własność translacji inwariantnej oraz jest dodatnio homogeniczna, monotoniczna oraz co-monotoniczno-addytywna. Dodatkowo można pokazać, że dla dodatnich strat transformująca miara ryzyka jest koherentna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukła (Wirch, Hardy, 2001). Ostatecznie można pokazać, że jeżeli  $g$  jest wypukła, w rezultacie transformacji miara ryzyka jest spektralna (Gzyl, Mayoral, 2008). W zależności od wyboru funkcji transformującej otrzymujemy różne miary ryzyka. Specjalnymi przypadkami są  $VaR_\alpha$ ,  $CVaR_\alpha$  oraz miara Wang'a –  $WT$  (Wang, 2000; Trzpiot, 2004a).

---

\* Odwrotna dystrybuanta.

\*\* Wang (1996).

$VaR_\alpha$  jako miara ryzyka wykorzystuje jedynie informację o częstotliwości strat, nie ich wartości (wysokości, a zatem dotkliwości poniesionych strat). Przykładowo podwojenie maksymalnych strat nie ma wpływu na wartość  $VaR_\alpha$ . Rozważając kolejne własności, zapisujemy  $VaR_\alpha$  jako całkę Choqueta z odpowiednią funkcją transformującą prawdopodobieństwo. Wykorzystamy funkcję transformującą:

$$g(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < 1 - \alpha \\ 1, & 1 - \alpha < u \leq 1 \end{cases}, \quad (3)$$

wówczas  $VaR_\alpha$  możemy zapisać równoważnie jako:

$$VaR_\alpha = \int_0^\infty g[S_{X^+}(x)]dx - \int_0^\infty g[S_{X^-}(x)]dx = \int_0^{x_\alpha} dx = x_\alpha,$$

gdzie  $x_\alpha$  jest  $\alpha$ -kwantylem rozkładu zmiennej losowej  $X$ .

Funkcja transformująca  $g$  dla  $VaR_\alpha$  jest niemalejąca, oraz  $g(0) = 0$  i  $g(1) = 1$ , jest odcinkami stała, ale nie jest wypukła. Zatem miara ryzyka powiązana z tą funkcją transformującą nie jest koherentna.

Dla porównania, miara ryzyka  $CVaR_\alpha$  wykorzystuje zarówno częstotliwość (prawdopodobieństwo), jak i oczekiwane wartości strat przekraczających wartość  $VaR_\alpha$ . Ta miara może również być zapisana jako całka Choqueta w odniesieniu do funkcji transformującej:

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u}{1 - \alpha}, & 0 \leq u < 1 - \alpha \\ 1, & 1 - \alpha < u \leq 1 \end{cases}. \quad (4)$$

Zapisana postać  $g$  stanowi, że jest to niemalejąca funkcja transformująca, która jest ciągła oraz wypukła, ale nie jest różniczkowalna. Ponieważ  $g$  jest wypukła,  $CVaR_\alpha$  jest miarą spektralną oraz koherentną.

### 3. Zupełnie transformujące miary ryzyka

Jeden z problemów pojawiający się przy stosowaniu  $CVaR_\alpha$  jest taki, że wykorzystujemy jedynie wybrane wartości przekroczenia strat wyznaczonych przez  $VaR_\alpha$ , pomijając wartości mniejszych strat, mniejszych niż  $\alpha$ -kwantyl. W pewnych przypadkach może to leżeć u podstaw błędnych decyzji, co pokazemy na przykładzie. Miara ta jest nieodporna na ekstremalne straty.

**Przykład 3.1.** Rozważmy dwa portfele A oraz B z rozkładami strat  $P_A$  oraz  $P_B$  zapisanymi w tabeli 1.

Tabela 1

Rzeczywiste oraz  $CVaR_\alpha$  transformowane rozkłady strat portfeli A i B

| Strata | $P_A(x)$ | $P_A^*(x)$ | $P_B(x)$ | $P_B^*(x)$ |
|--------|----------|------------|----------|------------|
| 0      | 0,6      | 0          | –        | –          |
| 9      | –        | –          | 0,6      | 0          |
| 10     | 0,4      | 1          | 0,4      | 1          |

W tabeli 1 zapisano transformowane rozkłady strat  $P_A^*$  oraz  $P_B^*$  z wykorzystaniem funkcji  $g$  zapisanej równaniem (4) dla  $\alpha = 0,95$ . Zauważmy, że oczekiwana wartość poziomu przekroczeń strat jest taka sama dla obydwu porównywanych portfeli. Wykorzystując równanie (2), zauważamy, że analogicznie  $CVaR_{0,95} = 10$  dla obydwu portfeli. Straty są dodatnie w portfelu B, faktycznie portfel B dominuje stochastycznie portfel A. Zatem miara ryzyka powinna wskazać, że portfel B jest bardziej ryzykowny.

Funkcja transformująca dla  $CVaR_\alpha$  przypisuje wartość zero do wszystkich kwantyli poniżej poziomu istotności  $\alpha$ . Ta obserwacja pozwala na wprowadzenie zmian w założeniach funkcji transformującej  $g$  tak, żeby była dodatnia (nierówność ostra). W następnym przykładzie wykorzystujemy definicję funkcji transformującej, która przyjmuje wartość zero w rzeczywistym rozkładzie,  $g(0) = 0$  (miara ryzyka dalej charakteryzuje się niezgodnością).

**Przykład 3.2.** Rozpatrzmy następującą funkcję transformującą:

$$g_1(u) = \begin{cases} 50u, & 0 \leq u < 0,01 \\ 0,5u, & 0,01 \leq u < 0,5 \\ u, & 0,5 < u \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

Jest to funkcja ciągła, nieróżniczkowalna w  $u = 0,01$  i  $u = 0,5$  oraz stała w przedziale  $[0,01; 0,5]$ . Rozpatrzmy ponownie dwa portfele, z takim samym poziomem maksymalnych strat wynoszącym 11, ale różnym poziomem średkowych strat – dla portfela A wynosi 1 oraz dla portfela B przyjmuje wartość 10 (tabela 2).

Tabela 2

Rzeczywiste oraz  $g_1$  transformowane rozkłady strat portfeli A i B

| Strata | $P_A(x)$ | $P_A^*(x)$ | $P_B(x)$ | $P_B^*(x)$ |
|--------|----------|------------|----------|------------|
| 0      | 0,6      | 0,5        | 0,6      | 0,5        |
| 1      | –        | –          | 0,39     | 0          |
| 10     | 0,375    | 0          | –        | –          |
| 11     | 0,025    | 0,5        | 0,01     | 0,5        |

Transformująca miara ryzyka generowana przez  $g_1$  wynosi 5,5 dla obydwu portfeli. Oczywiście portfel A jest bardziej ryzykowny niż B, ponieważ straty są większe bądź równe 10 z prawdopodobieństwem 0,4. Problem nie leży zatem w różniczkowalności funkcji transformującej, ale wynika ze stałej wartości  $g_1$  w przedziale (Wang, 2002); tracimy jednocześnie informacje z początkowego rozkładu strat. Obliczając transformowane prawdopodobieństwa, zauważamy, że wynoszą zero dla środkowych strat obydwu portfeli, odchodząc od rzeczywistych różnych od siebie prawdopodobieństw dla wartości 1 oraz 10 początkowych rozkładów strat.

Naturalnie pojawia się pytanie, czy różniczkowalność ma największe znaczenie oraz czy problem nie leży w wypukłości funkcji transformującej. Odpowiedź jest negatywna, ponieważ zamieniając  $g_1$  na inną wypukłą funkcję, przykładowo:

$$g_2(u) = \begin{cases} \frac{1}{3}u, & 0 \leq u < \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}u - \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \leq u \leq 1 \end{cases}. \quad (6)$$

Wykorzystując  $g_2$ , uzyskujemy wyższą wartość transformującej miary ryzyka dla portfela A (około 2) niż dla B (około 0,23). Podstawowa różnica jest następująca:  $g_2$  nie ma wartości stałej w przedziale, niezależnie od wypukłości lub wklęsłości, ponieważ wykorzystuje wszystkie informacje początkowego rozkładu strat. Wyjaśnimy to precyzyjniej, wprowadzając koncepcję zupełności.

**Definicja 3.1.** Rozpatrzmy zmienną losową  $X$  oraz transformującą miarę ryzyka  $\rho g$  generowaną przez  $\rho g(X) = EP^*(X)$  zgodnie z równaniem 2. Powiemy, że  $\rho g$  jest zupełną transformującą miarą ryzyka, jeżeli:

$$S(x_1) = S(x_2) \Leftrightarrow S^*(x_1) = S^*(x_2), \forall x_1, x_2 \in [0, \infty), \quad (7)$$

gdzie  $S^*$  jest funkcją przeżycia transformującego rozkładu. Oczywiście powyższą definicję można zapisać równoważnie, wykorzystując rozkłady prawdopodobieństwa  $P$  oraz  $P^*$ .

Można sprawdzić, że zarówno  $VaR_\alpha$ , jak i  $CVaR_\alpha$  nie są zupełnymi miarami ryzyka, ponieważ transformująca funkcja dla  $VaR_\alpha$  jest stała we wszystkich tych dziedzinach i z tego powodu miara  $CVaR_\alpha$  jest stała w przedziale  $[1 - \alpha, \infty)$ . To wyjaśnia, częściowo, problem niespójności pojawiający się przy stosowaniu  $CVaR_\alpha$ .

Przykładem zupełnej transformującej miary ryzyka jest transformacja Wang'a (Wang, 2000), który wybrał parametryczną rodzinę funkcji symetrycznych wokół zera, zatem ta transformacja zachowuje szczególne własności początkowej dystrybuanty. Miara  $WT^*$  jest zdefiniowana następująco:

$$g_\lambda(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) + \lambda], \quad u \in [0, 1], \quad (8)$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu standaryzowanego normalnego. Parametr  $\lambda$  jest nazywany rynkową ceną ryzyka oraz odzwierciedla ryzyko systematyczne.

W przypadku transformujących miar ryzyka warunkiem wystarczającym jest, aby ich odpowiednia funkcja transformująca była ściśle rosnąca. Dla dowolnych transformujących miar ryzyka, dla których funkcja transformująca jest wypukła, ale nie jest ściśle wypukła, nie zabezpieczamy stanowczo porządku ograniczenia strat.

**Twierdzenie 3.1** (Balbás, Garrido, Mayoral, 2008). Jeżeli  $P^*$  będzie transformującym prawdopodobieństwem definiowanym przez transformującą funkcję  $g$  określoną równaniem (2), wówczas następujące warunki są równoważne:

1.  $\rho g$  jest zupełna:  $S(x_1) = S(x_2) \Leftrightarrow S^*(x_1) = S^*(x_2), \forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ .
2.  $G$  jest rosnąca.

Zauważmy, że transformująca funkcja zdefiniowana równaniem (6) jest rosnąca, ale transformująca funkcja generowana przez  $CVaR_\alpha$  (równanie (4)) rosnąca nie jest.

---

\* Wang's Transform.

#### 4. Wyczerpujące transformujące miary ryzyka

Podstawową różnicą w zastosowaniu wypukłych lub wklęsłych funkcji transformujących jest jako rezultat miara ryzyka, która jest superaddytywna lub subaddytywna, odpowiednio. Ponieważ nie jest wystarczające, aby miara ryzyka była subaddytywna (odpowiednio superaddytywna) oraz aby wykorzystywała wszystkie informacje początkowego rozkładu strat, czyli aby była zupełna, więc jesteśmy zainteresowani, aby miara ryzyka była subaddytywna (co jest synonimem koherencyjności w przypadku transformujących miar ryzyka). Zdefiniujemy nowy zbiór wyczerpujących miar ryzyka, które są koherentne oraz zupełne.

**Definicja 4.1.** Rozpatrzmy zmienną losową  $X$  oraz transformującą miarę ryzyka  $\rho g$  generowaną przez  $\rho g(X) = EP^*(X)$  zgodnie z równaniem 2. Powiemy, że  $\rho g$  jest wyczerpującą transformującą miarą ryzyka, jeżeli jest koherentna oraz zupełna.

Z twierdzenia 3.1 wynika, że transformujące miary ryzyka są wyczerpujące, jeżeli ich transformująca funkcja  $g$  jest wypukła oraz ściśle rosnąca.

**Uwaga 4.1.** Rozpatrzmy transformującą miarę ryzyka  $\rho g$  generowaną przez  $g$ . Wówczas  $\rho g$  jest wyczerpująca wtedy i tylko wtedy, gdy  $g$  jest wypukła oraz ściśle rosnąca.

Wniosek z powyższej uwagi jest następujący: warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby scharakteryzować wyczerpujące transformujące miary ryzyka jest, aby  $g$  miało wartość 1 jedynie dla  $x = 1$ .

**Uwaga 4.2.** Rozpatrzmy transformującą miarę ryzyka  $\rho g$  generowaną przez  $g$ . Jest to miara wyczerpująca wtedy i tylko wtedy, gdy  $g$  jest wypukła oraz  $g(x) < 1, \forall x < 1$ .

Ta ostatnia własność nie ma zastosowania do transformujących miar ryzyka generowanych przez wypukłe funkcje  $g$ , czyli dla superaddytywnych oraz zupełnych transformujących miar ryzyka. Przykładowo transformująca funkcja z równania (6) jest taka, że  $g(1^-) < 1$ , ale nie generuje zupełnych transformujących miar ryzyka.

## 5. Adaptacyjne transformujące miary ryzyka

Zdefiniowano zupełne transformujące miary ryzyka, aby zapewnić wykorzystanie informacji z początkowego rozkładu strat. Naturalne jest pytanie: kiedy zupełność jest wystarczająca, aby ominąć typowe przypadki niespójności zilustrowane w przykładzie 3.1? W tym punkcie pokażemy, jak można na nie odpowiedzieć oraz sformułujemy dodatkowe warunki niezbędne do tego, aby określić funkcję transformującą.

**Przykład 5.1.** Rozpatrzmy następującą transformującą funkcję:

$$g_3(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}u, & 0 \leq u < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases} \quad (9)$$

oraz następujące rozkłady strat dla dwóch rozłącznych portfeli (tabela 3).

Tabela 3

Rzeczywiste oraz  $g_3$  transformowane rozkłady strat portfeli A i B

| Strata | $P_A(x)$ | $P_A^*(x)$ | $P_B(x)$ | $P_B^*(x)$ |
|--------|----------|------------|----------|------------|
| 0      | 0,5      | 0,25       | 0,45     | 0,225      |
| 1,8    | –        | –          | 0,35     | 0,475      |
| 2      | 0,375    | 0,5625     | –        | –          |
| 5,9    | –        | –          | 0,2      | 0,3        |
| 8      | 0,125    | 0,1875     | –        | –          |

Zdefiniowana funkcja  $g_3$  jest wypukła oraz spełnia równanie (7), zatem odpowiednia miara ryzyka jest adaptacyjna. Wyznaczamy taką samą wartość miary ryzyka wynoszącą  $21/8 = 2,625$  dla obydwu portfeli, pomimo iż portfel A jest bardziej ryzykowny niż B, z większą maksymalną stratą. Ten rodzaj niespójności nie wynika z braku różniczkowalności funkcji transformującej określonej równaniem (9), ale raczej ze struktury odcinkowo-liniowej. Taki wynik otrzymujemy przy transformacji, która przeważa różne prawdopodobieństwa równoważnie. Wszystkie wartości spełniające zależność:  $0 \leq S_X(x) < 1/2$  w przykładzie 4.1 są przeważone przez współczynnik wynoszący  $3/2$ , zatem wartość początkowa  $S_X(x) = 1/2$  po przeważeniu staje się  $1/2$ , niezależnie od wartości  $S_X(x)$ , tj. od początkowego rozkładu strat oraz od wartości.

Zauważmy, że zarówno  $VaR_\alpha$ , jak i  $CVaR_\alpha$  są również dwoma przykładami odcinkowo-liniowych funkcji transformujących. Dla wypukłych odcinkowo-liniowych funkcji transformujących mamy taką samą niespójność z powodu stałego nachylenia i są one rezultatem stałego współczynnika ważącego. Ponieważ współczynnik nachylenia zadaje nowy rozkład (przeważa) odcinkowo-liniową funkcję, jak w równaniu (9), więc można mierzyć przeważony rozkład dla ogólnej funkcji transformującej  $g$  w punkcie  $x$  (ponieważ  $g'(x)$  jest tangensem stycznej do  $g$  w punkcie  $x$ ). Funkcje transformujące, które prowadzą do koherentnych miar ryzyka, wykorzystują rozkład przeważony przez współczynnik większy niż 1 dla dużych strat, ponieważ przypisujemy im nachylenie, czyli prawdopodobieństwo wyższe niż początkowe. I odwrotnie, małe straty mają mniejsze prawdopodobieństwo niż wyznaczone przez początkowy rozkład. Analogicznie dla wypukłych miar ryzyka prawdziwe jest odwrotne zachowanie: współczynnik ważenia jest mniejszy niż 1 dla dużych strat.

Wypukła transformująca funkcja uwydatnia duże straty, zagęszczając prawy ogon transformowanego rozkładu. Zobaczmy, jak  $CVaR_\alpha$  oraz  $g_1$  przypisują zerowe prawdopodobieństwa (a właściwie transformowane funkcje przeżycia  $g[S_X(x)]$ , które są stałe na przedziale), co oznacza, że nie wykorzystujemy informacji w pewnej części początkowego rozkładu. Następujące twierdzenie łączy ten fragment dyskusji o wartościach współczynnika ważenia z koncepcją wyczerpujących miar ryzyka. Wykorzystuje również ideę różniczkowalności Wanga dla funkcji transformujących.

**Twierdzenie 5.1** (Balbás, Garrido, Mayoral, 2008). *Jeżeli  $g$  będzie wypukłą (wklęsłą) transformującą funkcją taką, że  $g(u) \neq u$  dla dowolnych  $u \in (0, 1)$ , wówczas  $\exists d \in (0, 1)$  takie, że  $g'(u) \geq (\leq) 1$ , dla wszystkich  $u \in [0, d]$  oraz  $g'(u) \leq (\geq) 1$ , dla wszystkich  $u \in [d, 1]$ .*

**Uwaga 5.1.** Ponieważ wymagamy, aby  $g$  była tylko wypukła, wówczas  $d$  w twierdzeniu 5.1 może nie być jedyne. Aby rozwiązanie było jedyne, musimy założyć, że  $g$  była ściśle wypukła.

Twierdzenie 5.1 implikuje następujący wniosek: inwestorzy przeważają przez współczynnik większy niż 1 w przedziale  $(0, d)$ , czyli dla ekstremalnych strat  $\{x \in [0, \infty): S_X(x) < d\}$ . To przekształca ogon rozkładu strat zagęszczając wartości w ogonie rozkładu. Odpowiednio, współczynnik przeważenia jest mniejszy niż 1 dla  $\{x \in [0, \infty): S_X(x) > d\}$ .

W konkluzji koherentne transformujące miary ryzyka są wartościami oczekiwanymi dla nowego rozkładu z mniej ciężkim ogonem niż początkowy rozkład.

Zauważmy, że w przykładzie 5.1 inwestor przypisuje duże wagi stratom, które prawdopodobieństwo przeżycia mają mniejsze niż  $1/2$ ; współczynnik kierunkowy funkcji transformującej zmienia wartość z  $3/2$  na  $1/2$  dla  $d = 1/2$ .

Naturalne jest pytanie: w jakim punkcie zwrotnym powinniśmy przeważać współczynnikiem większym niż 1? Wykorzystując twierdzenie 5.1, mamy zredukowaną odpowiedź do wartości  $d$ , takiej, że transformacja  $S^*(x) > S(x)$ , jeżeli  $S(x) < d$ , ale  $S^*(x) < S(x)$ , gdy  $S(x) > d$ .

Dla  $VaR_\alpha$  oraz  $CVaR_\alpha$  ten punkt zwrotny dla zmiany wag jest dokładnie w  $\alpha$ -kwantylu. W przypadku  $CVaR_\alpha$  wagi przypisane wartościom większym niż  $\alpha$ -kwantyl są maksymalne (największa możliwa wartość  $g$ , która spełnia warunek  $g(0) = 0$ ), ale jest minimalna (czyli zero) dla wartości mniejszej niż  $\alpha$ -kwantyl. W świetle problemu niespójności zilustrowanego przez przykład 5.1 oraz potrzeby miary, aby ochronić przed ekstremalnymi stratami, zapiszemy własność dla transformującej miary ryzyka która zachowa dywersyfikację (czyli wypukłość).

**Definicja 5.1.** Transformująca miara ryzyka jest nazywana adaptacyjną wtedy, gdy transformująca funkcja:

1.  $g$  jest ściśle wypukła, czyli że  $g'$  jest ściśle malejąca.
2.  $\lim_{u \rightarrow 0^+} g'(u) = \infty$  oraz  $\lim_{u \rightarrow 0} g'(u) = 0$ .

Warunek  $g'(0) = \infty$  jest wymagany, aby zapisać możliwe nieograniczone wartości dla ekstremalnych strat prawego ogona (Wang, 1996). Adaptacyjna miara ryzyka przeważa różne straty w różny sposób, przypisując najmniejsze transponowane prawdopodobieństwa stratom bliskim zero, natomiast duże straty, otrzymując maksymalne prawdopodobieństwa. Adaptacyjne miary ryzyka są wyczerpujące, ale odwrotne stwierdzenie nie jest prawdziwe.

$CVaR_\alpha$  nie jest adaptacyjną miarą ryzyka, ponieważ:  $g'(u) = 0$ , dla  $u \in [1 - \alpha, 1]$  oraz pochodna jest stała  $g'(u) = \frac{1}{1 - \alpha}$  dla  $u \in [0, 1 - \alpha]$ . Transformująca miara ryzyka generowana przez  $g_3$  zapisana równaniem (9) również nie jest adaptacyjna, ponieważ jej pochodna jest stała  $g'_3(u) = \frac{3}{2}$ , dla  $u \in [0, 1/2]$  oraz wynosi  $g'_3(u) = \frac{1}{2}$ , dla  $u \in [1/2, 1]$ .

Inne przykłady funkcji transformujących są następujące: funkcja dualnej mocy (the dual-power)  $g_{DP}$  oraz proporcjonalna funkcja hazardu  $g_{PH}$  zapisane następująco (Trzpiot, 2004a, 2006):

$$g_{DP} = 1 - (1 - u)^v, \quad u \in [0, 1], v \geq 1 \quad (10)$$

$$g_{PH} = u^{\frac{1}{\gamma}}, \quad u \in [0, 1], \gamma \geq 1. \quad (11)$$

Obydwie te funkcje spełniają pierwszy warunek definicji 5.1 dla  $v, \gamma > 1$ . Transformująca funkcja dualnej mocy ma granicę równą zero dla  $u \rightarrow 1^-$ , ale nieprawdziwa jest pierwsza granica warunku 2 ( $\lim_{u \rightarrow 0^+} g_{DP}'(u) = v < \infty$ ). Dla porównania,  $g_{PH}$  ma skończoną granicę dla  $u \rightarrow 0^+$ , ale nieprawdziwa jest pierwsza granica warunku 2 (ponieważ  $\lim_{u \rightarrow 1^-} g_{PH}'(u) = \gamma$ ). Zatem nie są to miary adaptacyjne. Dla kontrastu miara transformująca WT  $g\lambda$  z równania 7 jest przykładem adaptacyjnej miary ryzyka (Wang, 2000 – wartości pochodnej  $g'\lambda(u)$  dla 0 oraz dla 1). W tabeli 4 zapisano warunki, jakie spełniają omawiane transformujące miary ryzyka.

Tabela 4

Własności transformujących miar ryzyka

| Miara                | Koherentna | Zupełna | Wyczerpująca | Adaptacyjna | Warunek 2 |
|----------------------|------------|---------|--------------|-------------|-----------|
| $VaR_\alpha$         | Nie        | Nie     | Nie          | Nie         | Nie       |
| $CVaR_\alpha$        | Tak        | Nie     | Nie          | Nie         | Nie       |
| $g_3$                | Tak        | Tak     | Tak          | Nie         | Nie       |
| $g_{DP}(v > 1)$      | Tak        | Tak     | Tak          | Nie         | Tak       |
| $g_{PH}(\gamma > 1)$ | Tak        | Tak     | Tak          | Nie         | Tak       |
| $WT$                 | Tak        | Tak     | Tak          | Tak         | Tak       |

## Podsumowanie

W artykule przedstawiono wybrane własności transformujących miar ryzyka. Omówiono kilka zbiorów miar ryzyka o różnych własnościach i przeprowadzono dyskusję tych własności. Przedstawiono własności miar ryzyka, wykorzystując własności różniczkowalności funkcji transformujących. W tabeli podsumowującej rozważania (tabela 4) zebrano własności spełniane przez omówione miary ryzyka.

Badania empiryczne na polskim rynku kapitałowym podjęto w pracach wcześniejszych (Trzpiot, 2006a, 2007, 2008b). Badania własności miar stosowanych do opisów szeregów czasowych analizowanych instrumentów finansowych również były podejmowane we wcześniejszych badaniach autorki (Trzpiot, 2008a).

## Literatura

- Acerbi C. (2002): Risk Aversion and Coherent Risk Measures: A Spectral Representation Theorem. „J Bank Financ” 7, s. 1505-1518.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. (1997): Thinking Coherently. „Risk”, 10, s. 68-71.
- Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. (1999): Coherent Measures of Risk. „Math Financ”, 9(3), s. 203-228.
- Balbás A., Garrido J., Mayoral S. (2008): Properties of Distortion Risk Measures. „Methodol Comput Appl Probab”.
- Basak S., Shapiro A. (2001): Value-at-risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. „Rev Financ Stud”, 14(2), s. 371-415.
- Delbaen F. (2002): Coherent Measures of Risk on General Probability Spaces. W: Non-Additive Measure and Integral. Red. D. Denneberg. Kluwer, Dordrecht.
- Duffie D., Pan J. (1997): An Overview of Value at Risk. „J. Deriv”, 4, s. 7-49.
- Föllmer H., Schied A. (2002): Convex Measures of Risk and Trading Constraints. „Finance Stoch”, 6(4), s. 429-447.
- Frittelli M., Rosazza G.E. (2002): Putting Order in Risk Measures. „J Bank Financ”, 26(7), s. 1473-1486.
- Goovaerts M., Darkiewicz G., Dhaene D. (2003a): Coherent Distortion Risk Measures: A Pitfall. Working paper presented to 2003 IME conference.
- Goovaerts M., Kaas R., Dhaene J., Tang Q. (2003b): A Unified Approach to Generate Measures Risks. „ASTIN Bull”, 33(2), s. 173-192.
- Gzyl H., Mayoral S. (2008): On a Relationship between Distorted and Spectral Measures Risks. „Rev Econ Financ”, 15.
- Kusuoka S. (2001): On Law Invariant Coherent Risk Measure. W: Optimization of Conditional Value-at-risk. Red. S. Kusuoka, R.T. Rockafellar, S. Uryasev. „J Risk”, 2(3), s. 21-41.
- Rockafellar RT., Uryasev S., Zabrankin M. (2006): Generalized Deviation Measures in Risk Analysis. „Finance Stoch”, 10, s. 51-74.
- Ruszczynski A., Shapiro A. (2006): Optimization Convex Risk Measures. „Math Oper Res”, 31(3), s. 433-452.

- Song Y., Yan J.A. (2006): The Representation of Two Types of Functionals on  $L^\infty(\_, F)$  and  $L^\infty(\_, F, P)$ . „Sci China Ser A Math”, 49(10), s. 1376-1382.
- Trzpiot G. (2004a): O wybranych własnościach miar ryzyka. „Badania Operacyjne i Decyzje”, 3-4, s. 91-98.
- Trzpiot G. (2004b): Kwantylowe miary ryzyka. Prace Naukowe AE Wrocław, nr 1022, s. 420, 430.
- Trzpiot G. (2006a): Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym. AE, Katowice.
- Trzpiot G. (2006b): Pomiar ryzyka finansowego w warunkach niepewności. „Badania Operacyjne i Decyzje”, 2, s. 81-88.
- Trzpiot G. (2007): Uogólniona miara odchylenia a optymalizacja decyzji inwestycyjnych. W: Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie. Prace Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 462, s. 247-254.
- Trzpiot G. (2008a): Wybrane modele oceny ryzyka – podejście nieklasyczne. AE, Katowice.
- Trzpiot G. (2008b): Zastosowanie uogólnionej miary odchylenia w analizie portfelowej. W: Modelowanie preferencji a ryzyko'07. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice, s. 275-284.
- Wang S.S. (1996): Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. „ASTIN Bull”, 26, s. 71-92.
- Wang S.S. (2000): A Class of Distortion Operators for Financial and Insurance Risks. „J Risk Insur”, 67, s. 15-36.
- Wang S.S. (2002): A Risk a Measure that Goes beyond Coherence. W: Proceedings of the 2002 AFIR (Actuarial Approach to Financial Risks): Colloquium, Cancun, March.
- Wirth J., Hardy M.R. (2001): Distortion Risk Measures: Coherence and Stochastic Dominance. Working paper. <http://pascal.iseg.utl.pt/~cemapre/ime2002/>.

## SOME PROPERTIES OF DISTORTION RISK MEASURES

### Summary

The current literature does not reach a consensus on which risk measures should be used in practice. Our objective is to give at least a partial solution to this problem. We study properties that a risk measure must satisfy to avoid inadequate portfolio selections. The properties that we propose for risk measures can help avoid the problems observed with popular measures, like Value at Risk ( $Var_\alpha$ ) or Conditional  $Var_\alpha$  ( $CVar_\alpha$ ). This leads to the definition of two new families: complete and adapted risk measures. Our focus is on risk measures generated by distortion functions. Two new properties are put forward for these: completeness, ensuring that the distortion risk measure uses all the information of the loss distribution, and adaptability, forcing the measure to use this information adequately.

**Alicja Ganczarek-Gamrot**

## **MODELE O-GARCH W OCENIE RYZYKA PORTFELA INWESTYCJI NA RYNKU DNIA NASTĘPNEGO**

---

### **Wprowadzenie**

Ocena ryzyka zmiany wartości inwestycji jest niezbędna w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych. Inwestorzy podejmujący decyzje w warunkach ryzyka starają się dokonać oceny przez spojrzenie wielowymiarowe na czynniki kształtujące daną inwestycję. Ponadto analiza ryzyka to w głównej mierze analiza zmienności. Wiele prac empirycznych z analizy ryzyka wykorzystuje w procesie estymacji zmienności model warunkowej zmienności GARCH (Trzpiot, 2010; Ganczarek-Gamrot, 2010; Fiszeder, 2009; Piontek, 2001). Klasyczne wielowymiarowe modele GARCH: modele VECM oraz BEKK w ogólnej swojej postaci, wymagają estymacji wielu parametrów. Postacie diagonalne tych modeli ograniczają liczbę szacowanych parametrów kosztem braku informacji o zależnościach między wariancjami oraz wariancjami opóźnionymi analizowanych szeregów czasowych. W pewnym stopniu problem ten rozwiązują modele czynnikowe. W modelach czynnikowych na liczbę szacowanych parametrów wpływa liczba rozważanych czynników. W związku z tym nawet przy dużej liczbie szeregów czasowych, a niewielkiej liczbie czynników można ograniczyć proces estymacji parametrów modeli. Biorąc pod uwagę fakt, że czynniki są niezależne w estymacji parametrów tych modeli, postępuje się dwuetapowo. W pierwszym kroku są estymowane czynniki, w kolejnym kroku jednowymiarowe modele GARCH. Należy jednak pamiętać, że na jakość estymacji wpływa w tym przypadku stopień, w jakim czynniki opisują zmienność szeregów czasowych.

W niniejszym artykule wykorzystano wielowymiarowy model czynnikowy O-GARCH do estymacji ryzyka zmiany wartości portfela złożonego z kontraktów na energię elektryczną. Portfel został zbudowany z 24 kontraktów notowanych na Rynku Dnia Następnego (RDN) Towarowej Giełdy Energii S.A. (TGE) w okresie od 1.01.2009 do 31.03.2011 roku.

## 1. Model O-GARCH

Analizując modele GARCH zmienności szeregów czasowych zarówno w postaci jednowymiarowej, jak i wielowymiarowej, należy pamiętać o wartości oczekiwanej analizowanych szeregów czasowych. W analizie ryzyka rozważa się najczęściej wartość oczekiwaną stóp zwrotu cen. Wielowymiarowy proces stóp zwrotu można zapisać następująco:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{r}_t$  – wektor stóp zwrotu o wymiarach  $N \times 1$ ,

$\boldsymbol{\mu}_t$  – wektor warunkowych wartości oczekiwanych o wymiarach  $N \times 1$ ,

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$  – wektor reszt o wymiarach  $N \times 1$ .

Reszty  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  wielowymiarowego modelu stóp zwrotu cen można przedstawić następująco:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{0,5} \mathbf{u}_t, \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{H}_t$  – macierz warunkowej kowariancji o wymiarach:

$$N \times N: \mathbf{r}_t \sim D(\boldsymbol{\mu}_t, \mathbf{H}_t), \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim D(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t),$$

$\mathbf{u}_t$  – wektor o wymiarach  $N \times 1$ , zerowej wartości oczekiwanej oraz jednostkowej macierzy kowariancji.

Wielowymiarowe modele GARCH to modele warunkowej macierzy kowariancji  $\mathbf{H}_t$ . Ortogonalny model GARCH(1,1,m) (O-GARCH(1,1,m)) zaproponowany przez Alexandra oraz Chibumba (1996) ma następującą postać macierzy kowariancji:

$$\mathbf{H}_t = \text{Var}_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{V}^{0,5} \mathbf{V}_t \mathbf{V}^{*0,5}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_N),$$

$v_i$  – bezwarunkowa wariancja  $\varepsilon_{it}$ ,

$$\mathbf{V}_t = \text{Var}_{t-1}(\mathbf{u}_t).$$

W modelu O-GARCH wektor reszt  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  dany równością (2) przyjmuje następującą postać:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{V}^{0,5} \mathbf{u}_t, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{Z}_m \mathbf{f}_t, \quad (5)$$

gdzie:

$\mathbf{f}_t = (f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{mt})$  jest wektorem o warunkowej wartości oczekiwanej równej zero  $E_{t-1}(\mathbf{f}_t) = 0$  oraz warunkowej macierzy kowariancji  $\mathbf{Q}_t = \text{diag}(\sigma_{f_{1t}}^2, \sigma_{f_{2t}}^2, \dots, \sigma_{f_{mt}}^2)$ , gdzie  $\sigma_{f_{it}}^2$  są opisane za pomocą jednowymiarowych stacjonarnych modeli GARCH.

Warunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{u}_t$  wynosi:

$$\mathbf{V}_t = \text{Var}_{t-1}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{Z}_m \mathbf{Q}_t \mathbf{Z}_m', \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{Z}_m$  to macierz ortogonalnych wektorów własnych o wymiarach  $N \times m$ . Liczba szacowanych parametrów modelu O-GARCH dla  $N = m$  wynosi  $N(N + 5)/2$ .

Liczba wektorów własnych modelu O-GARCH jest wybierana za pomocą metod analizy głównych składowych. Analiza głównych składowych gwarantuje brak korelacji w rozkładach bezwarunkowych, nie gwarantuje jednak braku korelacji w rozkładach warunkowych.

## 2. Estymacja ryzyka

Korzystając z wyników estymacji zmienności, za pomocą modeli O-GARCH oszacowano kwantylową miarę zagrożenia Value-at-Risk:

$$\text{VaR}_\alpha = (\mathbf{R}_\alpha + \boldsymbol{\mu}_t) \mathbf{P}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{F}^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{H}_t} \quad (8)$$

gdzie:

$\mathbf{R}_\alpha$  – wektor kwantyli rzędu  $\alpha$  stóp zwrotu portfela,

$\text{VaR}_\alpha$  – wektor miar zagrożenia rzędu  $\alpha$ ,

$\mathbf{P}_0$  – wektor bieżących cen rozpatrywanych kontraktów wchodzących w skład portfela,

- $\mu_t$  – wartość oczekiwana portfela,  
 $\sqrt{\mathbf{H}_t}$  – warunkowa macierz wariancji-kowariancji dana równaniem (3),  
 $F^{-1}(\alpha)$  – kwantyl rzędu  $\alpha$  standaryzowanego rozkładu normalnego  $N(0,1)$ .

Do oceny efektywności estymacji  $VaR_\alpha$  wykorzystano zaproponowany przez Kupca (1995) test przekroczeń. Jeśli oznaczy się przez  $w$  udział przekroczeń  $VaR_\alpha$  w szeregu rozpatrywanych stóp zwrotu, możliwe jest zweryfikowanie hipotezy  $H_0: w = \alpha$ , przeciwko alternatywnej  $H_1: w \neq \alpha$ . Sprawdzianem tej hipotezy jest test ilorazu wiarygodności oparty na statystyce:

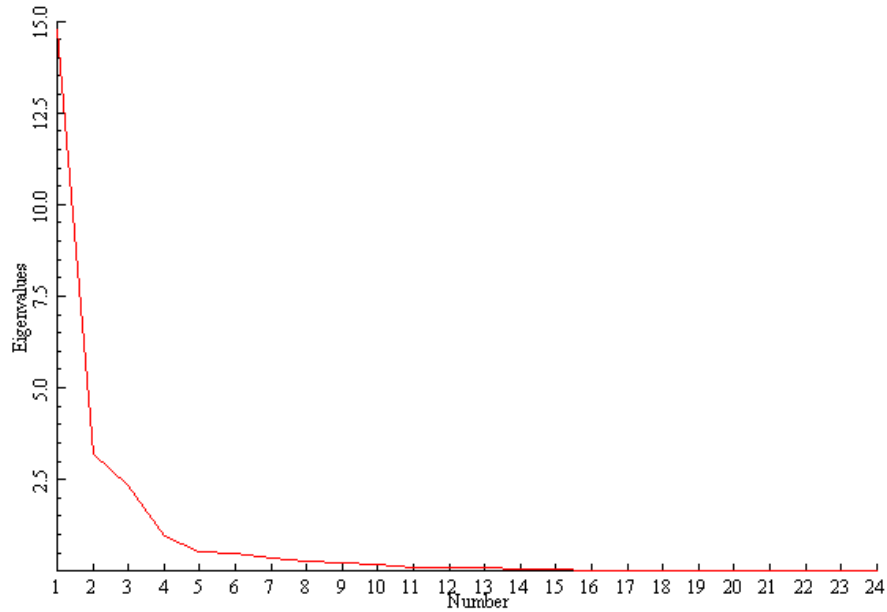
$$LR_{uc} = -2 \ln[(1 - \alpha)^{T-K} \alpha^K] + 2 \ln \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{K}{T} \right)^{T-K} \right] \left( \frac{K}{T} \right)^K \right\}, \quad (9)$$

gdzie  $K$  jest liczbą przekroczeń  $VaR_\alpha$  przy liczbie obserwacji  $T$ . Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka  $LR_{uc}$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z jednym stopniem swobody.

### 3. Ocena ryzyka na RDN

Oferta RDN to oferta kontraktów godzinowych, kontraktów blokowych na fizyczną dostawę energii elektrycznej. Obecnie notowania odbywają się na dzień do dwóch dni poprzedzających dzień dostawy w systemie ceny jednolitej oraz systemie notowań ciągłych. W systemie ceny jednolitej dla każdej godziny doby ceny energii elektrycznej są ustalane trzykrotnie. Są to ceny równowagi złożonych ofert kupna i sprzedaży. Do estymacji ryzyka zmiany ceny na RDN wykorzystano notowania 24 kontraktów godzinowych z pierwszego fixingu (pierwszy kurs jednolity jest określany dla wszystkich godzin dnia dostawy na jeden dzień przed dniem dostawy do godziny 8.00 w okresie od 1.01.2009 do 31.03.2011 roku (821 dni). Model O-GARCH estymowano dla 24 szeregów dziennych liniowych stóp zwrotu.

Estymacja modelu czynnikowego przebiega w dwóch etapach. Na początku zostaje przeprowadzona analiza głównych składowych. Na rysunku 1 zaprezentowano wykres osypiska dla analizowanych szeregów stóp zwrotu cen energii elektrycznej.



Rys. 1. Wykres osypiska

Biorąc pod uwagę kryterium osypiska, do estymacji parametrów warunkowej macierzy wariancji należy wybrać cztery główne składowe. Jednak ze względu na fakt, że wartość własna czwartej głównej składowej jest mniejsza od jedności i w niewielkim stopniu poprawia stopień wyjaśnianej zmienności pierwotnych 24 szeregów (tabela 1), do estymacji zdecydowano się wybrać trzy pierwsze główne składowe, które wyjaśniają aż 84,44% zmienności pierwotnych szeregów czasowych.

Tabela 1

Wartości własne

| Numer głównej składowej | Wartość własna | Procent wyjaśnianej wariancji | Skumulowany procent wyjaśnianej wariancji |
|-------------------------|----------------|-------------------------------|---|
| 1                       | 2              | 3                             | 4   |
| 1                       | 14,7390        | 0,6141                        | 0,6141                                    |
| 2                       | 3,1824         | 0,1326                        | 0,7467                                    |
| 3                       | 2,3428         | 0,0976                        | 0,8444                                    |
| 4                       | 0,9787         | 0,0408                        | 0,8851                                    |
| 5                       | 0,5276         | 0,0220                        | 0,9071                                    |
| 6                       | 0,4806         | 0,0200                        | 0,9271                                    |

cd. tabeli 1

| 1  | 2      | 3      | 4      |
|----|--------|--------|--------|
| 7  | 0,3685 | 0,0154 | 0,9425 |
| 8  | 0,2855 | 0,0119 | 0,9544 |
| 9  | 0,2510 | 0,0105 | 0,9649 |
| 10 | 0,1791 | 0,0075 | 0,9723 |
| 11 | 0,1225 | 0,0051 | 0,9774 |
| 12 | 0,1013 | 0,0042 | 0,9816 |
| 13 | 0,0909 | 0,0038 | 0,9854 |
| 14 | 0,0723 | 0,0030 | 0,9884 |
| 15 | 0,0513 | 0,0021 | 0,9906 |
| 16 | 0,0371 | 0,0015 | 0,9921 |
| 17 | 0,0348 | 0,0014 | 0,9936 |
| 18 | 0,0312 | 0,0013 | 0,9949 |
| 19 | 0,0289 | 0,0012 | 0,9961 |
| 20 | 0,0266 | 0,0011 | 0,9972 |
| 21 | 0,0234 | 0,0010 | 0,9982 |
| 22 | 0,0197 | 0,0008 | 0,9990 |
| 23 | 0,0145 | 0,0006 | 0,9996 |
| 24 | 0,0100 | 0,0004 | 1,0000 |

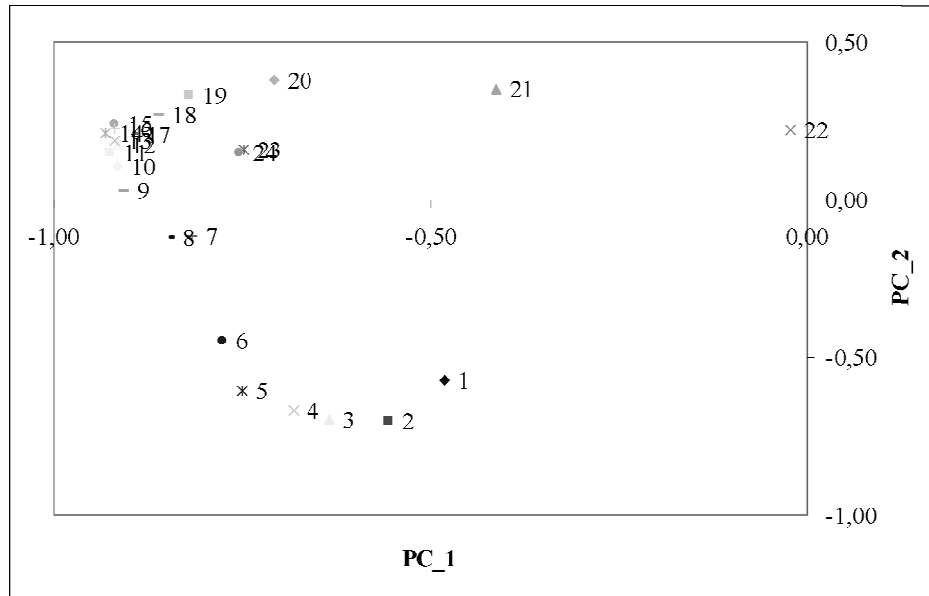
W tabeli 2 zamieszczono wartości współczynników korelacji pomiędzy analizowanymi szeregami stóp zwrotu cen energii elektrycznej a wybranymi trzema głównymi składowymi. Z pierwszą główną składową są skorelowane przede wszystkim notowania w ciągu dnia, z drugą główną składową godziny nocne, a z trzecią tzw. godziny szczytu wieczornego 21.00 i 22.00. Na rysunku 2 zaprezentowano wykres zależności między analizowanymi zmiennymi a pierwszą i drugą główną składową. Analizując wyniki przedstawione na rysunku 2, można powiedzieć, że bardzo podobnie kształtują się przyrosty cen w godzinach od 1.00 do 6.00, oraz od 9.00 do 19.00. Dwuelementowe grupy stanowią kontrakty w godzinie 7.00 i 8.00 oraz 23.00 i 24.00. Odrębnie kształtują się ceny w godzinach 20.00, 21.00 i 22.00.

Drugi etap estymacji modelu O-GARCH polega na estymacji jednowymiarowych modeli GARCH dla głównych składowych (macierz  $Q_t$ ). W tabeli 3 przedstawiono wyniki estymacji jednowymiarowych modeli GARCH. Wszystkie parametry trzech modeli są statystycznie istotne. Ponadto  $a + b < 1$ , co świadczy o stacjonarności szeregów czasowych. Estymacja parametrów została przeprowadzona MNW z wykorzystaniem rozkładu normalnego.

Tabela 2

Współczynniki korelacji pomiędzy szeregami czasowymi  
a głównymi składowymi

| Godzina | PC_1                  | PC_2                  | PC_3                 |
|---------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 1       | -0,4811               | <b><u>-0,5722</u></b> | 0,3159               |
| 2       | -0,5558               | <b><u>-0,7020</u></b> | 0,2941               |
| 3       | -0,6330               | <b><u>-0,6960</u></b> | 0,2294               |
| 4       | <b><u>-0,6831</u></b> | -0,6660               | 0,1605               |
| 5       | <b><u>-0,7508</u></b> | -0,6052               | 0,0554               |
| 6       | <b><u>-0,7770</u></b> | -0,4452               | -0,0816              |
| 7       | <b><u>-0,8163</u></b> | -0,1167               | -0,2639              |
| 8       | <b><u>-0,8480</u></b> | -0,1193               | -0,1939              |
| 9       | <b><u>-0,9076</u></b> | 0,0275                | -0,2753              |
| 10      | <b><u>-0,9149</u></b> | 0,1066                | -0,2938              |
| 11      | <b><u>-0,9248</u></b> | 0,1490                | -0,2174              |
| 12      | <b><u>-0,9165</u></b> | 0,1722                | -0,1832              |
| 13      | <b><u>-0,9194</u></b> | 0,1867                | -0,1700              |
| 14      | <b><u>-0,9323</u></b> | 0,2121                | -0,1573              |
| 15      | <b><u>-0,9193</u></b> | 0,2419                | -0,1075              |
| 16      | <b><u>-0,9192</u></b> | 0,2265                | -0,0140              |
| 17      | <b><u>-0,8953</u></b> | 0,2082                | 0,0205               |
| 18      | <b><u>-0,8614</u></b> | 0,2694                | 0,1160               |
| 19      | <b><u>-0,8200</u></b> | 0,3314                | 0,3224               |
| 20      | <b><u>-0,7082</u></b> | 0,3777                | 0,4812               |
| 21      | -0,4129               | 0,3504                | <b><u>0,7508</u></b> |
| 22      | -0,0217               | 0,2219                | <b><u>0,8547</u></b> |
| 23      | <b><u>-0,7492</u></b> | 0,1592                | 0,0947               |
| 24      | <b><u>-0,7541</u></b> | 0,1501                | 0,0143               |



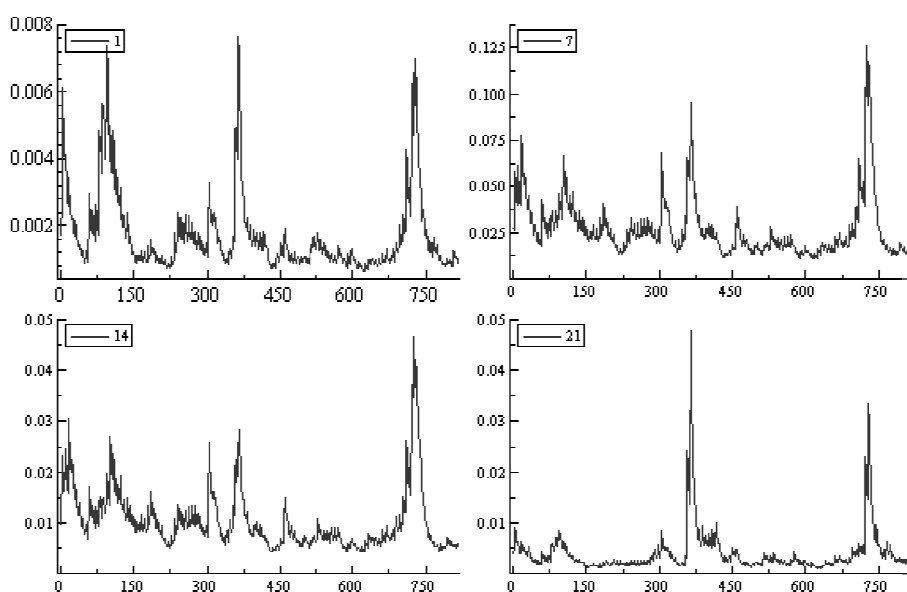
Rys. 2. Wykres ładunków czynnikowych

Tabela 3

Parametry macierzy Qt

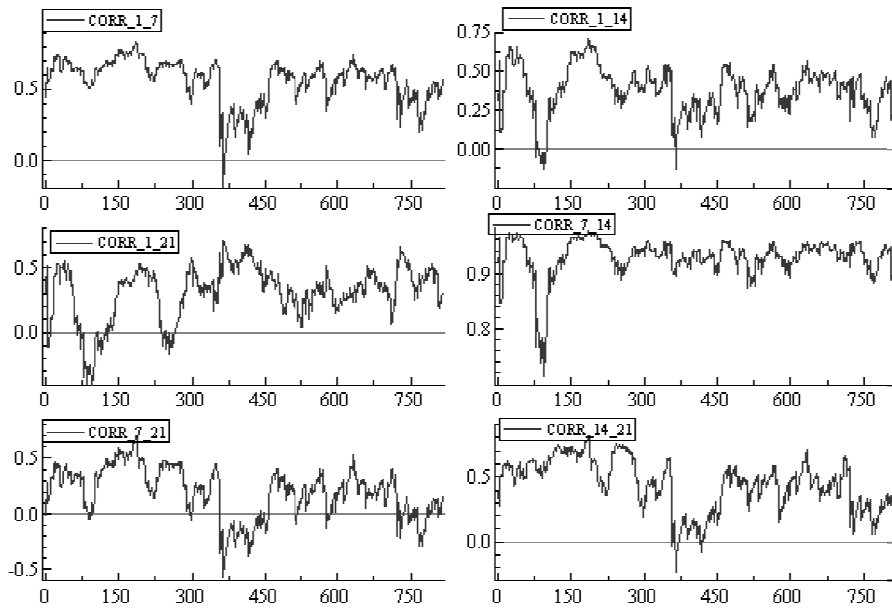
| Główna składowa | Parametr     | Ocena parametru | P-wartość |
|-----------------|--------------|-----------------|-----------|
| PC_1            | ARCH(Alpha1) | 0,0767          | < 0,01    |
|                 | GARCH(Beta1) | 0,8938          | < 0,01    |
|                 | sigma^2      | 0,0295          | < 0,01    |
| PC_2            | ARCH(Alpha1) | 0,1041          | < 0,01    |
|                 | GARCH(Beta1) | 0,8660          | < 0,01    |
|                 | sigma^2      | 0,0300          | < 0,01    |
| PC_3            | ARCH(Alpha1) | 0,1333          | < 0,01    |
|                 | GARCH(Beta1) | 0,8507          | < 0,01    |
|                 | sigma^2      | 0,0160          | < 0,01    |

Na podstawie macierzy  $Q_t$  wyznacza się warunkową macierz kowariancji  $u_t$  (6), a następnie macierz  $H_t$  (3), w związku z czym za pomocą modelu O-GARCH można opisać wariancję warunkową analizowanych 24 szeregów czasowych. Na rysunku 3 i 4 zaprezentowano szeregi warunkowych wariancji i korelacji dla wybranych czterech kontraktów. Na przykładzie wybranych kontraktów można zauważyć, że zarówno szeregi wariancji, jak i korelacji zależą od czasu, ponadto różnią się od siebie. Najwyższe zmienności były osiągnięte w godzinie 7.00 następnie 14.00 i 21.00. Najniższy poziom zmienności obserwowano nocą w godzinie 1.00.



Rys. 3. Warunkowa wariancji kontraktów w godzinie 1.00, 7.00, 14.00, 21.00

Zarówno ceny, jak i stopy zwrotu cen są ze sobą dodatnio skorelowane, jednak obserwując szereg korelacji pomiędzy zmiennymi, można zauważyć krótkie okresy ujemnej korelacji w szczególności dla zmiennych zakwalifikowanych w układzie głównych składowych do odrębnych grup. Kontrakt w godzinie 7.00 i 14.00, które zostały zakwalifikowane do tej samej grupy, charakteryzuje się zmienną, ale bardzo silną zależnością dodatnią.



Rys. 4. Warunkowa korelacja kontraktów w godzinie 1.00, 7.00, 14.00, 21.00

Korzystając z macierzy wariancji kowariancji (3), oszacowano wektor  $VaR_{0,05}$  dla pozycji długiej i krótkiej analizowanych 24 kontraktów, a następnie wyznaczono wartość  $VaR_{0,05}$  dla portfela złożonego ze wszystkich kontraktów. Udziały w portfelu zostały wyznaczone proporcjonalnie do miary zysku względnego dla poszczególnych kontraktów. W tabeli 4 zaprezentowano wyniki testu przekroczeń Kupca dla pojedynczych kontraktów oraz portfela złożonego z analizowanych kontraktów. Pogrubioną czcionką zaznaczono kontrakty, dla których na poziomie istotności 0,05 liczba przekroczeń  $VaR_{0,05}$  była zgodna z oczekiwaną. Dla większości pojedynczych kontraktów, jak również portfela  $VaR_{0,05}$  zostało poprawnie oszacowane dla pozycji krótkiej. W przypadku pozycji krótkiej błędne oszacowania  $VaR_{0,05}$  to przede wszystkim przeszacowania wartości  $VaR_{0,05}$ , w przypadku pozycji długiej – niedoszacowania. Wydaje się więc, że błędne oszacowania wartości narażonej na ryzyko wynikają z asymetryczności analizowanych szeregów. Natomiast w estymacji parametrów zmienności modelu O-GARCH, jak również w estymacji ryzyka wykorzystano rozkład normalny oraz klasyczne modele GARCH.

Tabela 4

## Wyniki testu przekroczeń Kupca

| Godzina | Udział w portfelu | Pozycja krótka |               |             |             | Pozycja długa |               |             |             |
|---------|-------------------|----------------|---------------|-------------|-------------|---------------|---------------|-------------|-------------|
|         |                   | <i>K</i>       | <i>w</i>      | <i>LR</i>   | <i>p</i>    | <i>K</i>      | <i>w</i>      | <i>LR</i>   | <i>p</i>    |
| 1       | 5,31%             | 70             | 0,0857        | 18,21       | 0,00        | 60            | 0,0734        | 8,31        | 0,00        |
| 2       | 4,38%             | <b>47</b>      | <b>0,0575</b> | <b>0,93</b> | <b>0,33</b> | <b>37</b>     | <b>0,0453</b> | <b>0,39</b> | <b>0,53</b> |
| 3       | 4,09%             | <b>46</b>      | <b>0,0563</b> | <b>0,66</b> | <b>0,42</b> | <b>37</b>     | <b>0,0453</b> | <b>0,39</b> | <b>0,53</b> |
| 4       | 4,05%             | <b>47</b>      | <b>0,0575</b> | <b>0,93</b> | <b>0,33</b> | <b>34</b>     | <b>0,0416</b> | <b>1,28</b> | <b>0,26</b> |
| 5       | 4,17%             | <b>41</b>      | <b>0,0502</b> | <b>0,00</b> | <b>0,98</b> | <b>40</b>     | <b>0,0490</b> | <b>0,02</b> | <b>0,89</b> |
| 6       | 4,17%             | <b>32</b>      | <b>0,0392</b> | <b>2,17</b> | <b>0,14</b> | <b>52</b>     | <b>0,0636</b> | <b>2,96</b> | <b>0,09</b> |
| 7       | 3,77%             | 18             | 0,0220        | 16,86       | 0,00        | 91            | 0,1114        | 48,79       | 0,00        |
| 8       | 4,20%             | 20             | 0,0245        | 13,69       | 0,00        | 78            | 0,0955        | 28,41       | 0,00        |
| 9       | 4,08%             | 24             | 0,0294        | 8,53        | 0,00        | 86            | 0,1053        | 40,42       | 0,00        |
| 10      | 4,12%             | 25             | 0,0306        | 7,47        | 0,01        | 77            | 0,0942        | 27,03       | 0,00        |
| 11      | 4,57%             | <b>41</b>      | <b>0,0502</b> | <b>0,00</b> | <b>0,98</b> | 78            | 0,0955        | 28,41       | 0,00        |
| 12      | 4,15%             | <b>42</b>      | <b>0,0514</b> | <b>0,03</b> | <b>0,85</b> | 78            | 0,0955        | 28,41       | 0,00        |
| 13      | 4,21%             | <b>38</b>      | <b>0,0465</b> | <b>0,21</b> | <b>0,64</b> | 80            | 0,0979        | 31,25       | 0,00        |
| 14      | 4,09%             | <b>40</b>      | <b>0,0490</b> | <b>0,02</b> | <b>0,89</b> | 73            | 0,0894        | 21,81       | 0,00        |
| 15      | 4,21%             | <b>34</b>      | <b>0,0416</b> | <b>1,28</b> | <b>0,26</b> | 63            | 0,0771        | 10,92       | 0,00        |
| 16      | 3,79%             | 23             | 0,0282        | 9,68        | 0,00        | 60            | 0,0734        | 8,31        | 0,00        |
| 17      | 2,22%             | 22             | 0,0269        | 10,92       | 0,00        | 54            | 0,0661        | 4,06        | 0,04        |
| 18      | 2,10%             | 26             | 0,0318        | 6,49        | 0,01        | <b>53</b>     | <b>0,0649</b> | <b>3,49</b> | <b>0,06</b> |
| 19      | 2,50%             | 28             | 0,0343        | 4,76        | 0,03        | <b>41</b>     | <b>0,0502</b> | <b>0,00</b> | <b>0,98</b> |
| 20      | 2,78%             | <b>30</b>      | <b>0,0367</b> | <b>3,33</b> | <b>0,07</b> | <b>37</b>     | <b>0,0453</b> | <b>0,39</b> | <b>0,53</b> |
| 21      | 4,17%             | <b>33</b>      | <b>0,0404</b> | <b>1,69</b> | <b>0,19</b> | <b>44</b>     | <b>0,0539</b> | <b>0,25</b> | <b>0,62</b> |
| 22      | 6,04%             | <b>41</b>      | <b>0,0502</b> | <b>0,00</b> | <b>0,98</b> | <b>53</b>     | <b>0,0649</b> | <b>3,49</b> | <b>0,06</b> |
| 23      | 6,52%             | 59             | 0,0722        | 7,51        | 0,01        | 67            | 0,0820        | 14,89       | 0,00        |
| 24      | 6,30%             | 70             | 0,0857        | 18,21       | 0,00        | 77            | 0,0942        | 27,03       | 0,00        |
| portfel |                   | <b>31</b>      | <b>0,0379</b> | <b>2,72</b> | <b>0,10</b> | 74            | 0,0906        | 23,07       | 0,00        |

**Podsumowanie**

Podsumowując uzyskane wyniki, stwierdzono, że dla danego okresu badawczego na RDN model O-GARCH można wykorzystać do estymacji zmienności cen energii elektrycznej dla pozycji krótkiej. Pomimo występujących błędów estymacji VaR uzyskano na jego podstawie lepsze oszacowania niż w przypadku modelu zmiennej warunkowej korelacji (DCC) oszacowanego

dla analogicznego okresu na RDN (Ganczarek-Gamrot, 2011). W kolejnych etapach badania zmienności na RDN warto również rozpatrzyć estymację modelu O-GARCH z uwzględnieniem asymetryczności szeregów czasowych, zarówno w postaci jednowymiarowych modeli GARCH, jak i w postaci rozkładu uwzględnionego do estymacji parametrów zmienności modelu O-GARCH czy VaR.

## Literatura

- Alexander C., Chibumba A. (1996): Multivariate Orthogonal Factor GARCH. University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.
- Fiszeder P. (2009): Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych. Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.
- Ganczarek-Gamrot A. (2010): Pomiar ryzyka w systemie ceny jednolitej na Towarowej Giełdzie Energii. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '09. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice.
- Ganczarek-Gamrot A. (2011): Wielowymiarowe modele GARCH w ocenie ryzyka na polskim rynku energii elektrycznej. W: Modelowanie preferencji a ryzyko '11. Red. T. Trzaskalik. UE, Katowice (w druku).
- Kupiec P. (1995): Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. „Journal of Derivatives”, 2, 173-184.
- Piontek K. (2001): Heteroskedastyczność rozkładu stóp zwrotu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR. AE, Katowice.
- Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego (2010). Red. G. Trzpiot. PWE, Warszawa.

### **O-GARCH IN PORTFOLIO RISK ESTIMATION OF INVESTMENT ON DAY AHEAD MARKET**

#### **Summary**

In this article O-GARCH model was used to portfolio risk estimation. The portfolio was build with 24 contracts on electric energy from Day Ahead Market from Electric Energy Exchange from 1.01.2009 to 31.03.2011.

**Agnieszka Orwat-Acedańska**

## **OCENA RYZYKA PORTFELA W ALOKACJI ODPORNEJ PRZY RÓŻNYCH TYPACH ROZKŁADÓW – PODEJŚCIE SYMULACYJNE**

---

---

### **Wprowadzenie**

Alokacja aktywów jest rozumiana w niniejszym artykule jako dobór aktywów w różnych proporcjach w celu osiągnięcia najwyższej oczekiwanej stopy zwrotu przy założonym poziomie ryzyka. Proces alokacji aktywów dokonywany najczęściej poprzez optymalizację portfela inwestycyjnego jest źródłem nadwyżki bądź straty generowanej przez podmioty instytucjonalne zajmujące się działalnością inwestycyjną. Wartości parametrów szacowanych klasycznie na podstawie obserwacji, stanowiące podstawę do wyznaczania charakterystyk portfela, mogą się istotnie różnić od ich wartości rzeczywistych. Ma się więc do czynienia z ryzykiem estymacji (ang. estimation risk), rozumianym jako możliwość poniesienia straty w wyniku błędów estymacji parametrów modeli. W ich konsekwencji udziały portfela wyznaczone na podstawie klasycznej estymacji i optymalizacji nie są w rzeczywistości rozwiązaniem optymalnym, lecz suboptymalnym. Jedną z metod konstrukcji portfela służącą ograniczeniu ryzyka estymacji jest alokacja odporna (ang. robust allocation). Skutki ryzyka estymacji charakterystyk portfela klasycznie optymalizowanego mogą być dotkliwsze w sytuacji obecności wielowymiarowych obserwacji odstających lub asymetrycznych rozkładów stóp zwrotu.

Odporność w sensie omawianej metody jest efektem założenia, że parametry będące charakterystykami składowych portfela nie są równe uzyskanym w procesie estymacji ocenom punktowym, ale znajdują się w otoczeniach zwanych zbiorami niepewności (ang. uncertainty sets). Reprezentują one tzw. profil inwestora (ang. investor profile), gdyż są odzwierciedleniem stosunku inwestora do ryzyka estymacji. Jednym z proponowanych w literaturze podejść jest wybór portfela w pesymistycznym scenariuszu, zakładającym, że oczekiwane stopy zwrotu aktywów będą najniższe z możliwych, a ryzyko największe. Wybór portfela odpornego w sensie tej metody pozwala uzyskać możliwie najlepszy rezultat przy najmniej korzystnym stanie natury rynku.

Problem oceny przydatności metody alokacji odpornej oraz jej modyfikacji – metody bayesowskiej alokacji odpornej – w obszarze polskiego rynku kapitałowego podjęto w pracach Orwat (2010) oraz Orwat-Acedańskiej (2011). Implementacja metod służyła analizie porównawczej ocen ryzyka portfeli optymalizowanych klasycznie i odpornie otrzymanych na podstawie próby stóp zwrotu obserwowanych na polskim rynku.

W niniejszym artykule oraz powyższych pracach Autorki ryzyko estymacji jest utożsamiane z różnicą między wartościami charakterystyk portfela otrzymanych przy założeniu macierzy kowariancji i wektora wartości oczekiwanych stóp zwrotu z rozkładu populacji oraz otrzymanych przy założeniu ocen tych parametrów szacowanych na podstawie próby. Ponadto wartości charakterystyk portfela optymalizowanego przy założeniu wartości macierzy kowariancji i wektora oczekiwanych stóp zwrotu z rozkładu populacji są określane na potrzeby opracowania mianem rzeczywistych charakterystyk.

Artykuł podejmuje ocenę przydatności metody alokacji odpornej z innej perspektywy. Jego celem jest zbadanie, w jakim stopniu wartość rzeczywistego ryzyka portfela przekracza ustaloną wartość dopuszczalnego ryzyka portfeli optymalizowanych klasycznie i odpornie oraz w przypadku których portfeli przekroczenia te są większe. Porównaniu wartości rzeczywistego ryzyka portfeli i dopuszczalnego ryzyka służy zastosowanie metod symulacji rozkładu populacji. Analiza jest przeprowadzana dla różnych typów rozkładów.

Rozdział pierwszy zawiera opis metodologii alokacji odpornej. Etapy badań wymieniono w rozdziale drugim, natomiast główne charakterystyki rozkładów wykorzystanych w analizie empirycznej zamieszczono w rozdziale trzecim. W rozdziale czwartym przedstawiono założenia oraz wyniki przeprowadzonych analiz empirycznych.

## 1. Metodologia alokacji odpornej

W celu formalnego opisu metodologii alokacji odpornej przyjęto następującą notację:  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)'$  – wektor wartości oczekiwanych,  $\boldsymbol{\Sigma}$  – macierz kowariancji wektora losowego  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_k)'$  stóp zwrotu. Stopa zwrotu  $k$ -składnikowego portfela optymalnego  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)'$  ze zbioru dopuszczalnego  $\mathcal{C} = \{\mathbf{p} : \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}'\mathbf{1} = 1\}$  jest zmienną losową w postaci  $\mathcal{R}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}'\mathbf{R}$ . Oczekiwana stopa zwrotu portfela ma postać  $E(\mathcal{R}_{\mathbf{p}}) = \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}$ , natomiast  $D(\mathcal{R}_{\mathbf{p}}) = \sqrt{\mathbf{p}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}}$  jest ryzykiem portfela. Możliwe wartości  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  są elementami zbiorów niepewności  $\Theta_{\boldsymbol{\mu}}$ ,  $\Theta_{\boldsymbol{\Sigma}}$ , które z określonym prawdopodobieństwem zawierają nieznaną wartość parametru.

Odporny problem maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu portfela przy warunku ograniczającym poziom ryzyka portfela ma postać:

$$\max_{p \in \mathcal{L}} \left\{ \min_{\mu \in \Theta_\mu} E(\mathcal{R}_p) \right\} \quad (1)$$

przy warunku  $\max_{\Sigma \in \Theta_\Sigma} D(\mathcal{R}_p) \leq v$ , gdzie  $v$  jest ustaloną wartością dopuszczalnego ryzyka.

Istnieje wiele możliwości specyfikacji zbiorów niepewności\*. W artykule przyjęto, że zbiory niepewności  $\Theta_\mu$ ,  $\Theta_\Sigma$  mają postać elipsoid. Inwestor może określić estymatory parametru środka i parametru kształtu elipsoid oraz promienie elipsoid w sposób arbitralny. W szczególności może on oszacować te parametry na podstawie szeregu czasowego  $\mathbf{i}_T = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T\}$ , gdzie  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_T$  są realizacjami zbioru niezależnych wektorów losowych  $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_T\} = \mathbf{I}_T$ .

Jeśli wektor  $\mathbf{R}_t$  dla każdego  $t = 1, 2, \dots, T$  ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną  $\mu$  i macierzą kowariancji  $\Sigma$  ( $\mathbf{R}_t \sim N_k(\mu, \Sigma)$ ), wówczas

estymator  $\hat{\mu}(\mathbf{I}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{R}_t$  ma  $k$ -wymiarowy rozkład  $t$ -Studenta z  $T$  stopniami swobody, parametrem położenia  $\mu$  i macierzą kowariancji  $\frac{\Sigma}{T}$ . Natomiast

estymator  $\hat{\Sigma}(\mathbf{I}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mathbf{X}_t - \hat{\mu}(\mathbf{I}_T))(\mathbf{X}_t - \hat{\mu}(\mathbf{I}_T))'$  ma rozkład Wisharta z  $T$  stopniami swobody i macierzą kowariancji  $\frac{\Sigma^{-1}}{T}$ . Założono, że środki elipsoid nie-

pełności są modalnymi rozkładów estymatorów  $\hat{\mu}(\mathbf{I}_T)$  i  $\hat{\Sigma}^{-1}(\mathbf{I}_T)$ . Niech  $\hat{\mu}(\mathbf{i}_T)$ ,  $\hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T)$  oznaczają wartości estymatorów odpowiednio  $\hat{\mu}(\mathbf{I}_T)$ ,  $\hat{\Sigma}(\mathbf{I}_T)$ .

Elipsoidalny zbiór niepewności parametru położenia  $\mu$  ma postać (Meucci, 2005; 2006):

$$\Theta_\mu = \{\mu : (\mu - \hat{\mu}(\mathbf{i}_T))' \mathbf{S}_\mu^{-1}(\mathbf{i}_T) (\mu - \hat{\mu}(\mathbf{i}_T)) \leq q_\mu^2\}, \quad (3)$$

\* Na przykład Tütüncü i Koenig (2004) konstruują zbiory niepewności w postaci przedziałów. Goldfarb i Iyengar (2001) wykorzystują przedział jako zbiór niepewności dla wektora wartości oczekiwanych, natomiast zbiór niepewności dla macierzy kowariancji konstruują za pomocą modeli czynnikowych.

gdzie  $\mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\mathbf{i}_T) = \frac{1}{T-2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T)$  to estymator macierzy kowariancji dla  $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{I}_T)$ :

$$\mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\mathbf{i}_T) = \frac{1}{T-2} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T), \quad (4)$$

$q_{\boldsymbol{\mu}}^2$  – kwadrat promienia elipsoidy (3) będący kwantylem rzędu  $p_{\boldsymbol{\mu}}$  rozkładu  $\chi^2$  z  $k$  stopniami swobody ( $q_{\boldsymbol{\mu}}^2 = \chi_k^2(p_{\boldsymbol{\mu}})$ ).

Elipsoidalny zbiór niepewności macierzy kowariancji  $\boldsymbol{\Sigma}$  ma postać (Meucci, 2005; 2006):

$$\Theta_{\boldsymbol{\Sigma}} = \{\boldsymbol{\Sigma} : \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T))' \mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}^{-1}(\mathbf{i}_T) \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T)) \leq q_{\boldsymbol{\Sigma}}^2\}, \quad (5)$$

gdzie operator *vech* to wektor, którego składowymi są elementy głównej przekątnej i poniżej głównej przekątnej macierzy kowariancji;

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\text{Mod}}(\mathbf{i}_T) = \frac{T}{T+k+1} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T)$  – estymator modalnej rozkładu dla  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\mathbf{I}_T)$ ;  $\mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{i}_T)$

– estymator macierzy kowariancji modalnej dla  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\mathbf{I}_T)$ :

$$\mathbf{S}_{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}}(\mathbf{i}_T) = \frac{2T^2}{(T+k+1)^3} (\mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{i}_T) \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{i}_T)) \mathbf{D}_k)^{-1}, \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{D}_k$  to macierz duplikacji;  $q_{\boldsymbol{\Sigma}}^2$  – kwadrat promienia elipsoidy (5), kwantyl rzędu  $p_{\boldsymbol{\Sigma}}$  rozkładu  $\chi^2$  z  $k$  stopniami swobody ( $q_{\boldsymbol{\Sigma}}^2 = \chi_k^2(p_{\boldsymbol{\Sigma}})$ ).

Rozważane elipsoidy są elipsoidami o najmniejszej objętości, które z określonym prawdopodobieństwem pokrywają nieznaną wartość parametru. Im większa elipsoidalna, czyli im większe prawdopodobieństwo pokrycia przez nią nieznaną wartość parametru, tym inwestor określający to prawdopodobieństwo cechuje się większą awersją do ryzyka estymacji parametru.

Jeżeli elipsoidalna  $\Theta_{\boldsymbol{\mu}}$  ma postać (3), a  $\Theta_{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T)$ , wówczas zadanie (1) sprowadza się do:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{C}} \{\mathbf{p}' \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{i}_T) - \gamma_{\boldsymbol{\mu}} \sqrt{\mathbf{p}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p}}\} \quad (7)$$

przy warunku  $\sqrt{\mathbf{p}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p}} \leq v$ , gdzie  $\gamma_{\boldsymbol{\mu}} = \sqrt{\frac{q_{\boldsymbol{\mu}}^2}{T-2}}$ .

Jeżeli  $\Theta_{\mu} = \hat{\mu}(\mathbf{i}_T)$ , natomiast elipsoida niepewności  $\Theta_{\Sigma}$  ma postać (5), wówczas zadanie (1) sprowadza się do:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{C}} \mathbf{p}' \hat{\mu}(\mathbf{i}_T)$$

przy warunku  $\sqrt{\mathbf{p}' \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p}} \leq \gamma_{\Sigma}$ , gdzie  $\gamma_{\Sigma} = \frac{v}{\sqrt{\frac{T}{T+k+1} + \sqrt{\frac{2T^2 q_{\Sigma}^2}{(T+k+1)^3}}}}$ . (8)

Jeżeli elipsoida  $\Theta_{\mu}$  ma postać (3), natomiast elipsoida niepewności  $\Theta_{\Sigma}$  ma postać (5), wówczas zadanie (1) sprowadza się do:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{C}} \{\mathbf{p}' \hat{\mu}(\mathbf{i}_T) - \gamma_{\Sigma} \sqrt{\mathbf{p}' \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p}}\} \quad (9)$$

przy warunku  $\mathbf{p}' \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p} \leq \gamma_{\Sigma}$ .

Jeśli  $\Theta_{\mu} = \hat{\mu}(\mathbf{i}_T)$  oraz  $\Theta_{\Sigma} = \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T)$ , wówczas zadanie (1) sprowadza się do klasycznego zadania modelu średnia-wariancja w postaci:

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathcal{C}} \mathbf{p}' \hat{\mu}(\mathbf{i}_T) \quad (10)$$

przy warunku  $\sqrt{\mathbf{p}' \hat{\Sigma}(\mathbf{i}_T) \mathbf{p}} \leq v$ .

Portfele będące rozwiązaniami zadań 7-9 będą nazywane portfelami odpornymi, natomiast portfele będące rozwiązaniem zadania 10 będą nazywane portfelami klasycznymi.

W celu dokładnego i efektywnego numerycznie rozwiązania zadań 7-9 można je przekształcić do zadań optymalizacji stożkowej drugiego rzędu (ang. second order cone program – SOCP)\*.

Spełnienie założenia normalności wektorów  $\mathbf{R}_t$  stóp zwrotu umożliwia bezpośrednią interpretację probabilistyczną elipsoidalnych zbiorów niepewności. Jeśli rozkład stóp zwrotu nie jest rozkładem normalnym, wówczas trudno dobrać wartości promieni elipsoid mających prostą interpretację probabilistyczną. Niemniej jednak przeprowadzenie wówczas analizy empirycznej przy specyfikacjach określonych pod warunkiem założenia normalności jest nadal użyteczne, istota metody się nie zmienia.

\* Optymalizacja stożkowa jest rodzajem programowania wypukłego z liniową funkcją celu, zbiór dopuszczalnych rozwiązań jest przecięciem hiperpłaszczyzny rzeczywistej i stożka.

## 2. Etapy procedury badawczej

Cel artykułu jest realizowany w następujących etapach badawczych:

1. Generowanie za pomocą statystycznej symulacji wielowymiarowego rozkładu stóp zwrotu  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_k)'$  o zadanych parametrach.
2. Generowanie  $N$  próbek ( $N = 5000$ ) z wysymulowanego rozkładu.
3. Optymalizacja klasyczna i odporna portfeli na podstawie otrzymanych próbek przy założeniu macierzy kowariancji i wektora wartości oczekiwanych z rozkładu.
4. Analiza liczby i wielkości przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli oraz rzeczywistych charakterystyk portfeli w zależności od następujących wariantów:
  - wartości dopuszczalnego ryzyka,
  - liczebności próbek,
  - wielkości elipsoid niepewności dla macierzy kowariancji i wektora wartości oczekiwanych,
5. Analiza porównawcza uzyskanych wyników dla portfeli optymalizowanych klasycznie i odpornie.

Wymienione etapy badawcze przeprowadzono dla różnych typów rozkładów stóp zwrotu z uwzględnieniem wybranych wariantów.

## 3. Rozkłady populacji stóp zwrotu wykorzystane w analizie empirycznej

Oprócz rozkładu normalnego jednym z rozkładów wykorzystanych w analizie empirycznej jest uogólniony rozkład t-Studenta. Funkcja gęstości jednowymiarowego uogólnionego rozkładu t-Studenta ma postać:

$$f(r)_{\mu, \lambda, \nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\lambda}{\pi\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\lambda(r-\mu)^2}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (11)$$

gdzie  $\mu, \lambda$  są parametrami odpowiednio położenia i skali,  $\nu$  jest liczbą stopni swobody. Wartość oczekiwana oraz wariancja zmiennej losowej  $R$  mają postać:

$$E(R) = \text{Mod}(R) = \mu, \quad \text{dla } \nu > 1, \quad (12)$$

$$D^2(R) = \frac{1}{\lambda} \frac{\nu}{\nu-2}, \quad \text{dla } \nu > 2. \quad (13)$$

W analizie empirycznej jest również rozważany skośny rozkład t-Studenta o następującej funkcji gęstości (Zhu, Galbraith, 2009):

$$f(r)_{\lambda, \nu} = \begin{cases} bc \left( 1 + \frac{1}{\nu-2} \left( \frac{br+a}{1-\lambda} \right)^2 \right)^{-(\nu+1)/2}, & r < -a/b, \\ bc \left( 1 + \frac{1}{\nu-2} \left( \frac{br+a}{1+\lambda} \right)^2 \right)^{-(\nu+1)/2}, & r \geq -a/b, \end{cases} \quad (14)$$

gdzie  $\nu > 2$ ,  $-1 < \lambda < 1$ . Stałe  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  mają postać odpowiednio:

$$a = 4\lambda c \left( \frac{\nu-2}{\nu-1} \right) \quad (15)$$

$$b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2 \quad (16)$$

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (1 + 3\lambda^2 - a^2) \quad (17)$$

Dla zmiennej losowej  $R$  o funkcji gęstości (14) zachodzi  $E(R) = 0$ ,  $D^2(R) = 1$ .

Ocena ryzyka portfeli jest także dokonywana przy założeniu rozkładu Gumbela, który jest szczególnym przypadkiem rozkładu GEV (ang. *Generalized Extreme Value*). Funkcja gęstości rozkładu Gumbela zmiennej losowej  $R$  ma postać (Gumbel, 1954):

$$f(r) = \frac{ze^{-z}}{\lambda}, \quad \text{gdzie } z = e^{-\frac{r-\mu}{\lambda}}, \quad (18)$$

natomiast  $\mu, \lambda$  są parametrami odpowiednio położenia i skali. Wartość oczekiwana zmiennej losowej  $R$  o tym rozkładzie ma postać:

$$E(R) = \mu + \lambda\gamma, \quad (19)$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą Eulera-Mascheroniego, a wariancja wyraża się wzorem:

$$D^2(R) = \frac{\pi^2}{6} \lambda^2. \quad (20)$$

W analizie empirycznej uwzględniono również rozkład Laplace'a, charakteryzowany następującą funkcją gęstości:

$$f(r)_{\mu,\lambda} = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|r-\mu|}{\lambda}}. \quad (21)$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej  $R$  o tym rozkładzie są następujące:

$$E(R) = \mu, \quad (22)$$

$$D^2(R) = 2\lambda^2. \quad (23)$$

#### 4. Wyniki analizy empirycznej

Na wstępie badania przyjęto założenie, że analizowane portfele są dwuskładnikowe, a stopy zwrotu tych dwóch klas aktywów są nieskorelowane. Metodą statystycznej symulacji wygenerowano  $N$  próbek ( $N = 5000$ ) pochodzących z dwuwymiarowego rozkładu normalnego o następujących parametrach bazowych:

$$\boldsymbol{\mu} = (1,2)' \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Na podstawie każdej z nich optymalizowano klasycznie i odpornie portfele, przeprowadzając kolejne analizy. Badano odsetek przypadków, w których rzeczywiste ryzyko portfela przekraczało poziom dopuszczalny  $\nu$  oraz wartość przekroczenia, która pokazywała, o ile średnio rzeczywiste ryzyko portfela przekroczyło wartość  $\nu$  (nazwano je w skrócie średnie przekroczenie). Opis, założenia oraz wyniki poszczególnych analiz zawierają punkty **A)**-**E)**.

Wymienione w rozdziale drugim etapy procedury badawczej przeprowadzono najpierw przy założeniu wielowymiarowego rozkładu normalnego populacji stóp zwrotu o ustalonych parametrach. We wszystkich analizach przyjęto następujące założenia co do parametrów modeli, o ile dany parametr nie był zmieniany na potrzeby poszczególnych analiz:

- liczebność próby,  $n = 50$ ,
- dopuszczalne ryzyko portfela,  $\nu = 2$ ,
- prawdopodobieństwo określające wielkość promienia elipsoidy dla wektora  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $p_{\boldsymbol{\mu}} = 0$ ,
- prawdopodobieństwo określające wielkość promienia elipsoidy dla macierzy  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $p_{\boldsymbol{\Sigma}} = 0,25$ .

**A)** Analiza liczby i wielkości przekroczeń wartości dopuszczalnego ryzyka przez ryzyko portfela o rzeczywistych charakterystykach w postaci  $E(\mathcal{R}_p) = \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}$  oraz  $D(\mathcal{R}_p) = \sqrt{\mathbf{p}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}}$ , gdzie  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  mają postać (24) i (25) w zależności od zmian wartości  $\nu$  dopuszczalnego ryzyka.

Wyniki zawarte w tabeli 1 wskazują, że w podejściu alokacji odpornej odsetek przypadków, w których rzeczywiste ryzyko portfela przekracza poziom dopuszczalny, jest prawie dwukrotnie mniejszy niż w podejściu klasycznym. Liczba przekroczeń nie zależy od wartości dopuszczalnego ryzyka zarówno w przypadku portfeli klasycznych, jak i odpornych. Średnie przekroczenia w przypadku odpornym są znacznie mniejsze niż w klasycznej alokacji.

Tabela 1

Zależność przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od wartości dopuszczalnego ryzyka przy założeniu normalności rozkładu

| Dopuszczalne<br>ryzyko $\nu$ portfela | Procentowa liczba przekroczeń |                  | Średnie przekroczenie |                  |
|---------------------------------------|-------------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
|                                       | portfele klasyczne            | portfele odporne | portfele klasyczne    | portfele odporne |
| 1,2                                   | 53,46                         | 26,28            | 0,24                  | 0,18             |
| 1,6                                   | 52,82                         | 25,68            | 0,33                  | 0,25             |
| 2,0                                   | 53,42                         | 26,10            | 0,33                  | 0,29             |
| 2,4                                   | 51,46                         | 25,76            | 0,49                  | 0,36             |
| 2,8                                   | 52,30                         | 25,44            | 0,53                  | 0,41             |
| 3,2                                   | 52,94                         | 25,36            | 0,49                  | 0,41             |
| 3,6                                   | 53,84                         | 26,16            | 0,32                  | 0,29             |

**B)** Analiza rzeczywistych charakterystyk portfela w zależności od zmian wartości  $\nu$  dopuszczalnego ryzyka.

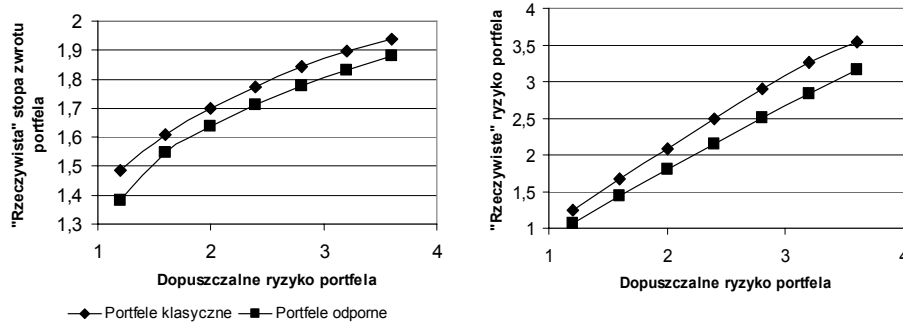
Otrzymane wyniki zilustrowano na rysunku 1. Portfele odporne cechują się mniejszą rzeczywistą stopą zwrotu i rzeczywistym ryzykiem niż portfele klasyczne. Wraz ze wzrostem wartości dopuszczalnego ryzyka wzrastają różnice między wartościami rzeczywistego ryzyka portfeli klasycznych i odpornych. W przypadku rzeczywistej oczekiwanej stopy zwrotu różnice te są mniejsze i utrzymują się średnio na stałym poziomie.

**C)** Analiza rzeczywistych charakterystyk portfela w zależności od liczebności próby.

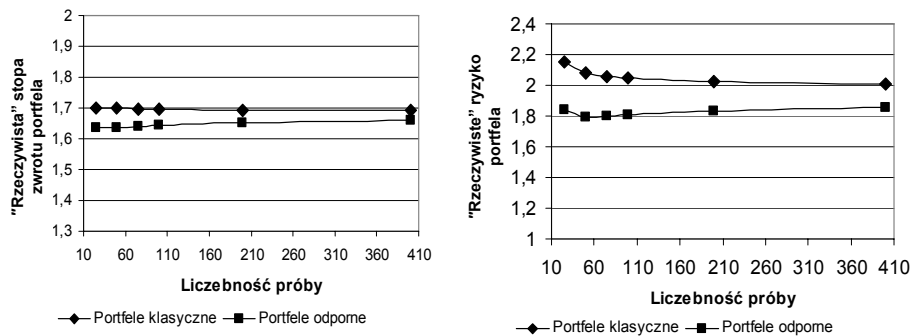
Wykresy zależności rzeczywistych charakterystyk portfeli od liczebności próby przedstawia rysunek 2.

Portfele odporne cechują się mniejszą rzeczywistą stopą zwrotu i rzeczywistym ryzykiem niż portfele klasyczne, które w przypadku odpornym jest średnio rzecz biorąc wyraźnie niższe od poziomu dopuszczalnego równego 2. Rzeczywista stopa zwrotu z portfela nie zależy od liczebności próby zarówno

w przypadku portfeli klasycznych, jak i odpornych. Liczebność próby nie ma również istotnego wpływu na rzeczywiste ryzyko portfeli odpornych. Natomiast w przypadku portfeli klasycznych wzrost liczby obserwacji próby zwiększa dokładność estymacji parametrów i powoduje, że rzeczywiste ryzyko portfela zbliża się do ustalonej wartości ryzyka dopuszczalnego.



Rys. 1. Zależność rzeczywistych charakterystyk portfeli od dopuszczalnego ryzyka przy założeniu normalności rozkładu populacji



Rys. 2. Zależność rzeczywistych charakterystyk portfeli od liczebności próby przy założeniu normalności rozkładu populacji

**D)** Analiza liczby i wartości przekroczeń wartości dopuszczalnego ryzyka w zależności od liczebności próby.

Tabela 2

Zależność przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od liczebności próby przy założeniu normalności rozkładu

| Liczebność próby | Procentowa liczba przekroczeń |                  | Średnie przekroczenie |                  |
|------------------|-------------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
|                  | portfele klasyczne            | portfele odporne | portfele klasyczne    | portfele odporne |
| 25               | 53,18                         | 32,10            | 0,61                  | 0,50             |
| 50               | 52,40                         | 24,88            | 0,39                  | 0,30             |
| 75               | 53,14                         | 22,94            | 0,30                  | 0,21             |
| 100              | 52,70                         | 21,40            | 0,27                  | 0,19             |
| 200              | 51,42                         | 18,28            | 0,18                  | 0,12             |
| 400              | 51,12                         | 14,04            | 0,12                  | 0,08             |

Wyniki tej części analizy zawarte w tabeli 2 wskazują, że portfele odporne cechują się średnią wartością przekroczeń oraz mniejszą procentową liczbą przekroczeń niż portfele klasyczne. Procentowa liczba przekroczeń utrzymuje się raczej na stałym poziomie przy zmianie liczebności próby, z czego można wnioskować, że jest od niej niezależna w przypadku portfeli klasycznych. Odmienny wniosek otrzymano dla portfeli odpornych, dla których przy wzroście liczebności próby maleje liczba przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli. Natomiast średnie przekroczenia maleją w podobny sposób wraz ze wzrostem liczebności próby zarówno w przypadku portfeli klasycznych, jak i odpornych.

E) Analiza liczby i wartości przekroczeń dopuszczalnego ryzyka w zależności od prawdopodobieństw  $p_{\mu}$ ,  $p_{\Sigma}$ .

Wyniki symulacji przedstawiające zależności przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od prawdopodobieństw określających wielkości elipsoid niepewności zawiera tabela 3, natomiast wykresy tych zależności dla procentowych przekroczeń zamieszczono na rysunkach 3 i 4.

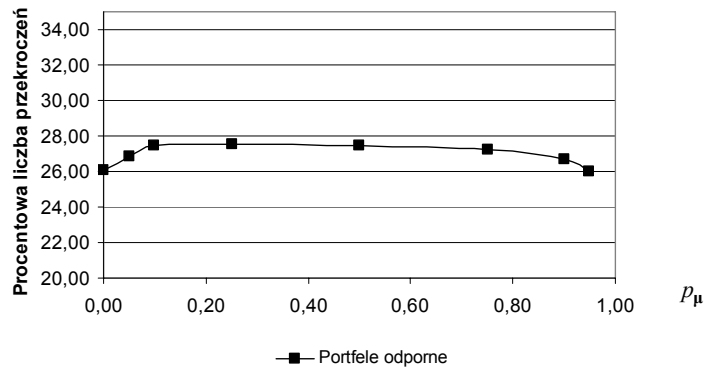
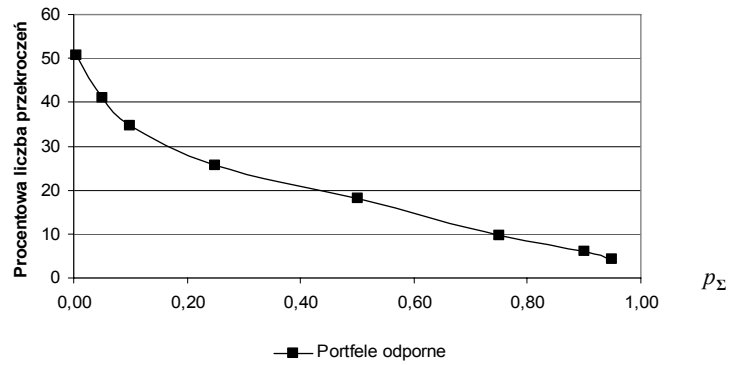
Tabela 3

Zależność przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfela od prawdopodobieństw określających wielkości elipsoid niepewności przy założeniu normalności rozkładu

| $p_{\mu}$ | Procentowa liczba przekroczeń |                  | Średnie przekroczenie |                  | $p_{\Sigma}$ | Procentowa liczba przekroczeń |                  | Średnie przekroczenie |                  |
|-----------|-------------------------------|------------------|-----------------------|------------------|--------------|-------------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
|           | portfele klasyczne            | portfele odporne | portfele klasyczne    | portfele odporne |              | portfele klasyczne            | portfele odporne | portfele klasyczne    | portfele odporne |
| 1         | 2                             | 3                | 4                     | 5                | 6            | 7                             | 8                | 9                     | 10               |
| 0,00      | 53,34                         | 26,04            | 0,41                  | 0,31             | 0,01         | 52,32                         | 50,68            | 0,41                  | 0,40             |
| 0,05      | 53,5                          | 26,86            | 0,39                  | 0,31             | 0,05         | 53,24                         | 41,08            | 0,40                  | 0,35             |

cd. tabeli 3

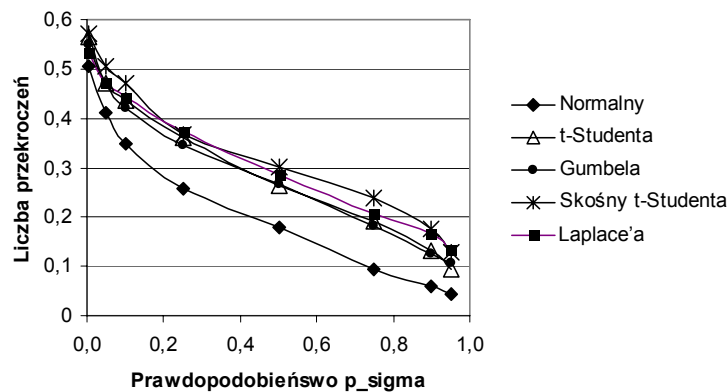
| 1    | 2     | 3     | 4    | 5    | 6    | 7     | 8     | 9    | 10   |
|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|
| 0,10 | 52,1  | 27,46 | 0,40 | 0,30 | 0,10 | 52,42 | 34,72 | 0,39 | 0,32 |
| 0,25 | 52,12 | 27,52 | 0,41 | 0,32 | 0,25 | 52,82 | 25,72 | 0,40 | 0,30 |
| 0,50 | 51,36 | 27,46 | 0,41 | 0,30 | 0,50 | 53,92 | 18,02 | 0,41 | 0,28 |
| 0,75 | 52,44 | 27,26 | 0,40 | 0,30 | 0,75 | 53,38 | 9,52  | 0,39 | 0,24 |
| 0,90 | 53,14 | 26,68 | 0,40 | 0,31 | 0,90 | 52,28 | 5,98  | 0,40 | 0,24 |
| 0,95 | 52,34 | 26    | 0,41 | 0,32 | 0,95 | 52,42 | 4,28  | 0,39 | 0,21 |

Rys. 3. Zależność procentowych przekroczeń od prawdopodobieństwa  $p_\mu$ Rys. 4. Zależność procentowych przekroczeń od prawdopodobieństwa  $p_\Sigma$

Liczba procentowych przekroczeń oraz średnie przekroczenia nie zależą od wartości prawdopodobieństwa  $p_\mu$ , natomiast maleją wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa  $p_\Sigma$ .

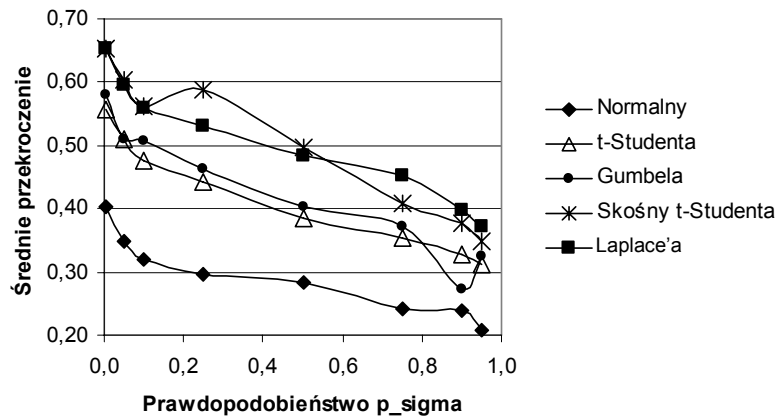
Dalszą część analizy empirycznej przeprowadzono dla rozkładów wymienionych w rozdziale trzecim. Analizowano wpływ promienia elipsoidy determinowanej przez prawdopodobieństwo  $p_\Sigma$  oraz wpływ liczby obserwacji w próbie na liczbę przekroczeń wartości dopuszczalnego ryzyka portfela.

Na rysunku 5 przedstawiono wyniki analiz wpływu zmian prawdopodobieństwa  $p_\Sigma$  na liczbę przekroczeń wartości dopuszczalnego ryzyka portfela. Punkty na wykresie odpowiadające wartości  $p_\Sigma = 0$  reprezentują przypadek portfeli klasycznych. Widać, że średnia liczba przekroczeń jest najmniejsza w przypadku rozkładu normalnego (około 0,52), a nieco większa dla pozostałych rozkładów (0,55-0,57). Różnica jednak jest niewielka. Analizując natomiast portfele odporne, dla niezerowych wartości  $p_\Sigma$  można zauważyć, że zwiększa się różnica między wynikami dla rozkładu normalnego i pozostałych rozkładów. Przykładowo dla skrajnej wartości  $p_\Sigma = 0,95$  odsetek przekroczeń przy rozkładzie normalnym wynosi około 0,05, natomiast dla pozostałych rozkładów jest on co najmniej dwukrotnie wyższy (0,1-0,15). Największy odsetek przekroczeń jest notowany prawie zawsze dla skośnego rozkładu  $t$ -Studenta.



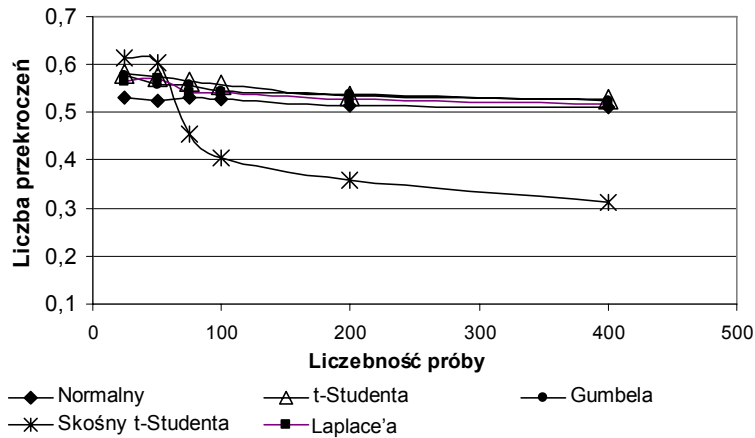
Rys. 5. Zależność prawdopodobieństwa  $p_\Sigma$  od liczby przekroczeń wartości dopuszczalnego ryzyka portfela dla różnych rozkładów

Takiej tendencji nie obserwuje się w przypadku średniego przekroczenia (rysunek 6). Tutaj także dla portfeli klasycznych są obserwowane duże różnice. Najmniejsze średnie przekroczenia występują przy rozkładzie normalnym (około 0,4). Wyraźnie wyższe są dla rozkładów  $t$ -Studenta oraz Gumbela (0,55-0,57), a także dla skośnego rozkładu  $t$ -Studenta oraz rozkładu Laplace'a (0,65). Analizowane bezwzględne różnice zostają zachowane także dla portfeli odpornych – w skrajnym przypadku  $p_{\Sigma} = 0,95$  średnie przekroczenia wynoszą około 0,2 przy rozkładzie normalnym, natomiast około 0,33 przy rozkładzie  $t$ -Studenta, a także Gumbela oraz 0,35-0,38 dla skośnego rozkładu  $t$ -Studenta i rozkładu Laplace'a. Patrząc jednak relatywnie, średnie przekroczenia w rozkładzie normalnym są nawet dwukrotnie niższe niż w pozostałych rozkładach.

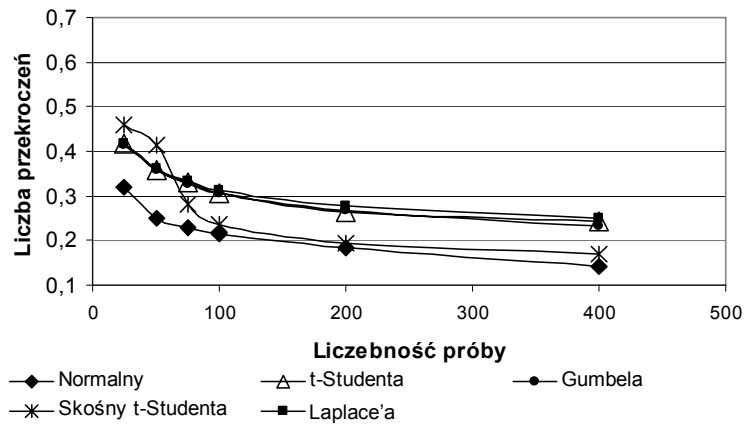


Rys. 6. Zależność prawdopodobieństwa  $p_{\Sigma}$  od średniego przekroczenia wartości dopuszczalnego ryzyka portfela dla różnych rozkładów

Rysunki 7 i 8 ilustrują wpływ liczebności próby na liczbę przekroczeń dopuszczalnego ryzyka przy różnych rozkładach stóp zwrotu odpowiednio dla portfeli klasycznych i odpornych. Natomiast rysunki 9 i 10 przedstawiają zależności między średnim poziomem przekroczenia dopuszczalnego ryzyka przy różnych rozkładach stóp zwrotu a liczebnością próby przy różnych rozkładach stóp zwrotu odpowiednio dla portfeli klasycznych i odpornych.



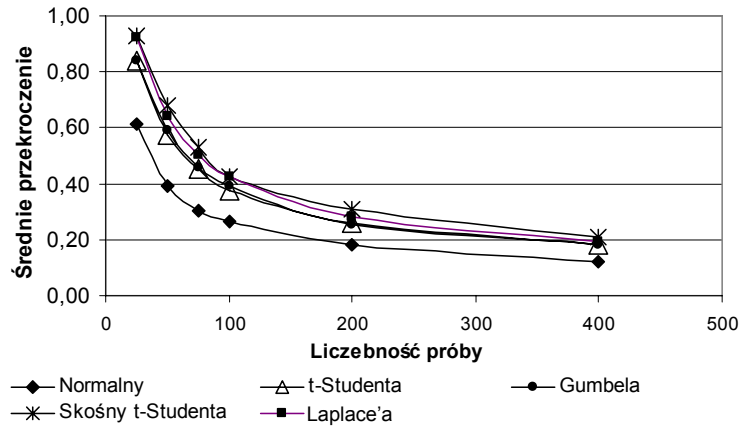
Rys. 7. Zależność liczby przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli klasycznych od liczebności próby dla różnych rozkładów



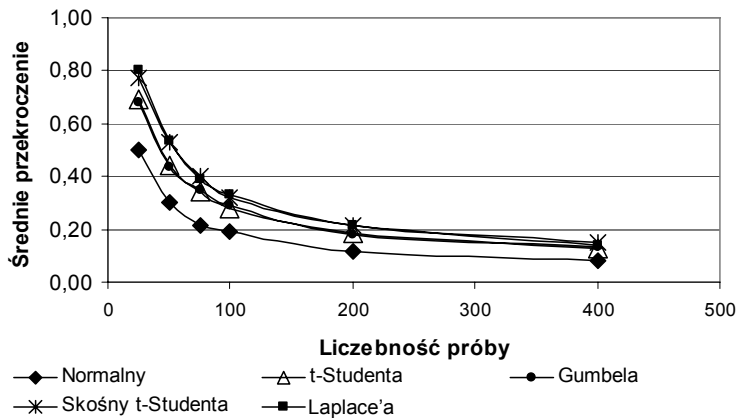
Rys. 8. Zależność liczby przekroczeń dopuszczalnego ryzyka portfeli odpornych od liczebności próby dla różnych rozkładów

Zarówno dla liczby przekroczeń (rysunki 7 i 8), jak i średniego poziomu przekroczenia (rysunki 9 i 10) wykresy dla portfeli klasycznych oraz odpornych są nieznacznie przesunięte względem siebie, lecz mają podobny kształt. Można zatem wnioskować, że wpływ liczby obserwacji przy różnych typach rozkładów jest w omawianym kontekście mniej więcej taki sam dla portfeli klasycznych, jak również odpornych. Zaobserwowane przesunięcie (wykresy dla portfeli odpornych są niżej) ilustruje ogólną przewagę podejść odpornych nad klasycznymi.

Analizując odsetek przekroczeń, można zauważyć, że przy rozkładzie normalnym odsetek przekroczeń w podejściu odpornym jest wyraźnie niższy niż dla pozostałych rozkładów, z wyjątkiem skośnego rozkładu  $t$ -Studenta, lecz tylko dla dużych prób. Dla portfeli klasycznych także wyróżnia się skośny rozkład  $t$ -Studenta, dla którego przy dużych próbach liczba przekroczeń jest wyraźnie niższa niż w przypadku pozostałych rozkładów, w tym także normalnego.



Rys. 9. Zależność średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfeli klasycznych od liczebności próby dla różnych rozkładów



Rys. 10. Zależność średniego przekroczenia dopuszczalnego ryzyka portfeli odpornych od liczebności próby dla różnych rozkładów

Odnosząc się natomiast do średniego poziomu przekroczeń, należy zauważyć, że zarówno dla portfeli odpornych, jak i metod klasycznych najmniejsze przekroczenia występują przy rozkładzie normalnym, natomiast największe dla skośnego rozkładu  $t$ -Studenta oraz rozkładu Laplace'a. Obserwacja ta dotyczy zarówno portfeli klasycznych, jak i odpornych.

## Podsumowanie

W artykule badano wpływ błędów estymacji na ryzyko portfela będącego rozwiązaniem problemu maksymalizacji stopy zwrotu z portfela przy ograniczeniu na jego wariancję. Porównywano wyniki zastosowania klasycznego podejścia Markowitza oraz alokacji odpornej, która pozwala na uwzględnienie niepewności związanej z szacowaniem charakterystyk składowych portfela na podstawie próby. Analizy odnoszono do różnych rozkładów populacji stóp zwrotu dzięki zastosowaniu procedur symulacyjnych.

Pokazano, że omówione podejście odporne pozwala uzyskać portfele, które są bezpieczniejsze z punktu widzenia inwestora, biorąc pod uwagę niepewność związaną z szacowaniem ich charakterystyk na podstawie próby. O ile w przypadku klasycznego podejścia Markowitza przy próbie liczącej 50 obserwacji rzeczywiste ryzyko portfela przekraczało założone ryzyko dopuszczalne średnio w 50% przypadków, o tyle dla metod odpornych odsetek ten może być łatwo zmniejszony do kilku procent przede wszystkim poprzez dobór odpowiedniej wartości prawdopodobieństwa  $p_{\Sigma}$  określającego wielkość elipsoidy niepewności dla macierzy kowariancji. Przewaga podejścia odpornego zostaje zachowana także w sytuacji, gdy rozkład stóp zwrotu aktywów składowych nie jest rozkładem normalnym, ale cechuje się asymetrią lub grubymi ogonami. Jednak w takim przypadku własności portfeli odpornych są prawie zawsze gorsze ze względu na liczbę i średni poziom przekroczeń dopuszczalnego ryzyka niż przy założeniu rozkładu normalnego.

## Literatura

- Goldfarb D., Iyengar G. (2001): Robust Portfolio Selection Problem. „Mathematics of Operations Research”, 28, s. 1-38.
- Gumbel E.J. (1954): Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications. Applied mathematics series 33. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards.
- Markowitz H. (1952): Portfolio Selection. „Journal of Finance”, 7.
- Meucci A. (2005): Risk and Asset Allocation. Springer, Berlin.

- Meucci A. (2006): Robust Bayesian Allocation. Working paper.
- Orwat A. (2010): Odporne metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji. „Skuteczne Inwestowanie”, nr 616, s. 49-62, Szczecin,
- Orwat-Acedańska A.: Odporne bayesowskie metody alokacji aktywów a ocena ryzyka portfela akcji. W: Modelowanie preferencji a ryzyko”. Red. T. Trzaskalik. UE, Katowice (w recenzji).
- Stürm J. (1999): Using SeDuMi 1.02, MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. „Optimization Methods and Software”, s. 11-12.
- Tütüncü R.H., Koenig M. (2004): Robust Asset Allocation. „Annals of Operations Research”, 132, s. 157-187.
- Zhu D., Galbraith J. (2009): A Generalized Asymmetric Student-t Distribution with Application to Financial Econometrics. Scientifics Series, Cirano, Montreal.

**THE PORTFOLIO RISK MEASUREMENT  
IN ROBUST ALLOCATION FOR SOME TYPE OF DISTRIBUTION  
– THE SIMULATION APPROACH**

**Summary**

In the paper an impact of estimation errors on risk of the portfolio obtained by maximizing expected return with the variance constraint was discussed. Classical Markowitz approach was compared to robust allocation that accounts for uncertainty about estimated asset characteristics. Using simulations it was shown that for the robust method number of cases when a portfolio true risk exceeds the allowed one is much fewer than in the classical approach. Exact results depend on number of observations, ellipsoid radius for asset covariance matrix in the robust method and a type of asset distribution. It was presented that superiority of the robust approach is less evident when asymmetric or heavy-tailed distributions are concerned instead of the normal one.

**Grażyna Trzpiot**  
**Agnieszka Orwat-Acedańska**

## **KWANTYLOWA ANALIZA STYLU NA PRZYKŁADZIE WYBRANYCH FUNDUSZY INWESTYCYJNYCH AKCJI**

---

---

### **Wprowadzenie**

Jednym z elementów zarządzania portfelem funduszu jest ocena wyników portfela, której dokonuje się za pomocą tzw. przypisywania wyników (ang. performance attribution). Polega ono na przyrównaniu całkowitego zwrotu z inwestycji do zwrotu ze wzorcowego portfela oraz określeniu wartości dodanej będącej nadwyżką stopy zwrotu z portfela ponad stopę wzorcowego (rynkowego) portfela.

Analiza stylu (ang. style analysis) jest statystyczną metodą przypisywania wyników zarządzania portfelem inwestycjom w określone klasy aktywów. Została zapoczątkowana przez Williama Sharpe'a w 1992 roku. Celem czynnikowych modeli analizy stylu jest określenie wpływu inwestycji dokonywanych przez fundusz na stopy zwrotu osiągane przez niego w ustalonym okresie badawczym.

Klasyczny model analizy stylu Sharpe'a jest modelem wielorakiej regresji warunkowej wartości oczekiwanej stopy zwrotu funduszu. Jego parametry (na które są nałożone warunki nieujemności oraz sumowania do jedności) szacuje się metodą najmniejszych kwadratów (MNK). Jednak klasyczna analiza regresji daje niepełny obraz zależności pomiędzy zmiennymi, koncentrując uwagę jedynie na centralnej części rozkładu zmiennej objaśnianej. Fakt ten może mieć poważne konsekwencje dla poprawnego wnioskowania na temat wpływu czynników modelu na zmiany zmiennej objaśnianej w sytuacjach braku normalności rozkładu składnika losowego stóp zwrotu, heteroskedastyczności, asymetrii rozkładu, istnienia grubych ogonów, obserwacji nietypowych lub ogólnie – niepewności co do rodzaju rozkładu.

W artykule uogólniono klasyczną analizę stylu Sharpe'a na kwantylową analizę stylu, proponując tym samym podejście odporne na odstępstwa od klasycznych założeń modelu Sharpe'a. Celem jest badanie wpływu pewnych czynników na cały warunkowy rozkład stóp zwrotu wybranych funduszy inwestycyjnych akcji oraz ocena przydatności podejścia kwantylowego w analizie

stylu tych funduszy. Badanie empiryczne przeprowadzono w kilku aspektach. Po pierwsze, oceniono, czy dla danego funduszu oszacowane struktury udziałów stylu są jednorodne w różnych częściach rozkładu. Po drugie, zanalizowano, czy fundusze są zróżnicowane pod względem ekspozycji stylu w danej części rozkładu. Ponadto porównano wyniki estymacji kwantylowej z estymacją klasyczną w modelach analizy stylu.

W rozdziale pierwszym omówiono pokrótce charakter działalności inwestycyjnej polskich funduszy inwestycyjnych akcji. W rozdziale drugim przedstawiono teorię klasycznego modelu analizy stylu Sharpe'a. Omówiono problem estymacji przedziałowej i weryfikacji hipotezy istotności parametrów tego modelu, wykorzystując podejście Andrews'a. Trzeci rozdział poświęcono kwantylowej analizie stylu. Omówiono w nim istotę modelu oraz przedstawiono jeden ze sposobów estymacji przedziałowej i weryfikacji istotności parametrów oraz ich różnic, wykorzystując podejście nieparametryczne. Ostatni rozdział zawiera wyniki analizy empirycznej.

## 1. Portfele inwestycyjne polskich funduszy inwestycyjnych akcji

Fundusze inwestycyjne akcji są uważane za najbardziej ryzykowne. Przynoszą ponadprzeciętne wyniki w czasie hossy, natomiast w czasie bessy zazwyczaj generują duże straty. Fundusze akcji inwestują przede wszystkim w akcje. Inwestycje w instrumenty pochodne są dopuszczalne dla zabezpieczenia przed ryzykiem, z uwzględnieniem celu inwestycyjnego. Ogólnie, udział akcji w portfelach funduszy inwestycyjnych akcji wynosi 60-100%, natomiast przybliżony średni udział akcji jest na poziomie 90%. Wyróżnia się trzy podstawowe kategorie tych funduszy:

- aktywne, w których udział akcji wynosi co najmniej 66%,
- indeksowe, w których co najmniej 90% aktywów stanowi portfel lokat odwzorowujących skład określonego indeksu rynku akcji,
- sektorowe, w przypadku których minimalny udział akcji spółek należących do określonego sektora w aktywach wynosi 66%.

## 2. Klasyczny model analizy stylu Sharpe'a

Zależność między stopą zwrotu funduszu a stopami zwrotu indeksów reprezentujących stopy zwrotu z inwestycji w klasy aktywów dostępne na rynku w czasie  $t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  ma postać:

$$R_t = \beta_1 F_{t1} + \beta_2 F_{t2} + \dots + \beta_k F_{tk} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie:  $R_t$  – stopa zwrotu funduszu w czasie  $t$ ;  $F_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  – stopa zwrotu  $i$ -tego indeksu stylu w czasie  $t$ ;  $\beta_i$  –  $i$ -ty parametr modelu będący  $i$ -tym czynnikiem wrażliwości warunkowej oczekiwanej stopy  $R_t$  na stopę  $F_{it}$  ( $i$ -ty udział stylu);  $\varepsilon_t$  – składniki losowe.

Zapisano wektory:  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_T)'$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)'$ ,  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_T)'$ , gdzie  $\mathbf{F}_t = (F_{t1}, F_{t2}, \dots, F_{tk})'$  oznacza wektor losowy stóp zwrotu indeksów stylu. Wektor  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$  jest wektorem udziałów stylu wyznaczających strukturę portfela  $k$  klas aktywów reprezentowanych przez odpowiednie indeksy. Klasyczny model analizy stylu Sharpe'a (ang. Classical Sharpe'a Style Analysis – CSSA) ma następujące założenia:  $\mathbf{1}'\boldsymbol{\beta} = 1$ ,  $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$ , gdzie  $\mathbf{1}$  jest  $k$ -wymiarowym wektorem jedynek; składniki losowe  $\varepsilon_t$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, takimi że  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $D^2(\varepsilon_t) < \infty$ ; wektory  $(R_t, \mathbf{F}_t')$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  są niezależne o jednakowym rozkładzie; wektory  $\mathbf{F}_t$  i zmienne  $\varepsilon_t$  są nieskorelowane dla każdego  $t = 1, 2, \dots, T$ . Klasyczny sposób weryfikacji istotności parametrów opiera się założeniu normalności rozkładu składnika losowego. Brak normalności powoduje, że estymatory MNK są nieefektywne. Oszacowania wariancji są niepoprawne i w konsekwencji moc klasycznych testów istotności jest niska.

Symbole  $r_t$  i  $\mathbf{f}_t$  oznaczają realizacje zmiennej losowej  $R_t$  oraz wektora losowego  $\mathbf{F}_t$ . Założono, że macierz  $\mathbf{F}$  jest rzędu  $k$ . Model (1) można zapisać:  $E(R_t | \mathbf{f}_t) = \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta}$ . Wektorem estymatorów MNK udziałów stylu Sharpe'a jest wektor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{SMNK}}$ , a wartość  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_k)'$  jest rozwiązaniem zadania (Sharpe, 1992):

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mathbf{f}_t' \mathbf{b})^2 \quad (2)$$

przy warunkach:  $\mathbf{1}'\mathbf{b} = 1$ ,  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  (gdzie  $\mathbf{1}$  to  $k$ -wymiarowy wektor jedynek).

Wartości parametrów  $\boldsymbol{\beta}$  w połączeniu z indeksami odzwierciedlają wzorcowy portfel rynkowy, określany umownie jako „pasywny”. Stopa zwrotu wynikająca z części pasywnej jest reprezentowana przez zwrot stylu portfela, natomiast stopa zwrotu wynikająca z części aktywnej jest reprezentowana przez składnik losowy. Zdolności zarządzającego do wyboru papierów wartościowych, które przyniosły wyższą stopę zwrotu w analizowanym okresie niż rynek, są utożsamiane z efektem selekcji, który może być odniesiony do strategii aktywnej. Efekt alokacji jest odnoszony do strategii pasywnej.

## 2.1. Przedziały ufności i ocena istotności wag stylu Sharpe'a – podejście Andrews'a

Obecność ograniczeń nałożonych na wektor parametrów modelu analizy stylu, w szczególności ograniczenie nieujemności, powoduje, że rozkład wektora estymatorów MNK nie jest znany. Zatem klasyczne podejście do estymacji przedziałowej i weryfikacji hipotezy istotności parametrów modelu nie jest uzasadnione. Jednym z możliwych rozwiązań jest zastosowanie metodologii bayesowskiej lub asymptotycznych przedziałów ufności Andrews'a (Kim, White, Stone, 2005) (aplikacji tych metod w analizie stylu polskich funduszy inwestycyjnych i emerytalnych poświęcono prace Orwat (2008), Orwat (2009), Orwat (2011a)). W przeciwieństwie do podejścia bayesowskiego metoda Andrews'a jest bardziej „wrażliwa” na obecność parametrów, których rzeczywiste wartości mogą być równe 0.

Andrews (1999) pokazał, że asymptotyczny rozkład wektora  $\hat{\beta}_{\text{SMNK}}$  estymatorów można przybliżyć rozkładem wektora losowego  $\hat{\lambda}$ , który jest rozwiązaniem zadania:

$$\min_{\lambda} (\lambda - \mathbf{Z})' \mathbf{M} (\lambda - \mathbf{Z}) \quad (3)$$

$$\text{przy warunkach:} \quad \mathbf{1}' \lambda = 0, \quad \mathbf{Q} \lambda \leq 0, \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{M} = \mathbf{E}(\mathbf{F}_t \mathbf{F}_t')$  –  $(k \times k)$  – wymiarowa macierz,  $\det(\mathbf{M}) > 0$ ;  $\mathbf{Z}$  –  $k$ -wymiarowy wektor losowy w postaci  $\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}$  jest  $k$ -wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie  $N_k(\mathbf{0}, \mathbf{V})$  z macierzą kowariancji  $\mathbf{V} = \mathbf{E}(\varepsilon_t^2 \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t')$ , taką że  $\det(\mathbf{V}) > 0$ ;  $\mathbf{Q} = [q_{ji}]_{j=1, \dots, l; i=1, \dots, k}$ , – macierz, taka że:  $q_{ji} = -1$ , gdy  $\beta_i = 0$  oraz  $q_{ji} = 0$  w pozostałych przypadkach;  $j = 1, \dots, l$ ;  $l$  – ilość zerujących się parametrów.

Na podstawie rozkładu wektora losowego  $\hat{\lambda}$  są wyznaczane asymptotyczne przedziały ufności oraz jest możliwa weryfikacja hipotez o istotności parametrów klasycznego modelu analizy stylu. Etapy estymacji są opisane m.in. w Orwat (2008), Orwat (2011a). Przedział ufności Andrews'a dla  $\beta$  na poziomie ufności  $1 - \alpha$  jest wyznaczany z warunku:

$$P(\hat{\beta}_{\text{SMNK}} - z_U T^{-1/2} \leq \beta \leq \hat{\beta}_{\text{SMNK}} - z_L T^{-1/2}) \approx 1 - \alpha, \quad (5)$$

gdzie  $z_L$  jest  $\alpha/2$ -kwantylem, a  $z_U$  jest  $(1 - \alpha/2)$ -kwantylem.

Realizacje  $\hat{\lambda}$  służą również weryfikacji hipotezy istotności parametru  $\beta_i$  opartej na ocenie odsetka realizacji, dla których  $\beta_i^{(\tau)} = 0$ .

### Odporna estymacja macierzy HAC

Jeżeli składowe wektorów  $(R_t, \mathbf{F}_t')$  dla każdego  $t = 1, 2, \dots, T$  charakteryzują się autokorelacją oraz heteroskedastycznością, wówczas klasyczna ocena macierzy kowariancji  $\mathbf{V} = E(\varepsilon_t^2 \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t')$  jest obciążona.

Do oszacowania macierzy  $\mathbf{V}$  zastosowano estymator Neweya-Westa, który jest odporny na heteroskedastyczność i autokorelację (ang. heteroskedasticity and autocorrelation consistent – HAC)\*:

$$\hat{\text{avar}}_{\text{HAC}}(\mathbf{G}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2 \mathbf{F}_t \mathbf{F}_t' + \frac{1}{T} \sum_{l=1}^L \sum_{t=l+1}^T w_l e_t e_{t-l} (\mathbf{F}_t \mathbf{F}_{t-l}' + \mathbf{F}_{t-l} \mathbf{F}_t'), \quad (6)$$

gdzie  $l$  to opóźnienie ucięcia,  $w_l = 1 - \frac{1}{L+1}$ .

### 3. Kwantylowa analiza stylu

Metoda kwantylowej estymacji, która ma charakter odporny, pozwala na innowacyjną estymację modelu analizy stylu. Podejście kwantylowe do szacowania liniowych modeli regresyjnych zostało zapoczątkowane przez Koenkera i Basseta w 1978 roku\*\*. Punktem wyjścia jest estymacja wektora parametrów  $\boldsymbol{\beta}$  dla próby niezależnych obserwacji  $r_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  na ciągu zmiennych losowych  $R_1, R_2, \dots, R_T$  zgodnych z rozkładem  $P(R_t < r) = \mathfrak{S}(r - \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta})$ , gdzie  $\mathbf{f}_t = (f_{t1}, f_{t2}, \dots, f_{tk})'$  jest kolumną  $(T \times k)$ -wymiarowej macierzy obserwacji  $\mathbf{F}$  oraz rozkład  $\mathfrak{S}$  nie jest znany. Kwantyl z próby rzędu  $\tau$ ,  $0 < \tau < 1$  jest rozwiązaniem zadania:

$$\min_{b \in \mathfrak{R}} \left[ \sum_{t \in \{t: r_t \geq b\}} \tau |r_t - b| + \sum_{t \in \{t: r_t < b\}} (1 - \tau) |r_t - b| \right]. \quad (7)$$

#### 3.1. Model regresji kwantylowej

Liniowy model regresji kwantylowej\*\*\* rzędu  $\tau$ ,  $0 < \tau < 1$  ma postać:

$$R_t = \beta_1^{(\tau)} F_{t1} + \beta_2^{(\tau)} F_{t2} + \dots + \beta_{tk}^{(\tau)} F_{tk} + \varepsilon_t^{(\tau)}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (8)$$

\* Greene (2002).

\*\* Koenker, Basset (1978).

\*\*\* Rozważany w pracy model regresji kwantylowej nie uwzględnia wyrazu wolnego.

gdzie  $\beta_i^{(\tau)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  –  $i$ -ty parametr modelu wyrażający poziom warunkowych zmian efektu wpływu kwantyla na zmiany pozostałych zmiennych modelu,  $\varepsilon_t^{(\tau)}$  – składniki losowe typu i.i.d. Jedynym założeniem modelu (8) jest postać warunkowej funkcji rozkładu kwantyla rzędu  $\tau$ :  $Q_\tau(R_t | \mathbf{f}_t) = \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta}^{(\tau)}$ , gdzie  $\boldsymbol{\beta}^{(\tau)} = (\beta_1^{(\tau)}, \beta_2^{(\tau)}, \dots, \beta_k^{(\tau)})'$  oraz  $Q_\tau(\varepsilon_t^{(\tau)} | \mathbf{f}_t) = 0$ . Rozkład niezależnych zmiennych losowych  $\varepsilon_t^{(\tau)}$  nie jest wyspecyfikowany, co jest zaletą w aspekcie odporności na obserwacje odstające, które są trudne do identyfikacji w przypadku regresji wielorakiej. Jeśli  $\boldsymbol{\beta}(\tau)$  nie zależy od  $\tau$ , to model kwantylowy redukuje się do modelu  $E(R_t | \mathbf{f}_t) = \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta}$  ze stałą wariancją błędu dopasowania. Jeśli  $\boldsymbol{\beta}^{(\tau)}$  zależy od  $\tau$ , model specyfikuje wariancję, taką że kwantyl rozkładu zmiennej  $R_t$  zależy od  $\mathbf{f}_t$ . Estymacja modelu\* jest dokonywana dla ustalonego kwantyla rzędu  $\tau$ . Zakładając, że obserwacje  $r_t$  stanowią próbę losową procesu regresji  $u_t = r_t - \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta}$  o nieznannej dystrybuancie  $\mathfrak{T}$ , Koenker i Bassett (1978) zdefiniowali estymator  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{QR}^{(\tau)}$  regresji kwantowej rzędu  $\tau$ , którego wartość  $\mathbf{b}$  jest rozwiązaniem zadania\*\*:

$$\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k} \left[ \sum_{t \in \{t: r_t \geq \mathbf{f}_t' \mathbf{b}\}} \tau |r_t - \mathbf{f}_t' \mathbf{b}| + \sum_{t \in \{t: r_t < \mathbf{f}_t' \mathbf{b}\}} (1 - \tau) |r_t - \mathbf{f}_t' \mathbf{b}| \right]. \quad (9)$$

Zadanie to ma zawsze rozwiązanie; w przypadku rozkładów ciągłych jest ono jednoznaczne. Ponieważ zadanie (9) można zapisać w postaci zadania programowania liniowego, minimalizacji można dokonać za pomocą algorytmu punktu wewnętrznego (Portnoy, Koenker, 1997). Odporny charakter regresji kwantylowej powoduje, że jest ona zaliczana do nieklasycznych metod modelowania zależności między zmiennymi. Jej aplikacje na polskim rynku kapitałowym można znaleźć w: Trzpiot (2007), Trzpiot (2008), Trzpiot (2009a), Trzpiot (2009b), Trzpiot (2009c), Trzpiot (2010), Trzpiot (2011).

\* Semi-parametryczny charakter estymacji wynika z braku specyfikacji rozkładu składnika losowego. Możliwe jest również parametryczne podejście do estymacji, jeśli składniki losowe mają asymetryczny rozkład Laplace'a.

\*\* W przypadku  $k = 1$ ,  $\mathbf{f}_t = 1$  dla wszystkich  $t$  zadanie (9) redukuje się do postaci (7), a najmniejszy błąd bezwzględny jest wówczas równy medianie.

### 3.2. Model kwantylowej analizy stylu

Dodając ograniczenia na parametry modelu (8), otrzymano model kwantylowej analizy stylu (ang. Quantile Style Analysis):

$$R_t = \beta_1^{(\tau)} F_{t1} + \beta_2^{(\tau)} F_{t2} + \dots + \beta_{ik}^{(\tau)} F_{tik} + \varepsilon_t^{(\tau)}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (10)$$

gdzie:  $R_t$  – stopa zwrotu funduszu w czasie  $t$ ;  $F_{ti}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  – stopa zwrotu  $i$ -tego indeksu stylu w czasie  $t$ ;  $\beta_i^{(\tau)}$  –  $i$ -ty parametr modelu będący  $i$ -tym czynnikiem wrażliwości warunkowego kwantyla rzędu  $\tau$ ,  $0 < \tau < 1$  stopy  $R_t$  na stopę  $F_{ti}$ ;  $\varepsilon_t^{(\tau)}$  – składniki losowe. Założenia modelu (10) są następujące:  $\mathbf{1}' \boldsymbol{\beta}^{(\tau)} = 1$ ,  $\boldsymbol{\beta}^{(\tau)} \geq \mathbf{0}$ ,  $Q_\tau(R_t | \mathbf{f}_t) = \mathbf{f}_t' \boldsymbol{\beta}^{(\tau)}$ ,  $Q_\tau(\varepsilon_t^{(\tau)} | \mathbf{f}_t) = 0$ . Kwantyl stopy zwrotu portfela funduszu jest liniową funkcją ekspozycji stylu. Estymatory parametrów modelu (10) są rozwiązaniem zadania (9) przy ograniczeniach  $\mathbf{1}' \mathbf{b} = 1$ ,  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ .

### 3.3. Przedziały ufności i ocena istotności kwantylowych wag stylu – podejście nieparametryczne

Nieparametryczne metody estymacji przedziałowej i weryfikacji istotności wag stylu są alternatywą dla metod parametrycznych, które w przypadku kwantylowej analizy stylu są zbyt restrykcyjne ze względu na założenia metodologiczne. Jeśli bowiem składniki losowe są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie, wówczas asymptotyczna macierz kowariancji dla  $\boldsymbol{\beta}^{(\tau)}$  ma postać (Hao, Najman, 2007):

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}^{(\tau)}} = \frac{\tau(1-\tau)}{T} \cdot \frac{1}{f_{\varepsilon^{(\tau)}}(0)^2} (\mathbf{F}' \mathbf{F})^{-1}, \quad (11)$$

gdzie  $f_{\varepsilon^{(\tau)}}(0)$  jest nieznaną funkcją gęstości dla  $\varepsilon^{(\tau)}$  (sposób jej szacowania opisuje Koenker<sup>\*</sup>). Jeśli składniki losowe nie są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie, wówczas:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}^{(\tau)}} = \frac{\tau(1-\tau)}{T} \hat{\mathbf{D}}_1^{-1} \hat{\mathbf{D}}_0 \hat{\mathbf{D}}_1^{-1}, \quad (12)$$

<sup>\*</sup> Hao, Najman (2007).

gdzie  $\hat{\mathbf{D}}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{f}_t' \mathbf{f}_t$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_1 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{w}_t \mathbf{f}_t' \mathbf{f}_t$ ,  $\hat{w}_t$  są odpowiednimi wagami\*.

Ze względu na restykcynność założeń dotyczących składników losowych oraz komplikacje numeryczne przy szacowaniu powyższych macierzy, skutocono się na nieparametrycznej metodzie – podejściu bootstrapowym. Nie wymaga ono założenia typu i.i.d, charakteryzuje się odpornością oraz umożliwia zastosowanie odpowiednich procedur numerycznych. Metoda bootstrap została przedstawiona przez Efrona (1979). Jednym z możliwych sposobów estymacji bootstrapowej jest zastosowanie procedury Monte Carlo. Jednak zamiast losowania próbek z hipotetycznego rozkładu, losuje się próbki ze zwracaniem z badanego zbioru danych. Na podstawie zbioru składającego się z  $T$  obserwacji tworzy się nowy zbiór, losując  $T$  elementów, a procedurę losowania powtarza się  $N$  razy ( $N \geq 1000$ ). Odnosząc tę metodę do modelu kwantylowej analizy stylu, każdy utworzony bootstrapowo sposób zbiór par  $(f_{t,i}; r_t)$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $t = 1, 2, \dots, T$ , służy estymacji przedziałowej i weryfikacji istotności wag kwantylowej analizy stylu.

Jedną z możliwości estymacji przedziału opiera się na bootstrapowej ocenie błędu składnika losowego  $s_{boot}$  i aproksymacji rozkładem normalnym:

$\beta_i^{(\tau)} \pm u_{\alpha} s_{boot}$ . W artykule zastosowano alternatywne podejście wykorzystujące kwantyl z próby bootstrapowej. Przykładowo 95% przedział ufności jest wyznaczony przez percentyle rzędu 2,5 oraz 97,5, obliczone na podstawie 10 000 bootstrapowych realizacji  $\beta_i^{(\tau)}$ . Realizacje te służą również weryfikacji hipotezy istotności parametru opartej na ocenie odsetka realizacji, dla których  $\beta_i^{(\tau)} = 0$  ( $\beta_i^{(\tau)}$ ) (hipoteza zerowa  $H_0: \beta_i^{(\tau)} = 0$ , hipoteza alternatywna  $H_1: \beta_i^{(\tau)} > 0$ ). Odsetek ten jest traktowany jako empiryczne  $p$ -value testu.

W niniejszym artykule przeprowadzono również badanie istotności różnic między kwantylowymi wagami stylu różnych rzędów. Zweryfikowano hipotezę:  $H_0: \boldsymbol{\beta}^{(\tau)} = \boldsymbol{\beta}^{(\nu)}$  przeciw:  $H_1: \boldsymbol{\beta}^{(\tau)} \neq \boldsymbol{\beta}^{(\nu)}$ , gdzie  $\tau \neq \nu$ ,  $\tau, \nu \in (0, 1)$  oraz  $\mathbf{1}' \boldsymbol{\beta} = 1$ ,  $\boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$ .

Statystyka testowa ma postać (Hao, Najman, 2007):

$$W = \left[ \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\tau)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\nu)} \right] \left[ \hat{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\tau)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\nu)}}^{-1} \right] \left[ \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\tau)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(\nu)} \right], \quad (13)$$

\* Metody estymacji  $\hat{w}_t$  przedstawiono w Koenker (2005).

gdzie  $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}^{(\tau)}-\hat{\beta}^{(v)}}^{-1}$  jest estymatorem macierzy kowariancji różnic między wartościami parametrów dla różnych rzędów kwantyli. Przy założeniu prawdziwości hipotezy  $H_0$  statystyka (13) ma rozkład  $\chi^2$  z 2 stopniami swobody.

W artykule elementy macierzy  $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}^{(\tau)}-\hat{\beta}^{(v)}}^{-1}$  są szacowane bootstrapowo.

#### 4. Wyniki analizy empirycznej

Estymację omówionych modeli analizy stylu przeprowadzono w odniesieniu do następujących polskich funduszy inwestycyjnych akcji: Legg Mason Akcji FIO (LEGG), Inverstor Akcji FIO (INVEST), Arka BZ WBK FIO subfundusz Arka Akcji (ARKA), ING Parasol FIO subfundusz Akcji (ING), UniFundusze FIO subfundusz UniKorona Akcje (UNIKOR). Okresem badawczym jest styczeń 2000-kwiecień 2011. Wymienione fundusze należą do klasy funduszy uniwersalnych akcji, które działały na polskim rynku finansowym w całym okresie badawczym.

Zmienną objaśnianą każdego modelu tworzą logarytmiczne miesięczne stopy zwrotu z wartości jednostek uczestnictwa funduszu (136 obserwacji). Zbiór zmiennych objaśniających modelu jest taki sam w przypadku każdego OFI i tworzą go logarytmiczne miesięczne stopy zwrotu subindeksów sektorowych WIG. W analizie uwzględniono subindeksy, które były notowane w całym okresie badawczym, tzn.: WIG-telekomunikacja ( $WIG_{tel}$ ), WIG-spożywczy ( $WIG_{spo}$ ), WIG-informatyka ( $WIG_{inf}$ ), WIG-budownictwo ( $WIG_{bud}$ ) i banki ( $WIG_{ban}$ ).

Pierwszy etap badania poświęcono estymacji klasycznych modeli Sharpe'a. Oszacowane MNK modele klasyczne analizy stylu mają postać:

$$r_{LEGG} = 0,17 WIG_{tel} + 0,19 WIG_{spo} + 0,14 WIG_{inf} + 0,16 WIG_{bud} + 0,34 WIG_{ban} \quad (14)$$

$$r_{ARKA} = 0,13 WIG_{tel} + 0,11 WIG_{spo} + 0,13 WIG_{inf} + 0,24 WIG_{bud} + 0,39 WIG_{ban} \quad (15)$$

$$r_{ING} = 0,16 WIG_{tel} + 0,18 WIG_{spo} + 0,15 WIG_{inf} + 0,20 WIG_{bud} + 0,31 WIG_{ban} \quad (16)$$

$$r_{UNI} = 0,18 WIG_{tel} + 0,17 WIG_{spo} + 0,16 WIG_{inf} + 0,16 WIG_{bud} + 0,34 WIG_{ban} \quad (17)$$

$$r_{UNV} = 0,13 WIG_{tel} + 0,24 WIG_{spo} + 0,03 WIG_{inf} + 0,22 WIG_{bud} + 0,39 WIG_{ban} \quad (18)$$

Estymację punktową MNK parametrów powyższych modeli uzupełniono opartymi na metodologii Andrewsa estymacją przedziałową i weryfikacją ich istotności. Przy obliczaniu 95% przedziałów ufności Andrewsa macierz

kowariancji  $V = E(\varepsilon_t^2 F_t F_t')$  szacowano odpornie wykorzystując estymator Newey-Westy typu HAC. Wyniki zawiera tabela 1. W przypadku każdego funduszu, z wyjątkiem INVEST, wszystkie zmienne niezależne modelu są statystycznie istotne na poziomie istotności 0,05. Zmienną modelu funduszu INVEST, która na poziomie istotności 0,05 okazała się statystycznie nieistotna, jest WIG-informatyka.

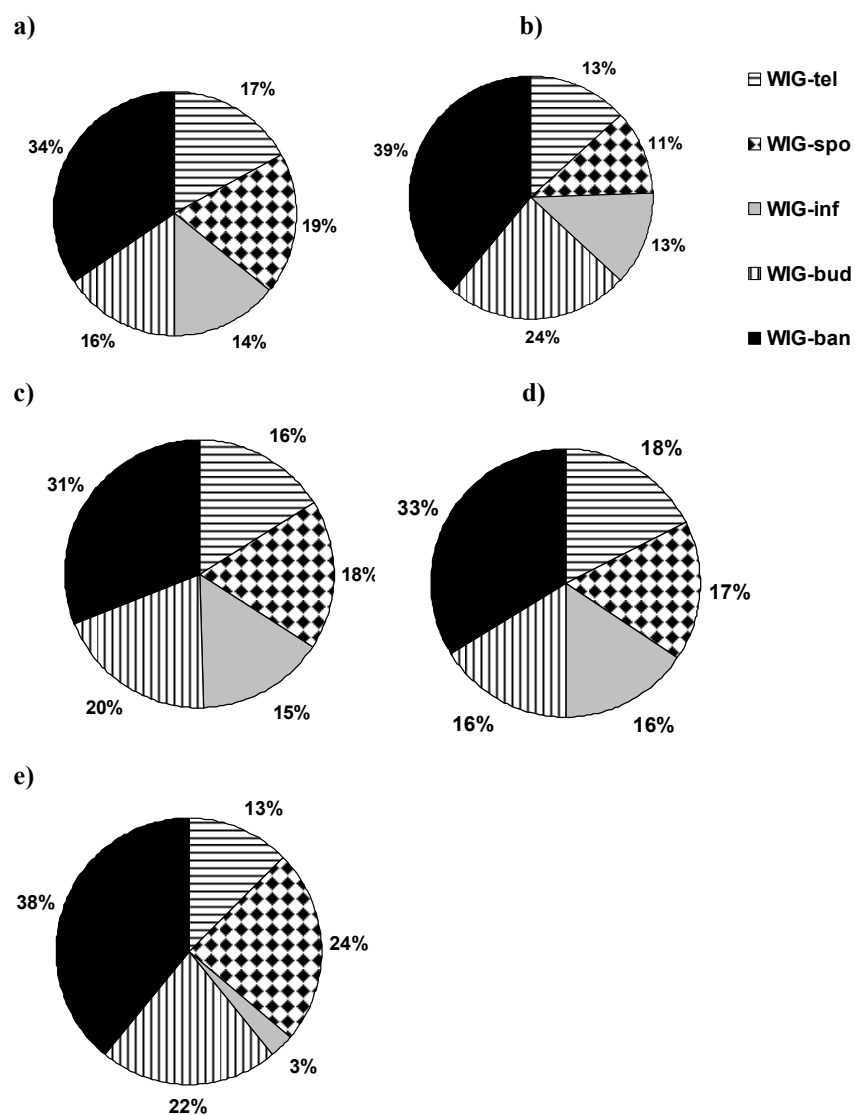
Tabela 1

Wyniki estymacji przedziałowej i weryfikacji istotności wag stylu modeli 14-18

| Indeks         | Udziały stylu | 95% przedział ufności |      | p-value | Udziały stylu | 95% przedział ufności |      | p-value |
|----------------|---------------|-----------------------|------|---------|---------------|-----------------------|------|---------|
|                | <b>LEGG</b>   | Andrewsa              |      |         | <b>ARKA</b>   | Andrewsa              |      |         |
| WIG-tel        | <b>0,17</b>   | 0,11                  | 0,24 | 0       | <b>0,13</b>   | 0,05                  | 0,21 | 0       |
| WIG-spo        | <b>0,19</b>   | 0,13                  | 0,25 | 0       | <b>0,11</b>   | 0,02                  | 0,20 | 0,005   |
| WIG-inf        | <b>0,14</b>   | 0,07                  | 0,21 | 0       | <b>0,13</b>   | 0,06                  | 0,20 | 0,001   |
| WIG-bud        | <b>0,16</b>   | 0,08                  | 0,23 | 0       | <b>0,24</b>   | 0,16                  | 0,32 | 0       |
| WIG-ban        | <b>0,34</b>   | 0,26                  | 0,34 | 0       | <b>0,39</b>   | 0,28                  | 0,39 | 0       |
| R <sup>2</sup> | 0,8365        |                       |      |         | 0,807413      |                       |      |         |
| Indeks         | Udziały stylu | 95% przedział ufności |      | p-value | Udziały stylu | 95% przedział ufności |      | p-value |
|                | <b>ING</b>    | Andrewsa              |      |         | <b>UNIKOR</b> | Andrewsa              |      |         |
| WIG-tel        | <b>0,16</b>   | 0,11                  | 0,22 | 0       | <b>0,18</b>   | 0,11                  | 0,24 | 0       |
| WIG-spo        | <b>0,18</b>   | 0,12                  | 0,24 | 0       | <b>0,17</b>   | 0,09                  | 0,24 | 0,001   |
| WIG-inf        | <b>0,15</b>   | 0,10                  | 0,20 | 0       | <b>0,16</b>   | 0,08                  | 0,23 | 0       |
| WIG-bud        | <b>0,20</b>   | 0,13                  | 0,26 | 0       | <b>0,16</b>   | 0,09                  | 0,23 | 0       |
| WIG-ban        | <b>0,31</b>   | 0,24                  | 0,38 | 0       | <b>0,34</b>   | 0,26                  | 0,41 | 0       |
| R <sup>2</sup> | 0,8814        |                       |      |         | 0,8388        |                       |      |         |
| Indeks         | Udziały stylu | 95% przedział ufności |      | p-value |               |                       |      |         |
|                | <b>INVEST</b> | Andrewsa              |      |         |               |                       |      |         |
| WIG-tel        | <b>0,13</b>   | 0,06                  | 0,22 | 0       |               |                       |      |         |
| WIG-spo        | <b>0,24</b>   | 0,17                  | 0,32 | 0       |               |                       |      |         |
| WIG-inf        | <b>0,03</b>   | -0,07                 | 0,03 | 0,271   |               |                       |      |         |
| WIG-bud        | <b>0,22</b>   | 0,12                  | 0,32 | 0       |               |                       |      |         |
| WIG-ban        | <b>0,39</b>   | 0,31                  | 0,48 | 0       |               |                       |      |         |
| Suma           | 1             |                       |      |         |               |                       |      |         |
| R <sup>2</sup> | 0,7580        |                       |      |         |               |                       |      |         |

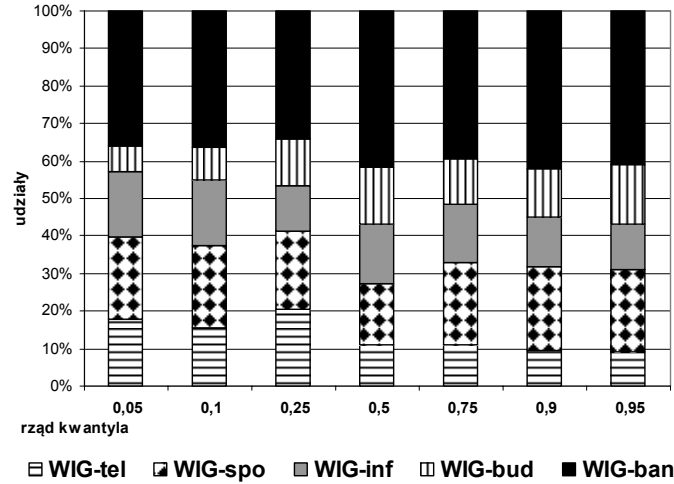
Wartości oszacowanych MNK udziałów stylu wskazują, że fundusze nie różnią się znacząco pod względem ekspozycji stylu (rysunek 1). Największy wpływ na osiągnięte w przyjętym okresie badawczym stopy zwrotu jednostek uczestnictwa analizowanych funduszy miały inwestycje w akcje subindeksu

WIG-banki (średni udział wynosi 35%). Wartości udziałów czterech pozostałych subindeksów są zbliżone w przypadku pozostałych funduszy z wyjątkiem funduszu INVEST.

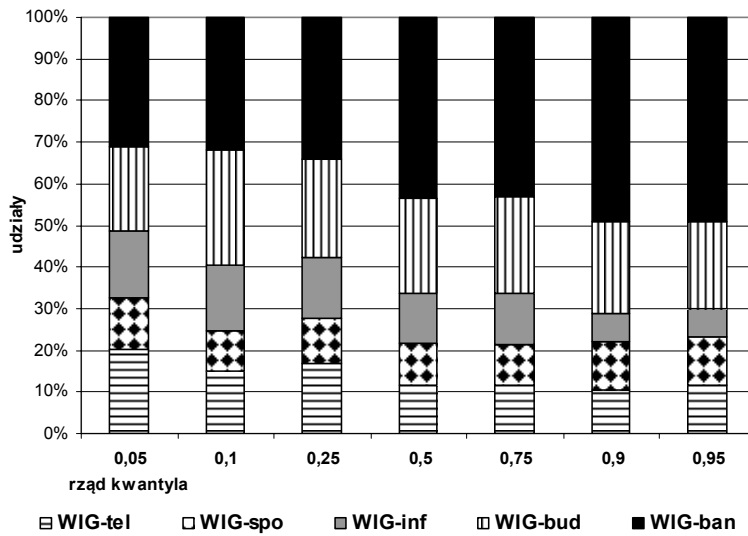


Rys. 1. Udziały stylu szacowane MNK: a) LEGG, b) ARKA, c) ING, d) UNIKOR, e) INVEST

Druga część badania dotyczy implementacji modelu kwantylowej analizy stylu dla rozważanych funduszy. Na rysunkach 2 i 3 zamieszczono oszacowane udziały dla różnych rzędów kwantyla dwóch przykładowych funduszy LEGG oraz ARKA.



Rys. 2. Udziały kwantylowej analizy stylu funduszu LEGG dla wybranych rzędów kwantyla



Rys. 3. Udziały kwantylowej analizy stylu funduszu ARKA dla wybranych rzędów kwantyla

Oszacowane udziały kwantylowej analizy stylu rozważanych rządów oraz wyniki weryfikacji ich istotności dla pozostałych funduszy zawiera tabela 2. Jedynie w przypadku OFI INVEST jedna zmienna (WIG<sub>inf</sub>) jest statystycznie nieistotna na poziomie istotności 0,05 dla wszystkich rozważanych rządów kwantyla. Zmienne objaśniające pozostałych modeli są w zdecydowanej większości statystycznie istotne.

Tabela 2

Wyniki estymacji punktowej i weryfikacji istotności kwantylowych wag stylu

| OFI    | Rząd kwantyla | 0,05          |             | 0,1           |             | 0,25          |             | 0,5           |             | 0,75          |             | 0,9           |             | 0,95          |             |
|--------|---------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|---------------|-------------|
|        | Indeks        | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   | Udziały stylu | p-wartość   |
| LEGG   | WIG-tel       | 0,18          | 0,00        | 0,16          | 0,01        | 0,20          | 0,00        | 0,11          | 0,01        | 0,11          | 0,01        | 0,09          | 0,02        | 0,09          | 0,03        |
|        | WIG-spo       | 0,22          | 0,03        | 0,22          | 0,01        | 0,21          | 0,00        | 0,16          | 0,00        | 0,22          | 0,00        | 0,22          | 0,00        | 0,22          | 0,00        |
|        | WIG-inf       | 0,17          | 0,01        | 0,17          | 0,01        | 0,12          | 0,00        | 0,16          | 0,01        | 0,16          | 0,01        | 0,13          | 0,03        | 0,12          | 0,05        |
|        | WIG-bud       | 0,07          | <b>0,08</b> | 0,09          | <b>0,07</b> | 0,12          | 0,03        | 0,15          | 0,04        | 0,12          | 0,02        | 0,13          | 0,03        | 0,16          | 0,04        |
|        | WIG-ban       | 0,36          | 0,00        | 0,37          | 0,00        | 0,34          | 0,00        | 0,41          | 0,00        | 0,40          | 0,00        | 0,42          | 0,00        | 0,41          | 0,00        |
| ARKA   | WIG-tel       | 0,20          | 0,03        | 0,15          | 0,02        | 0,17          | 0,01        | 0,12          | 0,01        | 0,12          | 0,01        | 0,10          | 0,04        | <b>0,12</b>   | <b>0,06</b> |
|        | WIG-spo       | 0,13          | <b>0,12</b> | 0,10          | <b>0,10</b> | 0,11          | <b>0,07</b> | 0,10          | 0,05        | 0,10          | 0,04        | 0,12          | <b>0,06</b> | 0,12          | <b>0,07</b> |
|        | WIG-inf       | 0,16          | 0,02        | 0,16          | 0,02        | 0,15          | 0,02        | 0,12          | 0,03        | 0,12          | 0,05        | 0,07          | <b>0,12</b> | 0,07          | <b>0,15</b> |
|        | WIG-bud       | 0,20          | 0,01        | 0,28          | 0,00        | 0,24          | 0,00        | 0,23          | 0,00        | 0,23          | 0,00        | 0,22          | 0,00        | 0,21          | 0,00        |
|        | WIG-ban       | 0,31          | 0,00        | 0,32          | 0,00        | 0,34          | 0,00        | 0,43          | 0,00        | 0,43          | 0,00        | 0,49          | 0,00        | 0,49          | 0,00        |
| ING    | WIG-tel       | 0,17          | 0,00        | 0,17          | 0,00        | 0,16          | 0,00        | 0,16          | 0,01        | 0,12          | 0,01        | 0,12          | 0,01        | 0,12          | 0,03        |
|        | WIG-spo       | 0,15          | 0,01        | 0,15          | 0,00        | 0,10          | 0,00        | 0,18          | 0,01        | 0,18          | 0,00        | 0,19          | 0,00        | 0,20          | 0,01        |
|        | WIG-inf       | 0,20          | 0,01        | 0,19          | 0,00        | 0,20          | 0,01        | 0,16          | 0,01        | 0,15          | 0,01        | 0,13          | 0,02        | 0,13          | 0,03        |
|        | WIG-bud       | 0,17          | 0,00        | 0,16          | 0,00        | 0,18          | 0,00        | 0,16          | 0,00        | 0,19          | 0,00        | 0,19          | 0,00        | 0,19          | 0,00        |
|        | WIG-ban       | 0,31          | 0,00        | 0,32          | 0,00        | 0,36          | 0,00        | 0,34          | 0,00        | 0,35          | 0,00        | 0,36          | 0,00        | 0,36          | 0,00        |
| UNIKOR | WIG-tel       | 0,19          | 0,00        | 0,17          | 0,00        | 0,17          | 0,00        | 0,13          | 0,01        | 0,09          | 0,02        | 0,08          | 0,04        | 0,08          | 0,07        |
|        | WIG-spo       | 0,14          | <b>0,10</b> | 0,10          | <b>0,08</b> | 0,15          | 0,03        | 0,20          | 0,01        | 0,21          | 0,01        | 0,21          | 0,01        | 0,21          | 0,02        |
|        | WIG-inf       | 0,14          | 0,00        | 0,13          | 0,00        | 0,14          | 0,00        | 0,12          | 0,01        | 0,11          | 0,01        | 0,10          | 0,05        | 0,10          | 0,07        |
|        | WIG-bud       | 0,20          | 0,02        | 0,11          | 0,01        | 0,20          | 0,00        | 0,21          | 0,00        | 0,21          | 0,00        | 0,22          | 0,01        | 0,22          | 0,01        |
|        | WIG-ban       | 0,33          | 0,00        | 0,32          | 0,00        | 0,35          | 0,00        | 0,35          | 0,00        | 0,38          | 0,00        | 0,38          | 0,00        | 0,38          | 0,00        |
| INVEST | WIG-tel       | 0,15          | 0,01        | 0,11          | 0,01        | 0,13          | 0,01        | 0,16          | 0,01        | 0,10          | 0,01        | 0,10          | 0,05        | 0,08          | 0,07        |
|        | WIG-spo       | 0,22          | 0,01        | 0,20          | 0,01        | 0,24          | 0,00        | 0,28          | 0,00        | 0,29          | 0,00        | 0,30          | 0,00        | 0,29          | 0,00        |
|        | WIG-inf       | 0,10          | <b>0,07</b> | 0,11          | <b>0,08</b> | 0,08          | <b>0,09</b> | 0,03          | <b>0,18</b> | 0,03          | <b>0,40</b> | 0,00          | <b>0,54</b> | 0,00          | <b>0,58</b> |
|        | WIG-bud       | 0,19          | 0,02        | 0,19          | 0,02        | 0,18          | 0,01        | 0,08          | 0,01        | 0,16          | 0,00        | 0,16          | 0,01        | 0,14          | 0,01        |
|        | WIG-ban       | 0,34          | 0,00        | 0,30          | 0,00        | 0,37          | 0,00        | 0,44          | 0,00        | 0,42          | 0,00        | 0,45          | 0,00        | 0,49          | 0,00        |

Pogrubioną czcionką oznaczono p-wartości wskazujące na brak istotności danej zmiennej (przyjęto poziom istotności 0,05).

Uzyskane wyniki wskazują na niewielkie zróżnicowanie ekspozycji stylu między kwantylowymi modelami różnych rzędów. Fakt ten potwierdzają wyniki implementacji testu Walda (tabela 3). Kolumny tabeli zawierają wartości statystyki testowej oraz p-wartości obliczone dla testu weryfikującego brak istotnych różnic między kwantylowymi współczynnikami modeli różnych rzędów.

Tabela 3

Wyniki weryfikacji istotności różnic między kwantylowymi wagami stylu

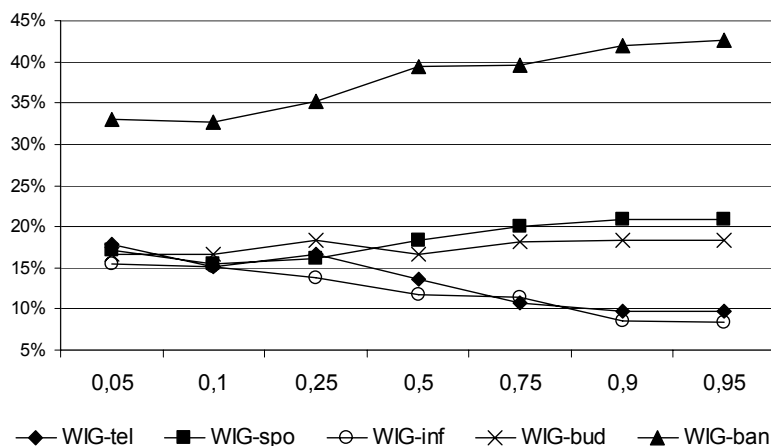
| Pary          | 0,5_0,25         |           | 0,5_0,75         |           | 0,5_0,05         |           | 0,5_0,95         |           | 0,25_0,75        |           | 0,1_0,9          |           | 0,25_0,95        |           |
|---------------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|
|               | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość | Statystyka Walda | p-wartość |
| <b>LEGG</b>   | 3,35             | 0,50      | 1,35             | 0,85      | 2,63             | 0,62      | 1,24             | 0,87      | 2,69             | 0,61      | 1,39             | 0,85      | 2,21             | 0,70      |
| <b>ARKA</b>   | 2,16             | 0,71      | 0,00             | 0,9       | 2,79             | 0,59      | 1,09             | 0,90      | 1,17             | 0,88      | 3,02             | 0,55      | 2,57             | 0,63      |
| <b>ING</b>    | 2,33             | 0,68      | 1,19             | 0,88      | 0,56             | 0,97      | 1,05             | 0,90      | 2,42             | 0,66      | 1,61             | 0,81      | 1,40             | 0,84      |
| <b>UNIKOR</b> | 1,29             | 0,86      | 0,64             | 0,96      | 1,08             | 0,90      | 0,74             | 0,95      | 2,15             | 0,71      | 1,66             | 0,80      | 1,45             | 0,84      |
| <b>INVEST</b> | 4,45             | 0,35      | 3,12             | 0,54      | 3,76             | 0,44      | 2,51             | 0,64      | 1,24             | 0,87      | 2,29             | 0,68      | 2,73             | 0,60      |

Zróżnicowanie ekspozycji stylu szacowanej modelami kwantylowej analizy stylu jest nieznaczne zarówno w odniesieniu do modeli różnych rzędów danego funduszu, jak i odpowiadających sobie udziałów poszczególnych funduszy. Należy podkreślić, że wniosek ten jest odmienny od wniosku otrzymanego na podstawie wyników implementacji kwantylowej analizy stylu dla polskich funduszy inwestycyjnych zrównoważonych (prace Orwat, Trzpiot (2011a) i Orwat, Trzpiot (2011b)). Zamieszczone w powyższych pracach wyniki badań wskazały, że struktura udziałów stylu funduszu zrównoważonego jest silnie zróżnicowana względem różnych części rozkładów stóp zwrotu. Ponadto fundusze zrównoważone są także silnie zróżnicowane pod względem struktury udziałów.

Niewielkie zróżnicowanie struktury udziałów funduszy akcji w badanym okresie wynika częściowo ze specyfiki ich działalności inwestycyjnej. Ponadto silne korelacje między zmiennymi objaśniającymi modeli determinują duże błędy standardowe składników losowych.

Stopy zwrotu osiągnięte przez analizowane fundusze akcji w przyjętym okresie badawczym w największym stopniu są zdeterminowane przez inwestycje w akcje subindeksu WIG-banki. Dla rozważanych rzędów kwantyli udział subindeksu WIG-banki wynosi od 32% do 43%. Średni udział tej zmiennej dla wszystkich funduszy jest mniejszy w przypadku kwantylowych modeli rzędu

mniejszego od 0,5, a większy w przypadku kwantylowych modeli rzędu większego od 0,5. Średni wpływ inwestycji funduszy w akcje pozostałych subindeksów na osiągnięte stopy zwrotu jest na poziomie 9-21% (rysunek 4).



Rys. 4. Uśrednione udziały kwantylowych modeli analizy stylu rozważanych funduszy

## Podsumowanie

Zaletą kwantylowej analizy stylu jest możliwość badania każdej części rozkładu, a nie jedynie jego środka.

Niewielkie zróżnicowanie udziałów stylu danego funduszu akcyjnego w różnych częściach warunkowych rozkładów stóp zwrotu pozwala na ograniczenie szacowania jego udziałów stylu do centralnej części rozkładu (np. metodą klasyczną). Ponadto analizowane fundusze są podobne do siebie pod względem ekspozycji stylu w danej części rozkładu. Należy jednak pamiętać, że wnioski te mogą wynikać po części ze specyfiki działalności inwestycyjnej funduszy akcyjnych, jak również mogą być konsekwencją specyfikacji modeli.

Wnioski płynące z przeprowadzonej analizy empirycznej nie pokrywają się z wnioskami otrzymanymi na podstawie podobnej analizy empirycznej przeprowadzonej na danych dotyczących zrównoważonych funduszy inwestycyjnych. Zatem wybór metody estymacji udziałów stylu polskich funduszy inwestycyjnych powinien być poprzedzony badaniem wpływu określonych czynników na cały warunkowy rozkład stóp zwrotu funduszu. W tym kontekście można traktować metodę kwantylowej analizy stylu jako podejście

uzupełniająca dla klasycznej analizy stylu. Chociaż ograniczenie szacowania udziałów stylu do centralnej części rozkładu wydaje się uzasadnione w przypadku funduszy inwestycyjnych akcji, to argumentacja tego faktu jest możliwa po przeprowadzeniu kwantylowej analizy stylu uzupełniającej podejście klasyczne. Przemawia to za przydatnością podejścia kwantylowego w obszarze analizy polskich funduszy inwestycyjnych.

## Literatura

- Andrews D.K.W. (1999): Estimation When a Parameter Is on Boundary. „Econometrica”, Vol. 67, s. 1341-1383.
- Greene W. H. (2002): Econometric Analysis. Prentice Hall, New Jersey.
- Hao L., Najman D.Q. (2007): Quantile Regression. „Quantitative Application in the Social Sciences”.
- Kim T., White H., Stone D. (2005): Asymptotic and Bayesian Confidence Intervals for Sharpe-Style Weights. „Journal of Financial Econometric”, Vol. 3(3).
- Koenker R. (2005): Quantile Regression. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Koenker R., Basset B. (1978): Regression Quantiles. „Econometrica”, Vol. 46.
- Koenker R., Ng P. (2005): Inequality Constrained Quantile Regression. „The Indian Journal of Statistics”, Vol. 67.
- Orwat A. (2008): Nielklasyczne metody estymacji przedziałowej wag stylu Sharpe’a na przykładzie modeli analizy stylu zarządzania OFE. W: Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – Tendencje światowe a polski rynek. Vol. 1197, AE, Wrocław.
- Orwat A. (2009): Bayesian Interval Estimation of Sharpe Style Weights in the Model of Style Analysis of the Management of Open Pension Funds. „Acta Universitatis Lodzianis Folia Oeconomica”, Vol. 228, Łódź.
- Orwat A., Trzpiot G. (2011b): Regresja kwantylowa w analizie stylu zarządzania funduszy inwestycyjnych zrównoważonych. W: Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski. UE, Wrocław, Vol. 183, s. 415-425.
- Orwat-Acedańska A. (2011a): The Classification of Polish Mutual Balanced Funds According to the Management Style Using Andrews Estimators. „Studia Ekonomiczne”, nr 65, UE, Katowice, s. 73-89.
- Orwat-Acedańska A., Trzpiot G. (2011c): The Classification of Polish Mutual Balanced Funds Based on the Management Style – Quantile Regression Approach. W: Theory and Applications of Quantitative Methods. Econometrics 31, Prace Naukowe nr 194, s. 9-23.
- Portnoy S., Koenker R. (1997): The Gaussian Hare and the Laplacian Tortoise: Computability of Squared-Error Versus Absolute-Error Estimators, with Discussion. „Statistical Science”, Vol. 12.

- Sharpe W.F. (1992): Asset Allocation Management Style and Performance Measurement. „Journal of Portfolio Management”, Vol. 18(2).
- Trzpiot G. (2007): Regresja kwantylowa a estymacja VaR. Prace Naukowe nr 1176, AE, Wrocław.
- Trzpiot G. (2008): Implementacja metodologii regresji kwantylowej w estymacji VaR. W: Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania, nr 9, US, Szczecin.
- Trzpiot G. (2009a): Model Regresji kwantylowej a estymacja modelu czynnikowego. W: Inwestycje Finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek, nr 60, UE Wrocław.
- Trzpiot G. (2009b): Application Weighted VaR in Capital Allocation. „Polish Journal of Environmental Studies”, Vol. 18, 5B, Olsztyn.
- Trzpiot G. (2009c): Estimation Methods for Quantile Regression. „Studia Ekonomiczne”, nr 53, AE, Katowice.
- Trzpiot G. (2010): Model regresji kwantylowej relacji stopa zwrotu – zmienność dla wybranych indeksów z GPW w Warszawie. W: Finanse, rynki finansowe i ubezpieczenia. Rynek Kapitałowy, nr 28, US, Szczecin.
- Trzpiot G. (2011): Bayesian Quantile Regression. „Studia Ekonomiczne”, nr 65, UE, Katowice, s. 33-44.

## QUANTILE STYLE ANALYSIS BASED ON STOCK MUTUAL FUNDS EXAMPLE

### Summary

Style Analysis models allows to assess impact of same factors (style shares) representing investment in various asset classes on funds' rate of returns. Classical Sharpe Style Analysis offers only partial view on the dependencies since it focuses only on the central part of dependent variable endogenous distribution (parameters are estimated by least squares method). It may have serious consequences for correct inference on the factors impact on endogenous variable, especially when error term is non-normal, asymmetric, fat-tailed or in presence of outliers or when there is any uncertainty regarded to shape or type of a distribution.

We generalize classic Sharpe Style Analysis to Quantile Style Analysis, which allows to investigate dependencies between fund returns and the risk factors for the whole conditional distribution of the returns. The paper aim is to investigate the impact of the same factors (style shares) on the whole conditional distribution of participate units of stock mutual funds returns and to assess the usefulness of the quantile approach to the style analysis of the funds. The empirical analysis is performed for different point of views. First we investigate whether for a given fund estimated style shares are homogenous for different quantiles. Second we analyze if funds differ according to the style exposition for given quantile. Moreover we compare quantile style shares to classical least squares shares.



**Grażyna Trzpiot**  
**Przemysław Jeziorski**

## **ZASTOSOWANIE SKOINTEGROWANYCH MODELI VAR NA MIĘDZYNARODOWYCH RYNKACH FINANSOWYCH**

---

---

### **Wprowadzenie**

Wektorowe modele autoregresyjne (VAR – Vector AutoRegressive) to modele pozwalające prognozować zjawiska ekonomiczne, w których nie ma konieczności narzucenia, które zmienne są zmiennymi objaśniającymi, a które mają charakter zmiennych objaśnianych. Podwalinami modeli VAR są prace Wolda (1954) oraz Strotza (1960), w których przyczynowość znajduje odzwierciedlenie w interpretacji poszczególnych parametrów (Osińska, 2008, s. 38). Modele VAR mają postać wielorównaniową, która polega na badaniu regresji bieżącej wartości każdego analizowanego procesu od wszystkich pozostałych procesów opóźnionych o  $p$  okresów (Osińska, 2008, s. 36). Tak więc zmienna objaśniana jest wyjaśniana przez swoje własne opóźnienia oraz przez pozostałe opóźnienia zmiennych budujących model. Tak sformułowana postać modeli VAR powoduje, że są one bardzo proste w szacowaniu za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Modele VAR mogą być wykorzystane m.in. do modelowania wielorównaniowych szeregów czasowych. Rynki finansowe oraz instrumenty finansowe są w wysokim stopniu powiązane, co powoduje, że modele VAR dają bardzo dobre rezultaty w prognozowaniu zachowania rynków finansowych. Założeniem modeli VAR jest spełnienie warunku stacjonarności dla każdej zmiennej rozważanej w modelu. Takie założenie często zostaje spełnione w przypadku stóp zwrotu lub przyrostów szeregu finansowego. Jednak zastosowanie przyrostów lub stóp zwrotu dla szeregu finansowego nie pozwala na wyodrębnienie tendencji długookresowej. Dlatego gdy celem modeli VAR jest opisywanie cen instrumentów finansowych, dla których warunek stacjonarności jest trudny do spełnienia, bezpośrednia implementacja modeli VAR nie jest możliwa. W pracy zaprezentowano wektorowy model korekty błędem (VECM – Vector Error Correction Model), który wyraża długookresową relację pomiędzy niestacjonarnymi zmiennymi. Dlatego kluczowe staje się określenie, czy zmienne niestacjonarne są w długookresowej relacji – własność długookresowej równowagi jest określana jako kointegracja (Kusideł, 2000, s. 45).

W niniejszym artykule przedstawiono implementację skointegrowanych modeli VAR na rynku papierów wartościowych. Badania empiryczne przeprowadzono dla rynku polskiego (WIG – Warszawski Indeks Giełdowy) oraz dla rynku Stanów Zjednoczonych (DJIA – Dow Jones Industrial Average). W pierwszej kolejności dobrano rząd opóźnień dla modelu VAR za pomocą kryterium informacyjnego, a następnie zbadano występowanie własności kointegracji pomiędzy badanymi rynkami. Zbudowane modele dla rynku polskiego oraz amerykańskiego pozwoliły wyznaczyć jednodniowe prognozy, które posłużyły do zbadania efektywności skointegrowanych modeli VAR na międzynarodowych rynkach finansowych.

## 1. Własności modeli VAR

Modele *VAR* są modelami wielorównaniowymi, w których każda zmienna jest wyjaśniana przez własne opóźnienia oraz opóźnienia pozostałych zmiennych objaśniających (Kusideł, 2000, s. 15). Rząd opóźnień ( $p$ ) dla opóźnionych zmiennych może zostać dobrany za pomocą jednego z kryteriów informacyjnych. Istotny jest fakt, iż rząd opóźnień wpływa na liczbę szacowanych parametrów, dlatego przy niewystarczająco długim szeregu czasowym niemożliwe staje się narzucenie zbyt długiego rzędu opóźnień ( $p$ ). W literaturze znanych jest kilka kryteriów informacyjnych pozwalających dobrać rząd opóźnień ( $p$ ). W niniejszym artykule przytoczono trzy najczęściej stosowane kryteria informacyjne. Rząd opóźnień dla modeli VAR jest dobierany poprzez minimalizację jednego z kryteriów informacyjnych (Zivot, Wang, 2001, s. 386).

Kryterium Akaike (AIC):

$$AIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2}{T} pn^2 \quad (1)$$

Kryterium Schwarza-Bayesa (BIC):

$$BIC(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{\ln T}{T} pn^2 \quad (2)$$

Kryterium Hannana-Quinna (HQ):

$$HQ(p) = \ln|\tilde{\Sigma}(p)| + \frac{2 \ln \ln T}{T} pn^2 \quad (3)$$

gdzie:

$T$  – długość szeregu czasowego,

$p$  – rząd opóźnień,

$n$  – liczba wymiarów szeregu czasowego,

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_t' \quad (4)$$

jest macierzą kowariancji reszt modelu bez uwzględnienia korekty liczby szacowanych parametrów, gdzie  $\hat{\varepsilon}_t$  to wielowymiarowa macierz reszt modelu szacowanego metodą najmniejszych kwadratów.

Zachowanie efektywności oszacowań parametrów modeli VAR jest możliwe do osiągnięcia w przypadku, gdy jest spełnione założenie stacjonarności dla analizowanych szeregów finansowych. Badanie stacjonarności szeregu finansowego może się odbyć z zastosowaniem testów pierwiastka jednostkowego. Dobrze znanym testem pozwalającym weryfikować założenie stacjonarności szeregu finansowego jest test Phillipsa-Perrona, w którym hipotezy mają następującą postać (Peron, 1988, s. 297-332):

$$H_0: y_t \sim I(1)$$

$$H_1: y_t \sim I(0)$$

gdzie:

$y_t$  – obserwacje szeregu finansowego.

Hipoteza zerowa głosi istnienie pierwiastka jednostkowego, co pozwala odrzucić hipotezę o zachowaniu stacjonarności przez szereg finansowy, natomiast hipoteza alternatywna mówi, że szereg jest zintegrowany w stopniu zerowym, co świadczy o spełnieniu założenia stacjonarności przez szereg finansowy.

Innym testem pozwalającym badać istnienie pierwiastka jednostkowego jest test Dickeya-Fullera, który opiera weryfikację hipotezy o stacjonarności szeregu finansowego na parametrze autoregresji w modelu AR(1). Postać modelu AR(1) jest następująca:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5)$$

gdzie:

$\rho$  – parametr autoregresji modelu AR(1).

Hipotezy dla testu Dickeya-Fullera mają postać:

$$H_0: y_t \sim I(1): \rho = 1$$

$$H_1: y_t \sim I(0): \rho < 1$$

Hipoteza zerowa głosi, że parametr autoregresji ( $\rho$ ) jest równy zero (szereg nie posiada własności stacjonarności), natomiast hipoteza alternatywna mówi, że parametr autoregresji ( $\rho$ ) jest istotnie mniejszy od jedności, co świadczy o zachowaniu stacjonarności przez szereg finansowy.

Jeżeli szereg finansowy zostanie zapisany w formie przyrostów analizowanej zmiennej, możliwe jest przekształcenie równania (5) do następującej postaci:

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (6)$$

Wtedy hipotezy mają postać:

$$H_0: y_t \sim I(1): \rho = 1 \Leftrightarrow \delta = \rho - 1 = 0$$

$$H_1: y_t \sim I(0): \rho < 1 \Leftrightarrow \delta = \rho - 1 < 0$$

Taki sposób zapisu hipotez pozwala na zapisanie statystyki testowej w teście Dickeya-Fullera, która ma następującą postać:

$$DF = \frac{\hat{\delta}}{D(\hat{\delta})} \quad (7)$$

gdzie:

$\hat{\delta}$  – estymator parametru  $\delta$ ,  
 $D(\hat{\delta})$  – błąd szacunku parametru  $\delta$ .

Weryfikacja i spełnienie założenia stacjonarności dla szeregów finansowych umożliwi szacowanie parametrów modeli VAR z zastosowaniem klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Brak założenia stacjonarności dla analizowanych zmiennych powoduje, że istnieje konieczność przekształcenia zmiennych, aby spełniały one założenie stacjonarności. Jest to możliwe poprzez analizowanie przyrostów zmiennej, które z dużym prawdopodobieństwem spełniają założenie stacjonarności. Jednak przekształcenie zmiennej w przyrosty zmiennej powoduje utracenie informacji o długoterminowych powiązaniach pomiędzy zmiennymi. Własnością pozwalającą utrzymać długoterminową zależność pomiędzy zmiennymi jest własność kointegracji, o której mowa w dalszej części artykułu.

Po przeprowadzeniu testów pierwiastka jednostkowego, pozwalających badać zasadność stosowania modeli VAR, możliwe jest szacowanie parametrów modeli. Modele VAR mają postać wielorównaniową, co umożliwi szacowanie każdego równania niezależnie.

Jeżeli szereg finansowy o wymiarach  $n \times 1$  zostanie zapisany jako  $Y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$ , model VAR, w którym rząd opóźnień ( $p$ ) został dobrany za pomocą jednego z kryteriów informacyjnych, ma następującą postać:

$$Y_t = \Phi D_t + \Pi_1 Y_{t-1} + \Pi_2 Y_{t-2} + \dots + \Pi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (8)$$

gdzie:

- $D_t$  – składnik zawierający stałą, trend, wahania sezonowe,
- $\Pi_i$  – macierz parametrów o wymiarach  $(n \times n)$ ,
- $Y_t$  – wektor nieopóźnionych zmiennych szeregu czasowego,
- $Y_{t-p}$  – wektor opóźnionych zmiennych szeregu czasowego z rzędem opóźnień  $p$ ,
- $\varepsilon_t$  – biały szum.

Stacjonarność modelu VAR jest zachowana w chwili, gdy moduły wartości własnych z macierzy  $F$  zbudowanej na bazie macierzy parametrów  $\Pi_i$  są mniejsze od jedności. Macierz  $F$  jest budowana zgodnie ze schematem:

$$F = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \cdots & \Pi_n \\ I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Postać modelu VAR zapisana równaniem (8) pozwala twierdzić, że jest to model prostych równań. Nie jest model o równaniach współzależnych ani model o równaniach rekurencyjnych, co pozwala na szacowanie każdego równania niezależnie od pozostałych równań. Równanie (8) może zostać przedstawione dla przypadku dwuwymiarowego szeregu finansowego, w którym został założony rząd opóźnień ( $p$ ) równy dwa. Postać (8) może zostać przekształcona do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{11}^1 & \pi_{12}^1 \\ \pi_{21}^1 & \pi_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{11}^2 & \pi_{12}^2 \\ \pi_{21}^2 & \pi_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

lub do postaci układu równań:

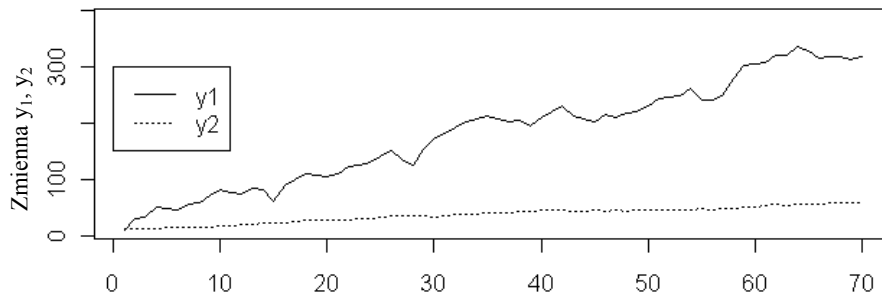
$$\begin{aligned} y_{1t} &= c_1 + \pi_{11}^1 y_{1t-1} + \pi_{12}^1 y_{2t-1} + \pi_{11}^2 y_{1t-2} + \pi_{12}^2 y_{2t-2} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} &= c_2 + \pi_{21}^1 y_{1t-1} + \pi_{22}^1 y_{2t-1} + \pi_{21}^2 y_{1t-2} + \pi_{22}^2 y_{2t-2} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \quad (11)$$

Zapis (11) pokazuje, że każda zmienna w modelu jest wyjaśniana przez  $p$  własnych opóźnień oraz przez  $p$  opóźnień pozostałych zmiennych budujących model VAR.

## 2. Skointegrowane modele VAR oraz model korekty błędem

Modele VAR mogą być stosowane w przypadku spełnienia założenia stacjonarności dla wszystkich zmiennych budujących model. Brak założenia stacjonarności może zostać rozwiązany poprzez wyznaczenie przyrostów dla każdej zmiennej i dalsze szacowanie modeli VAR na przyrostach zmiennych. Tak przeprowadzone przekształcenie powoduje, że szereg spełnia założenie stacjonarności, jednak zostaje utracona informacja o długoterminowych powiązaniach pomiędzy zmiennymi. Modele VAR, w których zostają uwzględnione przyrosty zmiennej zamiast pierwotnej zmiennej, powodują, że wyjaśniane są wyłącznie krótkoterminowe wpływy zmiennych na zmienną objaśnianą. Utracona informacja o długoterminowych powiązaniach pomiędzy zmiennymi może zostać uzupełniona poprzez zastosowanie wektorowego modelu korekty błędem (VECM). Istnienie wektorowego modelu korekty błędem jest uzależnione od stwierdzenia, czy pomiędzy zmiennymi istnieje długoterminowe powiązanie. Własność długoterminowej relacji pomiędzy zmiennymi jest nazywana własnością kointegracji (Kusideł, 2000, s. 46).

Własność kointegracji może zostać przedstawiona graficznie. Na rysunku 1 przedstawiono dwie zmienne ( $y_1$ ,  $y_2$ ), które nie posiadają własności stacjonarności.

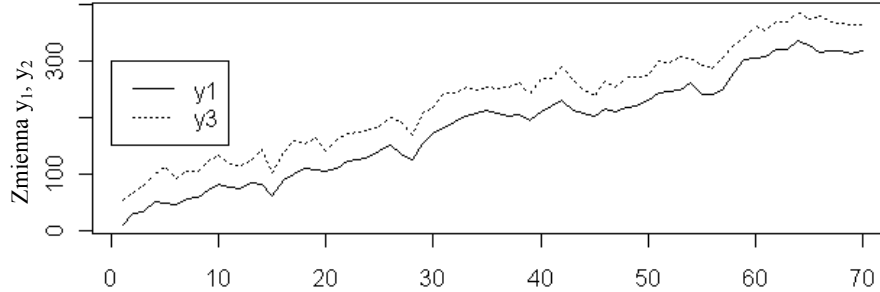


Rys. 1. Dwie zmienne niestacjonarne nieposiadające własność kointegracji

Obie zmienne posiadają trend rosnący, jednak przyrosty obu zmiennych nie są jednakowe. Pozwala to wnioskować o braku kointegracji pomiędzy zmiennymi, gdyż różnica pomiędzy zmiennymi  $y_1$  a  $y_2$  nie posiada własności stacjonarności.

Na rysunku 2 przedstawiono dwie zmienne ( $y_1$ ,  $y_3$ ), które również nie posiadają własności stacjonarności, jednak zachowanie zmiennych w czasie jest od siebie zależne. Taki sposób zachowania zmiennych w czasie powoduje, że

różnice pomiędzy zmiennymi  $y_1$  i  $y_3$  są względnie stałe. Względnie stałe różnice pomiędzy zmiennymi powodują, że liniowa kombinacja zmiennych  $y_1$  oraz  $y_3$  może spełniać warunek stacjonarności.



Rys. 2. Dwie zmienne niestacjonarne posiadające własność kointegracji

Graficzna prezentacja własności kointegracji może zostać zapisana w formie kombinacji liniowej. Reszty kombinacji liniowej pomiędzy zmiennymi powinny spełniać warunek stacjonarności, aby własność kointegracji była spełniona (Osińska, 2006, s. 185):

$$u_t = y_{1t} - \beta_2 y_{2t} - \beta_3 y_{3t} - \beta_n y_{nt} \sim I(0) \quad (12)$$

Z relacji (12) wynika, że kointegracja zachodzi pomiędzy tymi zmiennymi  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), dla których współczynniki  $\beta$  są istotnie większe od zera.

Liczba wektorów kointegrujących zależy od liczby wymiarów ( $n$ ) szeregu czasowego i jest liczbą spełniającą warunek  $0 < r < n$ .

Kointegracja pomiędzy zmiennymi może zostać zidentyfikowana poprzez wykluczenie występowania regresji pozornej między zmiennymi. Regresja pozorna ma miejsce w chwili, gdy pomiędzy zmiennymi  $y_1$  i  $y_2$  występuje statystycznie istotna zależność, co może zostać zapisane za pomocą relacji (Osińska, 2006, s. 186):

$$y_1 \sim y_2 : H_1 : \rho_{y_1 y_2} \neq 0 \quad (13)$$

natomiast nie występuje statystycznie istotna zależność pomiędzy przyrostami analizowanych zmiennych  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$ :

$$\Delta y_1 \sim \Delta y_2 : H_0 : \rho_{\Delta y_1 \Delta y_2} = 0 \quad (14)$$

Taką sytuację przedstawia rysunek 1, na którym obie zmienne  $y_1$  oraz  $y_2$  rosną, jednak brakuje powiązań pomiędzy przyrostami zmiennych  $\Delta y_1$  oraz  $\Delta y_2$ . Natomiast na rysunku 2 można zaobserwować zależność zarówno pomiędzy zmiennymi  $y_1$  oraz  $y_3$ , jak i pomiędzy przyrostami zmiennych  $\Delta y_1$  oraz  $\Delta y_3$ .

Uwzględnienie długoterminowej relacji pomiędzy zmiennymi jest możliwe poprzez zastosowanie modelu korekty błędem (Error Correction Model). Model korekty błędem (ECM) istnieje w chwili, gdy pomiędzy zmiennymi zachodzi relacja kointegracji. Brak własności kointegracji pomiędzy zmiennymi uniemożliwia uwzględnienie relacji długoterminowej pomiędzy zmiennymi w modelu VAR bazującym na przyrostach zmiennych. Model korekty błędem poza krótkoterminowym określeniem wpływu zmiennych objaśniających na zmienne objaśniane pozwala uwzględnić również relację długoterminową, wynikającą z istnienia kointegracji pomiędzy zmiennymi. W przypadku gdy występują dwa szeregi czasowe, model korekty błędem ma postać:

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= c_1 + \alpha_1(y_{1t-1} - \beta_2 y_{2t-1}) + \sum_j \psi_{11}^j \Delta y_{1t-j} + \sum_j \psi_{12}^j \Delta y_{2t-j} + \varepsilon_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= c_2 + \alpha_2(y_{1t-1} - \beta_2 y_{2t-1}) + \sum_j \psi_{21}^j \Delta y_{1t-j} + \sum_j \psi_{22}^j \Delta y_{2t-j} + \varepsilon_{2t}\end{aligned}\quad (15)$$

Model VAR zapisany relacją (8) nie jest zapisany w sposób umożliwiający wykorzystanie własności kointegracji. Kointegracja może zostać uwzględniona w modelu VAR w chwili, gdy model VAR (8) zostanie przekształcony do wektorowego modelu korekty błędem (VECM). Vector Error Correction Model ma postać:

$$\Delta Y_t = \Phi D_t + \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad (16)$$

gdzie:

$$\Pi = \Pi_1 + \dots + \Pi_p - I_n$$

$$\Gamma_k = - \sum_{j=k+1}^p \Pi_j$$

Liczba wektorów kointegrujących jest uzależniona od liczby wymiarów ( $n$ ) szeregu czasowego. Rząd macierzy  $\Pi$  pozwala określić liczbę wektorów kointegrujących ( $r$ ) (Osińska, 2006, s. 49):

- $rz(\Pi) = 0$  to wielowymiarowy szereg czasowy nieposiadający wektora kointegrującego,
- $0 < rz(\Pi) = r < n$  to wielowymiarowy szereg czasowy posiadający  $r$  wektorów kointegrujących,
- jeśli rząd macierzy jest pełnego rzędu, świadczy to o stacjonarności szeregów finansowych i wówczas jest możliwe szacowanie modelu VAR dla poziomów zmiennych; nie jest wymagane przekształcenie do przyrostów zmiennej.

Procedura budowy modelu VECM Johansena składa się z następujących etapów (Osińska, 2006, s. 58):

- badanie stacjonarności szeregów finansowych,
- określenie długości opóźnień dla modelu VAR,
- określenie liczby wektorów kointegrujących,
- identyfikacja wektorów kointegrujących,
- budowa modelu VECM.

Określenie liczby wektorów kointegrujących  $r$  jest możliwe poprzez zastosowanie testów stosunków wiarygodności. Pomiędzy zmiennymi może nie występować własność kointegracji, wtedy liczba wektorów kointegrujących wynosi 0. Procedura rozpoczyna się od sformułowania hipotez, w której hipoteza zerowa głosi, że liczba wektorów kointegrujących jest równa zero, natomiast hipoteza alternatywna głosi, że liczba wektorów kointegrujących jest większa od zera. Potwierdzenie hipotezy alternatywnej powoduje ponowne sformułowanie hipotez, jednak testowana jest liczba wektorów kointegrujących równa jeden. Procedura zostaje zakończona w chwili, gdy brakuje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Liczba wektorów kointegrujących jest równa poziomowi testowanemu. Hipotezy w przedstawionej procedurze mają następującą postać:

$$H_0(r_0): r = r_0$$

$$H_1(r_0): r > r_0$$

Statystyka testowa dla testu stosunków wiarygodności wykorzystuje wartości własne  $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n$  macierzy  $\Pi$ . Rząd macierzy, który wyznacza liczbę wektorów kointegrujących ( $r$ ), jest równy liczbie niezerowych wartości własnych macierzy  $\Pi$ . Postać statystyki testowej jest następująca:

$$LR(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i) \quad (17)$$

### 3. Szacowanie parametrów oraz budowa prognoz dla modeli VAR

Prosta postać modeli VAR budowanych zarówno dla poziomów zmiennych, jak i dla przyrostów zmiennych umożliwia szacowanie parametrów modeli za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów. Każde równanie może być oszacowane niezależnie od pozostałych, ponieważ w modelu nie występują powiązania pomiędzy równaniami. Liczba równań w modelu odpowiada liczbie wymiarów szeregu czasowego. Każde równanie jest opisane przez iloczyn  $np$  opóźnionych zmiennych objaśniających.

W pracy został wyznaczony model dla przyrostów szeregu czasowego. W pierwszej kolejności za pomocą modelu VECM wyznaczono prognozy przyrostów dla okresu  $T+1$ , a następnie wykorzystanie poziomów zmiennej w okresie  $T$  pozwoliło wyznaczyć prognozy dla cen instrumentów finansowych w okresie  $T+1$ . Za pomocą jednodniowych prognoz wyznaczono średnie błędy prognoz, które pozwoliły zweryfikować jakość oszacowanych prognoz za pomocą skointegrowanych modeli VAR. Średnie błędy prognoz wyznaczono zgodnie z relacją:

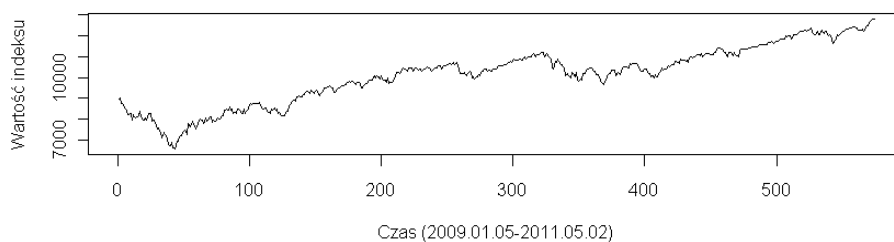
$$S_{prog} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{|y_{prog} - y_{emp}|}{y_{emp}} \quad (18)$$

gdzie:

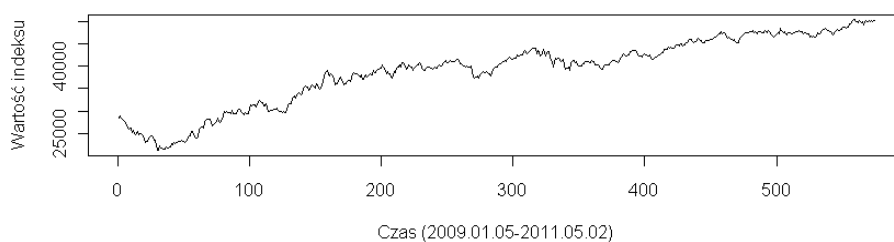
- $y_{emp}$  – wartość rzeczywista,  
 $y_{prog}$  – wartość prognozowana.

#### 4. Skointegrowane modele VAR dla indeksów WIG oraz DJIA

W literaturze można odnaleźć przykłady zastosowań modeli VAR. Implementację modeli VECM dla polityki monetarnej przedstawiono w pracy Osińskiej (2008, s. 100). W niniejszym artykule przedstawiono także analizę empiryczną dla rynku kapitałowego. Jakość oszacowań skointegrowanych modeli VAR zweryfikowano średnimi jednodniowymi błędami prognoz. Prognozy wyznaczono dla Warszawskiego Indeksu Giełdowego (WIG) oraz dla indeksu giełdy Stanów Zjednoczonych – Dow Jones Industrial Average (DJIA). Dane zgromadzono dla okresu od 2009.01.05 do 2011.05.02. Długość szeregu czasowego wynosi 574 sesje. Modele VAR wyznaczono dla 120 sesyjnego okna obserwacji, odpowiadającego półrocznym notowaniom instrumentów. Szereg czasowy podzielono na dwa okresy. W pierwszym okresie od 2009.01.05 do 2009.07.16, obejmującym notowania WIG oraz DJIA, zweryfikowano stacjonarność cen instrumentów finansowych oraz stacjonarność przyrostów cen instrumentów finansowych. Również na podstawie tego okresu wyznaczono optymalną liczbę opóźnień za pomocą jednego z kryteriów informacyjnych. Drugi okres obejmujący notowania od 2009.07.17 do 2011.05.02 posłużył do wyznaczenia jednodniowych prognoz dla cen WIG oraz DJIA. Szereg 443 sesji pozwolił wyznaczyć średnie jednodniowe błędy prognoz dla analizowanych instrumentów finansowych. Rysunki 3 oraz 4 prezentują notowania indeksu polskiego oraz amerykańskiego.



Rys. 3. Notowania indeksu DJIA w okresie od 2009.01.05 do 2011.05.02



Rys. 4. Notowania indeksu WIG w okresie od 2009.01.05 do 2011.05.02

Modele VAR wymagają, aby szeregi czasowe posiadały własność stacjonarności. Na podstawie okresu od 2009.01.05 do 2009.07.16 zweryfikowano stacjonarność dla cen instrumentów finansowych oraz dla przyrostów cen instrumentów finansowych. W tabeli 1 zaprezentowano wyniki testu pierwiastka jednostkowego Phillipsa-Perrona dla cen indeksów DJIA oraz WIG, natomiast w tabeli 2 przedstawiono wyniki testu dla przyrostów cen indeksów DJIA oraz WIG.

Tabela 1

Test stacjonarności dla cen instrumentów finansowych

| Ceny instrumentów  | DJIA   | WIG    |
|--------------------|--------|--------|
| Statystyka testowa | -2,61  | -2,72  |
| p-value            | 0,3209 | 0,2792 |

Tabela 2

Test stacjonarności dla przyrostów cen instrumentów finansowych

| Przyrosty cen instrumentów | DJIA   | WIG    |
|----------------------------|--------|--------|
| Statystyka testowa         | -13,36 | -10,26 |
| p-value                    | 0,01   | 0,01   |

Wyniki z tabeli 1 pokazują, że brakuje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, która głosi istnienie pierwiastka jednostkowego, dlatego ceny instrumentów finansowych nie spełniają warunku stacjonarności.

Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 2 odrzucono hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej, która głosi brak występowania pierwiastka jednostkowego, dlatego przyrosty cen instrumentów finansowych spełniają warunek stacjonarności.

Modele VAR mogą być szacowane dla danych posiadających własność stacjonarności. W przypadku danych dotyczących indeksów DJIA oraz WIG jest możliwe wykorzystanie przyrostów cen, które spełniają warunek stacjonarności. Jednak wykorzystanie przyrostów cen powoduje utratę informacji o długoterminowych zależnościach pomiędzy notowaniami indeksów DJIA oraz WIG. Jeżeli występują długoterminowe powiązania rynku polskiego oraz amerykańskiego, warto je uwzględnić w modelu. Długoterminowe relacje zostają uwzględnione za pomocą wektora kointegracji. Warunkiem istnienia kointegracji jest brak występowania regresji pozornej oraz spełnienie założenia stacjonarności dla kombinacji liniowej pomiędzy notowaniami indeksu DJIA a notowaniami indeksu WIG. W tabeli 3 zaprezentowano istotność zależności pomiędzy cenami, natomiast tabela 4 prezentuje istotność zależności pomiędzy przyrostami cen indeksów DJIA oraz WIG.

Tabela 3

Istotność zależności pomiędzy cenami

| Korelacja pomiędzy cenami: DJIA-WIG |        |
|-------------------------------------|--------|
| r Pearsona                          | 0,83   |
| p-value                             | 0,0000 |

Tabela 4

Istotność zależności pomiędzy przyrostami cen

| Korelacja pomiędzy przyrostami cen: DJIA-WIG |        |
|--|--------|
| r Pearsona                                   | 0,47   |
| p-value                                      | 0,0000 |

Tabele 3 oraz 4 wykluczają istnienie regresji pozornej, gdyż istotne statystycznie są zależności zarówno dla cen, jak i przyrostów cen indeksów DJIA oraz WIG. Kointegracja występuje w chwili, gdy reszty wektora kointegracji spełniają warunek stacjonarności. W przypadku dwuwymiarowego szeregu czasowego jest możliwe istnienie jednego wektora kointegracji, który ma postać:

$$u_t = DJIA_t - \beta_1 WIG_t \quad (19)$$

W tabeli 5 zaprezentowano wyniki badania stacjonarności dla wektora kointegracji (19).

Tabela 5

Test stacjonarności dla wektora kointegracji

| Wektor kointegracji |        |
|---------------------|--------|
| Statystyka testowa  | -3,48  |
| p-value             | 0,0469 |

Na podstawie wyników zaprezentowanych w tabeli 5 można twierdzić, że wektor kointegracji spełnia warunek stacjonarności. Możliwe jest zastosowanie wektorowego modelu korekty błędem (VECM), który pozwoli uwzględnić długoterminową relację pomiędzy notowaniami indeksu DJIA a notowaniami indeksu WIG. Za pomocą kryterium informacyjnego AIC (1) dobrano rząd opóźnień ( $p$ ). W tabeli 6 zaprezentowano otrzymane wyniki.

Tabela 6

Wartości kryterium AIC

| Kryterium informacyjne | AIC    |
|------------------------|--------|
| $p = 1$                | 22,489 |
| $p = 2$                | 22,433 |
| $p = 3$                | 22,401 |
| $p = 4$                | 22,333 |
| $p = 5$                | 22,321 |

Wyniki uzyskane w tabeli 6 pozwalają twierdzić, że optymalny rząd opóźnień wynosi  $p = 5$ , gdyż pozwala osiągnąć minimalną wartość kryterium informacyjnego AIC. Na podstawie rzędu opóźnień wynoszącego  $p = 5$  oszacowano model VECM, w którym uwzględniono wektor kointegracji (19). Model VECM pozwolił na zbudowanie jednodniowych prognoz oraz wyznaczenie średnich dziennych błędów prognoz (18). Wyznaczone średnie dzienne błędy prognoz dla okresu od 2009.07.17 do 2011.05.02 zaprezentowano w tabeli 7.

Tabela 7

Średnie dzienne błędy prognoz

| Ceny instrumentów     | DJIA  | WIG   |
|-----------------------|-------|-------|
| Średnie błędy prognoz | 0,73% | 0,89% |

## Podsumowanie

Zastosowanie skointegrowanych modeli VAR na międzynarodowych rynkach finansowych pozwoliło wyznaczyć prognozy, które są obciążone dopuszczalnymi błędami prognoz. Zarówno dla indeksu DJIA, jak i indeksu WIG średnie dzienne błędy prognoz były niższe od 1%. Założeniem modeli VAR jest istnienie stacjonarności zmiennych budujących model. Założenie jest trudne do spełnienia w przypadku cen instrumentów finansowych. Szereg finansowy może zostać sprowadzony do szeregu stacjonarnego poprzez różnicowanie szeregu, jednak powoduje to utracenie długoterminowej zależności pomiędzy zmiennymi. Uwzględnienie długoterminowych powiązań pomiędzy zmiennymi jest możliwe poprzez zastosowanie wektorowego modelu korekty błędem (VECM), w którym wykorzystuje się własność kointegracji.

## Literatura

- Kusideł E. (2000): Modele wektorowo-autoregresyjne VAR: metodologia i zastosowania. Absolwent, Łódź.
- Osińska M. (2006): Ekonometria finansowa. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Osińska M. (2008): Ekonometryczna analiza zależności przyczynowych. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Peron P. (1988): Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. „Journal of Economic Dynamics and Control”, 12.
- Zivot E., Wang J. (2001): Modelling Financial Time Series with S-PLUS. September 27.

## APPLICATION OF COINTEGRATED VAR MODELS FOR INTERNATIONAL FINANCIAL MARKETS

### Summary

This work presents cointegrated VAR models that allow to include long-term relationships between the analyzed time series. VAR models assume stationarity of variables which are included in the model. The assumption is not always feasible for prices of financial instruments. The stationarity can be preserved if the time series is differentiated, but this process causes loss of information about long-term relationships between the financial time series. Maintaining long-term relationship between variables is possible by applying the vector error correction model (VECM) in which the property of cointegration is used. Cointegration refers to the existence of long-term equilibrium. The empirical analysis of cointegrated VAR models on stock market is presented. The analysis includes relationship between the Polish market (WIG – Warsaw Stock Exchange Index) and the United States market (DJIA – Dow Jones Industrial Average).

**Grażyna Trzpiot**  
**Dominik Krężolek**

# **JEDNOCZYNNIKOWY MODEL SHARPE'A**

## **– ANALIZA EMPIRYCZNA NA PRZYKŁADZIE**

### **WYBRANYCH WALORÓW RYNKU METALI**

### **NIEŻELAZNYCH**

---

---

#### **Wprowadzenie**

Modele czynnikowe są narzędziami analitycznymi szeroko wykorzystywanymi w analizie progностycznej stóp zwrotu aktywów finansowych, szacowaniu wartości ekstremalnych, a także analizie zmienności aktywów oraz badaniu zależności pomiędzy nimi. Uogólniając, model czynnikowy opisuje poziom stopy zwrotu poprzez dekompozycję czynników na właściwe wszystkim aktywom i specyficzne dla konkretnie analizowanego waloru. Najczęściej czynniki modelu są powiązane z głównymi determinantami ryzyka, natomiast sam model umożliwia analizę wrażliwości tych czynników.

#### **1. Specyfikacja modelu czynnikowego**

Model czynnikowy można przedstawić w następującej ogólnej postaci:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_{1i}f_{1t} + \beta_{2i}f_{2t} + \dots + \beta_{Ki}f_{Kt} + \varepsilon_{it} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i^T \mathbf{f}_t + \varepsilon_{it}, \quad (1)$$

gdzie:

$R_{it}$  – stopa zwrotu (rzeczywista lub nadwyżka ponad stopę zwrotu wolną od ryzyka) dla  $i$ -tego aktywów ( $i = 1, \dots, N$ ) w okresie  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ),

$\alpha_i$  – wyraz wolny modelu,

$f_{kt}$  –  $k$ -ty czynnik podstawowy ( $k = 1, \dots, K$ ) w okresie  $t$ ,

$\beta_{ki}$  –  $k$ -ty ładunek czynnikowy dla  $i$ -tego aktywów w okresie  $t$ ,

$\varepsilon_{it}$  – czynnik specyficzny modelu (składnik losowy).

W modelu czynnikowym wprowadza się założenie, aby szeregi  $f_t$  były zintegrowane rzędu 0 ( $I(0)$ ) o następujących momentach:  $E[f_t] = \mu_f$ ,  $\text{cov}(f_t) = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)^T] = \Omega_f$ , oraz aby składnik losowy nie był skorelowany z żadnym z czynników, tj.  $\text{cov}(f_{kt}, \varepsilon_{it}) = 0$  dla każdego  $k, i, t$ . Jeśli dodatkowo założy się brak autokorelacji składnika losowego oraz brak korelacji pomiędzy aktywami, zachodzi  $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = \sigma_i^2$  dla  $i = j, t = s$  oraz  $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = 0$  w pozostałych przypadkach.

W zastosowaniach praktycznych często spotyka się sytuację, gdy liczba aktywów przekracza liczbę analizowanych okresów. Jeśli indeks  $t$  odpowiada okresowi, natomiast indeks  $i$  reprezentuje analizowane walory, model czynnikowy można zapisać w postaci modelu regresji krzyżowej:

$$\mathbf{R}_{t(N \times 1)} = \boldsymbol{\alpha}_{(N \times 1)} + \mathbf{B}_{(N \times K)} \mathbf{f}_{t(K \times 1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t(N \times 1)}, \quad (2)$$

gdzie:

$$t = 1, \dots, T, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^T | \mathbf{f}_t] = D,$$

$\mathbf{R}_t$  –  $(N \times 1)$  wektor aktywów w czasie  $t$ ,

$\boldsymbol{\alpha}$  –  $(N \times 1)$  wektor wyrazów wolnych,

$\mathbf{B}$  –  $(N \times K)$ -wymiarowa macierz ładunków czynnikowych,

$\mathbf{f}_t$  –  $(K \times 1)$ -wymiarowy wektor czynników w czasie  $t$ ,

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$  –  $(N \times 1)$ -wymiarowy wektor składników losowych dla badanego aktywu z  $(N \times N)$ -wymiarową diagonalną macierzą kowariancji  $D$ .

Macierz kowariancji stóp zwrotu o wymiarze  $(N \times N)$  ma postać:

$$\text{cov}(\mathbf{R}_t) = \Omega = \mathbf{B} \Omega_f \mathbf{B}^T + D.$$

Model czynnikowy można także zapisać w postaci modelu regresyjnego szeregu czasowego dla  $i$ -tego aktywu za pomocą wzoru:

$$\mathbf{R}_{i(T \times 1)} = \mathbf{1}_{T(T \times 1)} \alpha_{i(1 \times 1)} + \mathbf{F}_{(T \times K)} \boldsymbol{\beta}_{i(K \times 1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i(T \times 1)}, \quad (3)$$

gdzie:

$$i = 1, \dots, N, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i^T] = \sigma_i^2 I_T,$$

$\mathbf{1}_T$  –  $(T \times 1)$ -wymiarowy wektor jedynek,

$\mathbf{F}$  –  $(T \times K)$ -wymiarowa macierz czynników ( $t$ -ty rząd  $\mathbf{F}$  to  $\mathbf{f}_t^T$ ),

$\beta_i$  –  $(K \times 1)$ -wymiarowy wektor ładunków czynnikowych,  
 $\varepsilon_i$  –  $(T \times 1)$ -wymiarowy wektor składników losowych o macierzy kowariancji  $\sigma_i^2 I_T$ .

W analizach danych ekonomicznych są wykorzystywane trzy podstawowe grupy modeli czynnikowych: makroekonomiczne, fundamentalne oraz statystyczne.

## 2. Makroekonomiczne modele czynnikowe

W makroekonomicznym modelu czynnikowym czynniki  $f_t$  we wzorze (1) są obserwowalnymi zmiennymi makroekonomicznymi, które z założenia powinny być nieskorelowane z błędem  $\varepsilon_{it}$  dla badanego aktywu. Dwoma najpopularniejszymi makroekonomicznymi modelami czynnikowymi są jednoczynnikowy model Sharpe'a oraz uogólniony wieloczynnikowy model Chena, Rolla oraz Rossa. Głównym problemem w przypadku estymacji tej grupy modeli jest oszacowanie ładunków czynnikowych, wariancji reszt oraz kowariancji czynników za pomocą techniki regresji szeregów czasowych.

Model fundamentalny wykorzystuje czynniki obserwowalne, charakterystyczne dla danego aktywu, takie jak klasyfikacja przemysłowa, kapitalizacja rynku, klasyfikacja stylu (wartość, wzrost) do określenia wspólnych czynników ryzyka. W praktyce modele tego typu są szacowane na dwa sposoby. W pierwszym z nich, określanym jako podejście BARRA, obserwowalne dla aktywu czynniki specyficzne (lub ich przekształcenie) są traktowane jako ładunki czynnikowe  $\beta_i$ , które są niezmiennie w czasie. Realizacje czynnika w momencie  $t$ , tj.  $f_t$ , są nieobserwowalne. Problem ekonometryczny sprowadza się zatem do szacowania realizacji czynnika w momencie  $t$ , mając dane wartości ładunków czynnikowych. Jest tu wykorzystywana technika regresji krzyżowej. Badacze Eugene Fama oraz Kenneth French zapoczątkowali drugą metodę, która jest nazywana podejściem FAMA-FRENCH. Dla obserwowalnej, charakterystycznej dla analizowanego aktywu cechy, np. rozmiaru firmy, są określane realizacje czynnika w dwóch krokach. Po pierwsze należy posortować wyniki regresji krzyżowej dla aktywów oparte na wartościach ich charakterystycznych cech. Następnie należy utworzyć portfel zabezpieczony, który ma długą pozycję w górnym kwintylu oraz krótką w dolnym dla uporządkowanych aktywów. Obserwowana stopa zwrotu w zabezpieczonym portfelu w czasie  $t$

jest obserwowaną realizacją czynnika dla jego specyficznej charakterystyki. Następnie, mając dane realizacje czynnika dla  $t = 1, \dots, T$ , są szacowane wartości  $\beta$  dla każdego aktywu z wykorzystaniem  $N$  regresji szeregu czasowego.

W statystycznych modelach czynnikowych realizacje czynnika  $f_t$  w modelu określonym równaniem (1) nie są bezpośrednio obserwowalne i muszą zostać wygenerowane z obserwowalnych stóp zwrotu  $R_t$  za pomocą odpowiednich metod statystycznych. Najczęściej stosuje się analizę czynnikową oraz analizę głównych składowych. Tradycyjna analiza czynnikowa oraz analiza głównych składowych są zazwyczaj stosowane do wygenerowania realizacji czynnika wtedy, gdy liczba obserwacji w szeregu czasowym jest większa niż liczba aktywów ( $T > N$ ). Jeśli zachodzi sytuacja odwrotna, wówczas macierz kowariancji stóp zwrotu jest osobliwa (o wyznaczniku równym zero), co komplikuje obliczenia. W takim przypadku jest wykorzystywana asymptotyczna analiza głównych składowych Connora-Korajczyka.

### 3. Jednoczynnikowy model Sharpe'a na przykładzie rynku metali nieżelaznych

Prezentacji modelu czynnikowego dokonano na przykładzie jednoczynnikowego modelu Sharpe'a z wykorzystaniem wybranych indeksów największych giełd światowych, kursów walutowych oraz cen metali nieżelaznych. Dla wszystkich wykorzystanych zmiennych wyznaczono logarytmiczne stopy zwrotu. Badaniem objęto okres 4 stycznia 2000 roku – 31 grudnia 2009 roku (łącznie 2508 stóp zwrotu). Jako zmienne objaśniane wykorzystano stopy zwrotu zmiennych GOLD, SILVER oraz PLATINUM, natomiast jako zmienne objaśniające – indeksy światowych giełd.

Jednoczynnikowy model Sharpe'a jest jednym z najpopularniejszych makroekonomicznych modeli czynnikowych. Jego formalny zapis jest następujący:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (4)$$

gdzie:

$R_{Mt}$  – stopa zwrotu/nadwyżka stopy zwrotu (ponad poziom waloru o zerowym ryzyku) z indeksu rynkowego w okresie  $t$  (pozostałe oznaczenia jak dotychczas).

Indeks rynkowy powinien pokrywać ryzyko ekonomiczno-rynkowe, natomiast błąd – ryzyko nierynkowe, specyficzne. Macierz kowariancji aktywów w jednoczynnikowym modelu ma postać:

$$\Omega = \sigma_M^2 \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T + D,$$

gdzie  $\sigma_M^2 = D^2(R_{Mt})$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)^T$ , natomiast  $D$  jest macierzą diagonalną z elementami na przekątnej równymi  $\sigma_i^2 = D^2(\varepsilon_{it})$ .

Ponieważ  $R_{Mt}$  jest obserwowalne, więc parametry  $\beta_i$  oraz  $\sigma_i^2$  modelu jednoczynnikowego Sharpe'a dla każdego dowolnego aktywów można oszacować stosując model regresji szeregu czasowego  $\mathbf{R}_i = \tilde{\alpha}_i \mathbf{1} + \mathbf{R}_M \tilde{\boldsymbol{\beta}}_i + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Wariancja indeksu rynkowego jest szacowana za pomocą próby:

$$\tilde{\sigma}_M^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2$$

$$\bar{R}_M = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{Mt}.$$

Stąd oszacowana kowariancja modelu jednoczynnikowego ma postać  $\tilde{\Omega} = \tilde{\sigma}_M^2 \tilde{\boldsymbol{\beta}} \tilde{\boldsymbol{\beta}}^T + \tilde{D}$ , gdzie  $\tilde{D}$  posiada elementy diagonalne równe  $\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ .

Jednoczynnikowy model Sharpe'a oszacowano na podstawie wzoru (4), stosując metodę regresji. Wyniki estymacji współczynników beta oraz współczynników determinacji przedstawia tabela 1. Jako wskaźniki rynkowe wykorzystano indeksy giełd europejskich (WIG – Polska, CAC40 – Francja, DAX – Niemcy) oraz amerykańskich (DJIA, NASDAQ Composite oraz SP500). W przypadku modelowania ceny złota największą wartość współczynnika beta otrzymano dla indeksu WIG, natomiast najniższą dla DJIA. Złoto w słabym stopniu reaguje na zmiany zachodzące na polskiej giełdzie (zależność dodatnia, defensywna), natomiast porównując z rynkiem amerykańskim, kierunki zmian są przeciwne do ogólnej tendencji rynkowej.

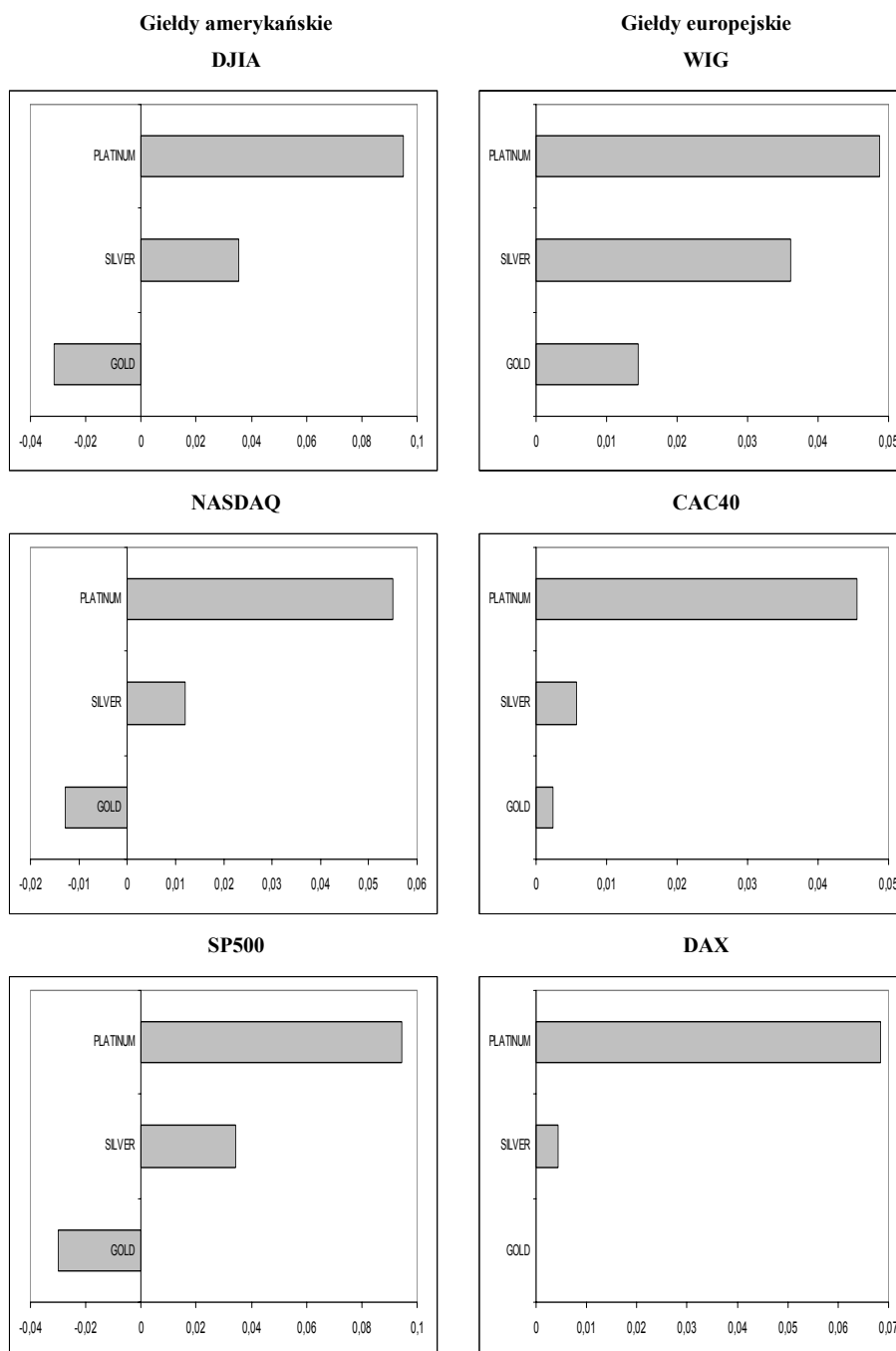
Tabela 1

Współczynniki beta modelu Sharpe'a dla indeksów vs. współczynniki determinacji

| METAL    | WSPÓLCZYNNIK  | WIG     | CAC40   | DAX     | DJIA     | NASDAQ   | SP500    |
|----------|---------------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| GOLD     | BETA          | 0,01444 | 0,00239 | 0,00008 | -0,03151 | -0,01279 | -0,03016 |
|          | R-KWADRAT (%) | 0,03141 | 0,00107 | 0,00000 | 0,12621  | 0,04399  | 0,13023  |
| SILVER   | BETA          | 0,03607 | 0,00569 | 0,00439 | 0,03543  | 0,01210  | 0,03411  |
|          | R-KWADRAT (%) | 0,06558 | 0,00203 | 0,00135 | 0,05335  | 0,01318  | 0,05569  |
| PLATINUM | BETA          | 0,04877 | 0,04553 | 0,06846 | 0,09489  | 0,05491  | 0,09431  |
|          | R-KWADRAT (%) | 0,19942 | 0,21584 | 0,54786 | 0,63649  | 0,45134  | 0,70802  |

W przypadku zmiennej GOLD podobne wyniki otrzymano również dla pozostałych indeksów zza oceanu. Dodatkowo giełdy amerykańskie w większym stopniu wpływają na poziom stopy zwrotu złota w sensie ryzyka rynkowego (mierzonego współczynnikiem determinacji) niż giełdy w Europie. Bardzo słaby związek występuje pomiędzy stopą zwrotu złota a stopą zwrotu indeksu DAX. Inwestycje w złoto w zasadzie nie reagują na zmiany na tym rynku, co można w tym przypadku tłumaczyć brakiem wpływu ryzyka finansowego (rozumianego jako nastroje giełd finansowych).

Analizując stopę zwrotu srebra (zmienna SILVER), również indeks WIG wykazuje największy wpływ na jej poziom (przy również najwyższej wartości współczynnika determinacji). Najniższa wartość współczynnika beta została oszacowana dla indeksu DAX. Na poziom stopy zwrotu inwestycji w platynę największy wpływ mają nastroje na giełdach amerykańskich (największe wartości beta dla DJIA oraz SP500). Jest to związane tym samym z większym ryzykiem finansowym (współczynnik determinacji dla SP500). Najślabiej na wartość stopy zwrotu platyny wpływają zachowania na giełdzie we Francji, co jest również potwierdzone niską wartością współczynnika determinacji. Na rysunku 1 przedstawiono graficznie wartości współczynników beta dla oszacowanych modeli jednoczynnikowych Sharpe'a.



Rys. 1. Współczynniki beta modelu Sharpe'a – indeksy

Poziom zmienności analizowanych indeksów oraz cen metali jest statystycznie istotny. W grupie indeksów najwyższą wariancją cechują się NASDAQ oraz indeksy europejskie. Tylko WIG wykazał dodatnią wartość oczekiwaną w całym badanym okresie. Natomiast w przypadku stóp zwrotów metali nieżelaznych najwyższy poziom zmienności charakteryzował zmienną SILVER. Oczekiwane stopy zwrotu kształtowały się na średnim poziomie 0,05%.

Macierze kowariancji oszacowane dla jednoczynnikowego modelu Sharpe'a dla indeksów WIG oraz DJIA przedstawiono poniżej. W przypadku indeksu DJIA niektóre wartości macierzy są ujemne, co wynika z ujemnych wartości współczynnika beta dla zmiennej GOLD (tabela 2).

Tabela 2

Macierze kowariancji – WIG vs. DJIA

| WIG      | GOLD       | SILVER     | PLATINUM   | DJIA     | GOLD        | SILVER      | PLATINUM    |
|----------|------------|------------|------------|----------|-------------|-------------|-------------|
| GOLD     | 0,00013563 | 0,00000011 | 0,00000014 | GOLD     | 0,00013563  | -0,00000019 | -0,00000052 |
| SILVER   | 0,00000011 | 0,00040568 | 0,00000036 | SILVER   | -0,00000019 | 0,00040568  | 0,00000058  |
| PLATINUM | 0,00000014 | 0,00000036 | 0,00024387 | PLATINUM | -0,00000052 | 0,00000058  | 0,00024387  |

Powyższe wyniki oszacowania modelu czynnikowego danego wzorem (4) sugerują, iż na poziom stóp zwrotu metali nieżelaznych (złota, srebra oraz platyny) w niewielkim stopniu wpływają nastroje na rynkach finansowych. Ryzyko rynkowe mierzone współczynnikiem determinacji jest na bardzo niskim poziomie. Świadczy to o występowaniu ryzyka specyficznego, niezależnego od ruchów na giełdach.

Poniżej przedstawiono podobną analizę z wykorzystaniem modeli Sharpe'a, jednakże wykorzystując jako zmienne objaśniające kursy walut CHF, GBP, EUR oraz USD. Analizy dokonano z punktu widzenia polskiego inwestora (kursy wyrażono w PLN/waluta). Wykorzystano ten sam okres. W tabeli 3 przedstawiono wyniki estymacji współczynników beta modelu (4).

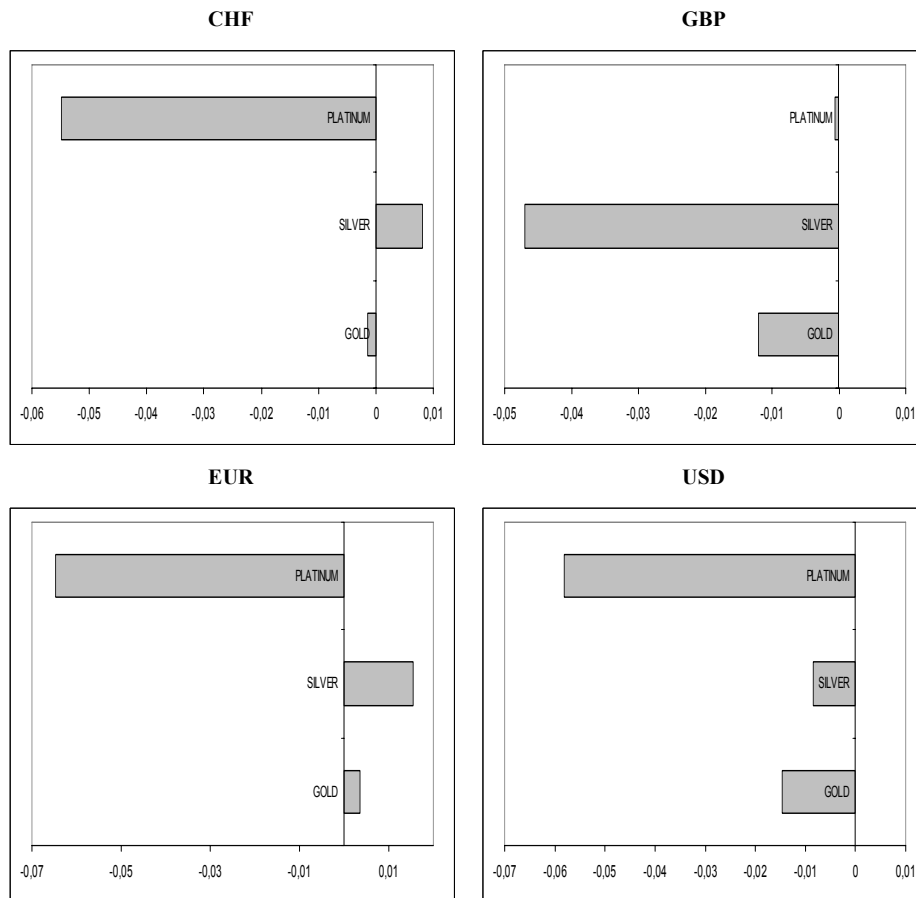
Tabela 3

Współczynniki beta modelu Sharpe'a walut vs. współczynniki determinacji

| METAL           | WSPÓŁCZYNNIK/WALUTA | CHF      | GBP      | EUR      | USD      |
|-----------------|---------------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>GOLD</b>     | BETA                | -0,00138 | -0,01199 | 0,00361  | -0,01464 |
|                 | R-KWADRAT (%)       | 0,00010  | 0,00670  | 0,00052  | 0,01360  |
| <b>SILVER</b>   | BETA                | 0,00805  | -0,04693 | 0,01544  | -0,00842 |
|                 | R-KWADRAT (%)       | 0,00117  | 0,03431  | 0,00318  | 0,00150  |
| <b>PLATINUM</b> | BETA                | -0,05489 | -0,00055 | -0,06465 | -0,05803 |
|                 | R-KWADRAT (%)       | 0,09008  | 0,00001  | 0,09280  | 0,11882  |

Z obliczeń przedstawionych w tabeli 3 wynika, iż w przypadku inwestycji w złoto stopa zwrotu dla tego metalu wykazuje jednokierunkowe zmiany, porównując ze zmianami zmiennej EUR, natomiast przeciwne w odniesieniu do

franka szwajcarskiego, funta brytyjskiego oraz dolara amerykańskiego. Najistotniejszy wpływ na poziom zmiennej GOLD, mierzony współczynnikiem determinacji, wykazuje zmienna USD, tłumacząc 0,014% ryzyka jako ryzyko walutowe. Podobne wnioski można wyciągnąć w przypadku zmiennej SILVER, gdzie wykazano jednokierunkowe zmiany z walutą EUR, natomiast przeciwne – z GBP. Dla srebra ryzyko zmiany stopy zwrotu funta brytyjskiego stanowi 0,034% ryzyka. Stopa zwrotu dla inwestycji w platynę wykazywała przeciwne zmiany w stosunku do zmian pozostałych walut. Najniższe wartości współczynnika beta otrzymano dla zmiennej EUR, natomiast największy wpływ na ryzyko ma kierunek zmian USD (niespełna 0,12%). Wyniki szacunków przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Współczynniki beta modelu Sharpe'a – waluty

Analiza macierzy kowariancji dla zmiennej USD pokazała, że wszystkie wartości są dodatnie ze względu na przeciwny kierunek zmian wszystkich badanych metali nieżelaznych w porównaniu z walutą amerykańską. Podobne wyniki otrzymano dla modeli oszacowanych dla zmiennej niezależnej GBP. W całym badanym okresie najwyższą wartość oczekiwaną wykazywała stopa zwrotu CHF (około 0,003%), natomiast najniższą – GBP (około -0,015%).

## Wnioski

Modele czynnikowe mają szerokie praktyczne zastosowanie w określaniu determinantów kształtowania się aktywów finansowych. Pozwalają na efektywną identyfikację czynników ryzyka, a co za tym idzie – skuteczne zarządzanie inwestycjami. Przedstawiony model Sharpe'a jest jednym z najpopularniejszych modeli wykorzystywanych na rynku finansowym. W artykule wykorzystano go do zbadania wpływu zmian stóp zwrotu indeksów giełdowych oraz kursów walutowych na poziom zwrotów z inwestycji w szlachetne metale nieżelazne – złoto, srebro oraz platynę. Wyniki jednoznacznie pokazują, że główne czynniki ryzyka inwestycji w metale nie wynikają ze zmienności nastrojów na giełdach światowych czy też zmian kursów walut. Współczynniki zbieżności dla wszystkich modeli okazały się być na poziomie bliskim jedności, co sugeruje występowanie ryzyka specyficznego dla danego metalu. Praktyka pokazuje, że bardzo dużą rolę w kształtowaniu się cen metali, a zwłaszcza złota, mają czynniki makroekonomiczne, takie jak zmiany inflacji, zmienność popytu i podaży czy też tzw. interwencjonizm państwowy (działania banków centralnych oraz poziom bazy monetarnej). W badaniu zmienności cen metali są także pomocne tzw. koniunkturalne cykle Kondratiewa, których odpowiednie rozpoznanie pozwala zabezpieczyć majątek inwestycjami w metale szlachetne, co jest alternatywą dla inwestycji giełdowych.

## Literatura

- Chen N.F., Roll R., Ross S.A. (1986): Economic Forces and the Stock Market. „The Journal of Business”, 59 (3), s. 383-404.
- Lakonishok J., Shapiro A.C. (1984): Stock Returns, Beta, Variance and Size: An Empirical Analysis. „Financial Analysts Journal”, No. 40, s. 36-41.
- Sharpe W. (2000): Portfolio Theory and Capital Markets. McGraw-Hill, New York.
- Tarczyński W. (1997): Rynki kapitałowe. Metody ilościowe. Vol. 2. Agencja Wydawnicza „Placet”, Warszawa.
- Zitov E., Wang J. (2006): Modeling Financial Time Series with S-Plus. New York, Springer-Verlag.

---

---

**SINGLE-INDEX SHARPE MODEL – AN EMPIRICAL ANALYSIS  
OF SELECTED ASSETS FROM NON-FERROUS METAL MARKET****Summary**

The subject of this article is to present main factor models used in the analysis of financial asset returns. Three types of models is discussed: macroeconomic model, fundamental model and statistical model. Empirical analysis is based on assets from non-ferrous metal market. Considered assets are gold, silver and platinum and the world's stock market indices. The results show that the main risk factors related to the non-ferrous metal market are not correlated with the volatility of the stock market or changes in exchange rates. An important role in price changes (especially with reference to the gold prices) plays macroeconomic factors: inflation and relation "supply-demand" for considered assets.



**Grażyna Trzpiot  
Justyna Majewska**

## **METODY IDENTYFIKACJI OBSERWACJI JEDNORAZOWYCH I DŁUGOTRWAŁYCH – ANALIZA PORÓWNAWCZA NA ŚWIATOWYCH RYNKACH KAPITAŁOWYCH**

---

---

### **Wprowadzenie**

Problem występowania obserwacji odstających w szeregach czasowych jest przedmiotem rozważań zarówno na płaszczyźnie praktycznej, jak i teoretycznej. Ogólnie rzecz ujmując, przez obserwacje odstające rozumie się obserwacje będące efektem sporadycznych, nieregularnych zdarzeń, których występowanie powoduje – jeśli nie zostaną one zidentyfikowane i odpowiednio potraktowane – zniekształcenia w analizie oraz utrudnia lub wręcz uniemożliwia ich modelowanie. Dlatego konieczne jest wykrywanie takich zaburzeń, a następnie eliminowanie ich wpływu poprzez odpowiednie uwzględnienie w modelu, korektę lub najrzadziej stosowane rozwiązanie – wykluczenie obserwacji z analizy. Mimo wielu prac z tego obszaru nie ma jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy w przypadku występowania obserwacji odstających identyfikować i wprowadzać korektę tego typu obserwacji, czy uwzględniać je w modelu. Przegląd metod identyfikacji i korekty obserwacji odstających można znaleźć m.in. w pracach Hawkins (1980), Ben-Gal (2005), Seo (2006). Natomiast propozycją modelowania szeregów finansowych z obserwacjami odstającymi jest zastosowanie odpornych metod estymacji, które są niejako uzupełnieniem klasycznych metod estymacji (np. metody największej wiarygodności czy metody najmniejszych kwadratów).

W artykule zaprezentowano klasyczne i odporne narzędzie do wykrywania jednorazowych i długotrwałych obserwacji odstających w modelach ARIMA. Przedstawiono klasyczną procedurę identyfikacji obserwacji nietypowych wykorzystującą estymację parametrów klasyczną metodą największej wiarygodności oraz zmodyfikowaną procedurę wykorzystującą odporną metodę

estymacji parametrów ( $\tau$ -estymację). Celem artykułu jest zweryfikowanie obu metod na danych empirycznych pochodzących z parkietów światowych (o różnych poziomach zmienności, kurtozy i skośności).

## 1. Obserwacje nietypowe w szeregach czasowych

Zazwyczaj szeregi czasowe są rezultatem złożenia wielu, różniących się charakterem, składowych. Złożona struktura szeregu w wielu przypadkach utrudnia prawidłowe modelowanie i prognozowanie jego przyszłych wartości, gdyż pojedynczy model nie zawsze jest w stanie prawidłowo odzwierciedlać zmiany zachodzące w kształtowaniu się składowych szeregu. Można oczekiwać, że precyzja modelowania wzrośnie w rezultacie wydzielenia składowych badanego szeregu, niezależnego ich modelowania i agregacji uzyskanych wyników. Szczególnego znaczenia nabiera część nieregularna szeregu, niepodlegająca objaśnieniu, która zawiera przypadkowe wahania szeregu wokół części systematycznej trudno identyfikowalnej a priori.

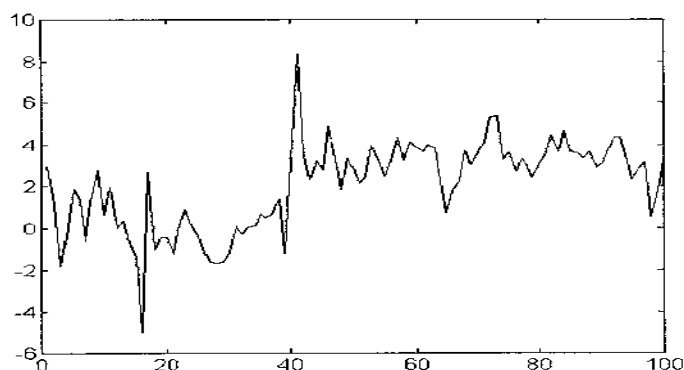
W skład składnika nieregularnego wchodzi:

1. Obserwacje nietypowe, nieujęte w estymacji (ang. outliers), wśród których, ze względu na charakter zmian, wyróżnia się zjawiska\*:
  - jednorazowe (ang. additive outliers – AO), stanowiące istotne odchylenie od przewidywanej wartości badanego zjawiska tylko w jednym okresie, niewpływające na wartości szeregu w następnych okresach,
  - długotrwałe (ang. level shift – LS), powodujące trwałą zmianę poziomu zmiennej,
  - powodujące przejściową zmianę poziomu zmiennej (ang. temporary change), przy czym powrót do stanu początkowego następuje przeważnie zgodnie z funkcją wykładniczą lub liniową.
2. Efekty nieregularne, wywołane przez czynniki losowe lub niemożliwe do przewidzenia, takie jak: klęski żywiołowe, nagłe zmiany w polityce państwa, strajki.

Zjawiska jednorazowe oraz długotrwałe zobrazowano na rysunku 1.

---

\* Tsay (1988) wyróżnia poza wymienionymi również zjawiska innowacyjne (ang. innovation outliers), które powodują zmianę procesu generującego dane, w szczególności zmianę postaci trendu.



Rys. 1. Symulacja procesu AR(1) z trzema obserwacjami jednorazowymi (AO) dla  $t = 16, 17, 41$  oraz jedną obserwacją długotrwałą (LS) dla  $t = 40$

Jak widać na rysunku 1, wprowadzenie obserwacji jednorazowych i długotrwałych może mieć różne skutki. Obserwacje nr 16, 17 i 41 są obserwacjami, które nie wpływają na wartości szeregu w następnych okresach, natomiast obserwacja z numerem 41 istotnie zmieniła poziom zmiennej. Jednak w dłuższych, niż na pokazanym rysunku (gdzie  $n = 100$ ), szeregach czasowych używanych do estymacji zmienności, co przekłada się na szacowanie ryzyka, należy wypracować metodę wykrywania obserwacji odstających i ocenę ich typu.

## 2. Metody wykrywania obserwacji jednorazowych oraz długotrwałych

W literaturze przedmiotu stosuje się wiele procedur wykrywania obserwacji nietypowych, od prostych, np. wykresu rozrzutu, poprzez diagnostykę reszt z ogólnych modeli regresyjnych: wskaźnik *DFITS* (identyfikuje zaistnienie obserwacji odstającej, nie precyzując jej charakteru), reszty standaryzowane, odległość Cooka czy Mahalanobisa\*. O ile odległości Mahalanobisa mierzą odległość przypadku od środka ciężkości wyznaczonego przez zmienne niezależne, a reszty standaryzowane – od linii regresji, o tyle odległości Cooka łączą te dwie odległości i przez to są łączną miarą wpływu poszczególnych

\* W ostatnich latach rozważa się bardziej wyrafinowane metody identyfikacji obserwacji typu outliers wykorzystujące sieci neuronowe lub transformację falkową.

obserwacji na linię regresji. Wspomniane metody są najczęściej wykorzystywane w praktyce i na ogół zaimplementowane w podstawowych pakietach statystycznych, np. SPSS. Jednak metody te nie rozróżniają typów obserwacji odstających, zatem nie można poznać przyczyny występowania takich zjawisk, a co za tym idzie – dokonać świadomego wyboru właściwej metody postępowania z nimi.

### 2.1. Model uwzględniający obserwacje nietypowe

Dla szeregu czasowego  $y_t$ ,  $1 \leq t \leq T$  rozważono model:

$$y_t = \varepsilon_t + \omega \xi_t^{(t_0)}, \quad (1)$$

gdzie nieobserwowalny szereg  $\varepsilon_t$  jest zgodny z procesem ARIMA spełniającym:

$$\Phi(B)(1-B)^d \varepsilon_t = \Theta(B)u_t, \quad (2)$$

natomiast składnik  $\omega \xi_t^{(t_0)}$  reprezentuje efekt zjawiska nietypowego (perturbacji) pojawiającego się w czasie  $t_0$ ,  $\omega$  mierzy wielkość zjawiska nietypowego w czasie  $t_0$ ,  $\xi_t^{(t_0)}$  zależy od typu obserwacji nietypowej. Stąd obserwacja jednorazowa AO w momencie  $t_0$  jest modelowana jako:

$$\xi_t^{(t_0)} = AO_t^{(t_0)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } t = t_0 \\ 0 & \text{dla } t \neq t_0 \end{cases}, \quad (3)$$

a obserwacja długotrwała LS jako:

$$\xi_t^{(t_0)} = LS_t^{(t_0)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_0 \\ 1 & \text{dla } t \geq t_0 \end{cases}. \quad (4)$$

### 2.2. Klasyczna metoda wykrywania obserwacji nietypowych

W pracy wykorzystano metodę opartą na idei Chang, Tiao i Chen (1988) dla wykrywania obserwacji odstających w modelach ARIMA. Podobne podejścia były rozważane przez Tsay (1988) oraz Chen i Liu (1993).

W pierwszej kolejności założono, iż parametry modelu ARIMA –  $\lambda = (\Phi, \Theta)$  i  $\sigma_u^2$  – są znane. Filtr  $\pi(B)$  jest zdefiniowany jako:

$$\pi(B) = \Theta(B)^{-1} \Phi(B)(1-B)^d = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots - \pi_k B^k - \dots \quad (5)$$

Stąd i z (1.2),  $\pi(B)\varepsilon_t = u_t$ . Ze względu na fakt, iż  $\pi(B)$  jest liniowym operatorem, można zastosować go do (1), otrzymując:

$$\pi(B)y_t = u_t + \omega\pi(B)\xi_t^{(t_0)}, \quad (6)$$

co stanowi prosty model regresji liniowej z niezależnymi błędami i współczynnikiem regresji  $\omega$ .

Zatem estymacja  $\omega$  metodą najmniejszych kwadratów jest dana przez:

$$\hat{\omega} = \frac{\sum_{t=t_0}^T (\pi(B)y_t)(\pi(B)\xi_t^{(t_0)})}{\sum_{t=t_0}^T (\pi(B)\xi_t^{(t_0)})^2} \quad (7)$$

z wariancją:

$$\text{Var}(\hat{\omega}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum_{t=t_0}^T (\pi(B)\xi_t^{(t_0)})^2}, \quad (8)$$

gdzie  $\sigma_u^2$  jest wariancją  $u_t$ .

Jednak w praktyce ze względu na nieznaną wartość parametrów modelu ARIMA (7) i (8) są szacowane zwykle metodą najmniejszych kwadratów lub metodą największej wiarygodności, co w oczywisty sposób prowadzi do:

$$\hat{\omega} = \frac{\sum_{t=t_0}^T \hat{u}_t (\hat{\pi}(B)\xi_t^{(t_0)})}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}(B)\xi_t^{(t_0)})^2}, \quad (9)$$

$$\hat{\text{Var}}(\hat{\omega}) = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}(B)\xi_t^{(t_0)})^2}, \quad (10)$$

gdzie  $\hat{u}_t = \hat{\pi}(B)y_t$  oraz  $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{T-t_0} \sum (\hat{u}_t - \hat{\omega}(\hat{\pi}(B)\xi_t^{(t_0)}))^2$ .

Test dla wykrycia obserwacji odstającej w momencie  $t_0$  może być oparty na t-statystyce:

$$U = \frac{|\hat{\omega}|}{(\hat{Var}(\hat{\omega}))^{\frac{1}{2}}}. \quad (11)$$

Jednak skoro zarówno  $t_0$ , jak i rodzaj obserwacji odstającej nie są znane, to w celu stwierdzenia, czy występuje obserwacja odstająca, zastosowano statystykę:

$$U_0 = \max_{t_0} \max \{U_{t_0, AO}, U_{t_0, LS}\},$$

gdzie  $U_{t_0, AO}, U_{t_0, LS}$  są statystykami zdefiniowanymi przez (11). Nierówność  $U_0 > M$ , dla dowolnie ustalonej stałej  $M$ , świadczy o występowaniu obserwacji odstającej jednorazowej czy długotrwałej.

Opisana procedura może jednak zawieść w przypadku dużej liczby obserwacji odstających. Z jednej strony jest to spowodowane silnym wpływem tego typu obserwacji na oszacowania parametrów metodą największej wiarygodności, co w konsekwencji wpływa na niemożność odkrycia wszystkich pożądaných obserwacji. Wada ta może zostać zniwelowana poprzez zastosowanie odpornych metod do oszacowania parametrów modelu ARIMA. Z drugiej strony jeśli  $y_{t_0}$  jest obserwacją odstającą, wówczas nie tylko wywiera wpływ na  $\hat{u}_{t_0}$ , ale także na późniejsze residua. Ze względu na fakt, iż statystyka  $U_0$  jest zaprojektowana w taki sposób, by wykryć jedną obserwację nietypową w czasie  $t_0$ , to pożądanę jest, by na  $U_0$  miała wpływ tylko jedna obserwacja w czasie  $t_0$ . Zatem by zminimalizować niebezpieczeństwo odwrotnej sytuacji, można zastosować residua uzyskane w wyniku filtracji w miejsce residuów  $\hat{u}_{t_0}$ .

### 2.3. Odporna metoda wykrywania obserwacji nietypowych

Poniżej przedstawiono iteracyjną procedurę zaprezentowaną przez Bianco i in. (2001) dla wykrywania obserwacji odstających. Różnica między procedurą uwzględniającą odporną metodę estymacji a tą przedstawioną w podrozdziale 2.2 polega na wykorzystaniu residuów opartych na szacowaniu parametrów ARIMA tzw. filtrowaną  $\tau$ -estymacją (zamiast gaussowskiej metody największej wiarygodności) oraz użyciu odpornej wersji filtra  $\pi$ . Procedura postępuje według kroków:

1. Estymacja parametrów  $\lambda$  i  $\sigma_u$  z użyciem odpornego estymatora  $F_\tau$  :
  - $\tau$ -estymacja (Maronna, Martin, Yohai, 2006; Martin, Yohai, 1996) jest niejako filtrem eliminującym wpływ obserwacji odstających,
  - odporny  $\tau$ -estymator z filtrem ( $F_\tau$ ) jest zdefiniowany jako:

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} Q^*(\lambda), \quad (12)$$

gdzie:

$$Q^*(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log a_t^2(\lambda) + T \log \left( \tau^2 \left( \frac{\tilde{u}_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}, \dots, \frac{\tilde{u}_T(\lambda)}{a_T(\lambda)} \right)^* \right),$$

$$\tilde{u}_t = y_t - \hat{\varepsilon}_{t|t-1}.$$

2. Zastosowanie odpornego filtra do szeregu  $y_t$  z wykorzystaniem estymacji z kroku 1, czego efektem jest otrzymanie residuów  $\tilde{u}_t$  i parametru skali  $s_t$ .
3. Dla ograniczenia czasu obliczeń zbiorów z potencjalnymi obserwacjami odstającymi jest wstępnie wyznaczany następująco: założono, iż  $t_0$  jest pozycją-kandydatem, na której znajduje się obserwacja odstająca, jeśli  $|\tilde{u}_{t_0}| > M_1 s_{t_0}$ , gdzie  $M_1$  jest dowolnie wybraną stałą, przez  $C$  oznaczono zatem zbiór  $t_0$  spełniających tę nierówność.
4. Dla każdego  $t_0 \in C$  niech  $\hat{\pi}^*$  będzie odpornym filtrem oraz  $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ . Niech  $\tilde{u}_t^* = \hat{\pi}^*(B)y_t$  będą residuami otrzymanymi w wyniku filtrowania. Zatem odpowiednikami wzorów (9)-(11) w wersji odpornej są:

$$\tilde{\omega} = \frac{\sum_{t=t_0}^T \tilde{u}_t^* (\hat{\pi}^*(B)\xi_t^{(t_0)}) / s_t^2}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}^*(B)\xi_t^{(t_0)})^2 / s_t^2} \quad (13)$$

$$\hat{Var}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\sum_{t=t_0}^T (\hat{\pi}^*(B)\xi_t^{(t_0)})^2 / s_t^2} \quad (14)$$

---

\*  $\tau$ -estymator jest zdefiniowany przez  $\tau_n(\mathbf{u}) = s_n^2(\mathbf{u}) \sum_{t=1}^T \rho_2\left(\frac{\mathbf{u}_t}{s(\mathbf{u})}\right)$ , dla dowolnego  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_T)'$ , gdzie  $s(\mathbf{u})$  jest M-estymatorem skali (szczegóły zob. Maronna, Martin, Yohai, 2006; Zivot, Wang, 2001).

oraz:

$$U^* = \frac{|\tilde{\omega}|}{(\hat{Var}(\tilde{\omega}))^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

Celem zastąpienia  $\hat{\pi}$  przez  $\hat{\pi}^*$  jest eliminacja efektu obserwacji odstających na pozycjach innych niż  $t_0$  (w trakcie próby wykrywania obserwacji odstającej w  $t_0$ ). Z tego powodu efekt tych obserwacji na pozycjach przed  $t_0$  i po  $t_0 + h$  jest redukowany. Zatem chcąc wykryć obserwację odstającą w momencie  $t_0$ , nie traci się szansy na wykrycie obserwacji odstających znajdujących się w pobliżu pozycji  $t_0$ ,

5. Wyznaczenie:

$$U_0^* = \max_{t_0 \in C} \max \{U_{t_0, AO}^*, U_{t_0, LS}^*\}.$$

Podobnie jak w poprzedniej procedurze, dla  $U_0^* \leq M_2$  i dla dowolnie ustalonej stałej  $M_2$ , żadna obserwacja nie została już wykryta i procedurę kończy się w tym kroku. Ponadto procedura ta przewiduje jeszcze wprowadzanie korekty dla wykrytych obserwacji odstających poprzez zastąpienie  $y_t$  przez  $y_t - \tilde{\omega}\xi_t^{(t_0)}$ ; po korekcie wykrytej obserwacji odstającej procedura wraca do kroku 2.

W ślad za autorami powyższych metod wartość stałej  $M_1$  powinna być niska, np.  $M_1 = 2$ , dla celów zwiększenia mocy procedury wykrywania obserwacji odstających. Przyjęto również, że  $M_2 = 3$ .

### 3. Przykład empiryczny

Analizie empirycznej poddano 10 indeksów z giełd światowych: trzy amerykańskie: NASDAQ100, SP500 oraz Dow Jones, oraz pięć europejskich: Amsterdam (AEX25), Paryż (CAC40), Frankfurt (DAX30), Londyn (FTSE100) i Warszawa (WIG20). Badania obejmują okres od 3 stycznia 2000 roku do 20 maja 2002 roku. Wybór okresu badawczego został podyktowany silnym wpływem ataku terrorystycznego 11.09.2001 roku na notowania indeksów na pozostałych parkietach światowych i przewidywaną większą ilością obserwacji odstających, ułatwiających porównanie metod wykrywania obserwacji nietypowych.

Szeregi logarytmicznych stóp zwrotu zanalizowano pod kątem identyfikacji obserwacji jednorazowych AO oraz długotrwałych LS. Zastosowano procedurę klasyczną, gdzie parametry modelu ARIMA są szacowane metodą największej wiarygodności oraz procedurę z odporną estymacją parametrów modelu ARIMA. Rezultaty zamieszczono w tabelach 1 i 2.

Tabela 1

Identyfikacja obserwacji odstających – klasyczna metoda wykrywania obserwacji nietypowych

| Indeks    | Data (MM-DD-RR) | Typ obserwacji | $U_0$ |
|-----------|-----------------|----------------|-------|
| AEX25     | 09-21-01        | AO             | 4,96  |
| DAX30     | 09-11-01        | LS             | 5,11  |
| DOW JONES | 09-17-01        | LS             | 5,72  |
| FTSE100   | 09-11-01        | IO             | 5,32  |
| NASDAQ100 | 01-02-01        | AO             | 5.02  |
| SP500     | –               | –              | –     |
| WIG20     | –               | –              | –     |

Tabela 2

Identyfikacja obserwacji odstających – odporna metoda wykrywania obserwacji odstających

| Indeks    | Data (MM-DD-RR) | Typ obserwacji | $U_0^*$ |
|-----------|-----------------|----------------|---------|
| 1         | 2               | 3              | 4       |
| AEX25     | 01-04-01        | LS             | 4,29    |
|           | 09-21-01        | AO             | 5.69    |
|           | 09-28-01        | AO             | 4.88    |
|           | 11-12-01        | AO             | 3.95    |
|           | 01-04-01        | LS             | 4.29    |
|           | 09-14-01        | AO             | 3.91    |
|           | 09-21-01        | AO             | 4.28    |
| DAX30     | 11-12-01        | AO             | 3.69    |
|           | 09-11-01        | LS             | 5.86    |
| DOW JONES | 09-14-01        | AO             | 4.22    |
|           | 03-16-00        | LS             | 4.29    |
|           | 03-12-01        | LS             | 3.90    |
|           | 09-17-01        | LS             | 6.65    |
|           | 09-21-01        | AO             | 3.94    |

cd. tabeli 2

| 1         | 2        | 3  | 4    |
|-----------|----------|----|------|
| FTSE100   | 09-11-01 | IO | 5.66 |
|           | 09-14-01 | AO | 4.36 |
|           | 09-21-01 | AO | 4.15 |
| NASDAQ100 | 04-14-00 | AO | 4.40 |
|           | 12-05-00 | IO | 3.55 |
|           | 01-02-01 | AO | 5.87 |
| SP500     | 10-12-00 | AO | 4.37 |
|           | 01-02-01 | AO | 4.53 |
|           | 03-12-01 | LS | 3.84 |
|           | 09-17-01 | LS | 4.30 |
| WIG20     | 09-14-01 | AO | 3,92 |
|           | 09-21-01 | AO | 3,21 |

Klasyczna procedura identyfikacji obserwacji nietypowych wykryła znacznie mniej obserwacji odstających niż w przypadku metody odpornej. Dla indeksów SP500 oraz WIG20 nie wykryto żadnych obserwacji odstających jednorazowych i długotrwałych przy stosowaniu klasycznej metody największej wiarygodności. W dalszej kolejności to inwestor podejmuje decyzję o ewentualnej korekcie obserwacji odstających (w szczególności obserwacji o charakterze jednorazowym, przy czym obserwacje długotrwałe pozwalają na zrozumienie wpływu szoków na zachowanie rynków światowych) lub też zastosowaniu odpornych metod na te obserwacje podczas procesu estymacji.

## Podsumowanie

Niniejsze opracowanie nie wyczerpuje w pełni tematu związanego z wykorzystaniem odpornych metod w identyfikacji obserwacji odstających. Niewątpliwie kwestia wykrywania obserwacji odstających z określeniem typu tej obserwacji jest ważna, gdyż obserwacje odstające powodują większe błędy estymacji parametrów, a co za tym idzie – zwiększają błąd prognozy. Choć odporna procedura identyfikacji obserwacji typu outliers jest bardziej złożona obliczeniowo, to jednak dostarcza informacji istotnych w celu szacowania chociażby zmienności aktywów finansowych i prognozowania.

## Literatura

Ben-Gal I. (2005): Outlier Detection. W: Data Mining and Knowledge Discovery Handbook: A Complete Guide for Practitioners and Researchers. Red. O. Maimon, L. Rokach. Kluwer Academic Publishers.

- Bianco M., García B.M., Martínez E.J., Yohai V.J. (2001): Outlier Detection in Regression Models with ARIMA Errors Using Robust Estimates. „Journal of Forecasting”, Vol. 20 (8).
- Chang I., Tiao G.C., Chen C. (1988): Estimation of Time Series Parameters in the Presence of Outliers. „Technometrics”, 30.
- Chen C., Liu L.M. (1993): Joint Estimation of the Model Parameters and Outlier Effects in Time Series. „Journal of the American Statistical Association” 88.
- Hawkins D. (1980): Identification of Outliers. Chapman and Hall.
- Maronna R., Martin R., Yohai V. (2006): Robust Statistics. Theory and Methods. John Wiley and Sons, NY.
- Martin R.D., Yohai V.J. (1996): Highly Robust Estimation of Autoregressive Integrated Time Series Models. Publicaciones Previas 89, Facultad de Ciencias Exactas Naturales, Universidad de Buenos Aires.
- Seo S. (2006): A Review and Comparison of Methods for Detecting Outliers in Univariate Data Sets. University of Pittsburgh, <http://etd.library.pitt.edu/ETD>.
- Tsay R.S. (1988): Outliers, Level Shifts and Variance Changes in Time Series. „Journal of Forecasting”, 7,
- Zivot E., Wang J. (2001): Modelling Financial Time Series with S-PLUS. September, 27.

#### **IDENTIFICATION METHODS OF ADDITIVE AND LEVEL SHIFT OUTLIERS – PERFORMANCE ANALYSIS ON WORLDWIDE CAPITAL MARKETS**

##### **Summary**

Outlier detection is vital because the presence of outliers causes biasedness in the parameters estimates, which in turn increase prediction error. Among lots of existing in literature methods of detecting and correcting outliers it is worth to choose these that can not only identify the location of the outlier but can also its types and impact. In the paper we discuss classical and robust diagnostic methods to detect additive outliers and level shift in ARIMA models. The classical one is based on residuals obtained using nonrobust estimates. In general, this procedure succeed only when the proportion of outliers is very low and the outliers are not very large. Otherwise, due to masking effects, the outliers may not be detected. The second described method uses innovation residuals based on the filtered  $\tau$  estimates of the ARIMA parameters instead of Gaussian MLE. For the empirical analysis we choose time series of world's stock exchanges.



**Alicja Ganczarek-Gamrot**  
**Justyna Majewska**

## **ODPORNÁ ESTYMACJA ZMIENNOŚCI NA RYNKU ENERGII ELEKTRYCZNEJ**

---

---

### **Wprowadzenie**

Rynek energii elektrycznej charakteryzuje wysoka zmienność cen, co w dużej mierze jest spowodowane występowaniem tzw. pików cen. Niemożność magazynowania energii i wpływ warunków pogodowych na zapotrzebowanie na energię znajdują odzwierciedlenie w gwałtownych fluktuacjach jej cen i występowaniu wcześniej wspomnianych pików cenowych. Jednak gwałtowne skoki cen stanowią poważny problem dla modeli szacowania i prognozowania zmienności, a w szczególności dla szerokiej grupy modeli klasy GARCH. Oczywiście jest, iż skuteczne modele prognozowania muszą je uwzględniać. Wyniki dotychczasowych badań wskazują, iż zdolności prognozowania w wyniku zastosowania modeli klasy GARCH uwzględniających efekt leptokurtozy i grubych ogonów rozkładów stóp zwrotu są porównywalne i nie zawsze kolejne rozszerzenia czy uogólnienia klasycznego modelu GARCH(p,q) prowadzą do zwiększenia trafności prognoz zmienności (Fiszeder, 2007). Ponadto, szeregi reszt rozszerzonych modeli GARCH nadal (choć w mniejszym stopniu niż klasyczny GARCH) wykazują grube ogony w przypadku występowania tzw. addytywnych obserwacji odstających (additive outliers – AO). Addytywne obserwacje odstające to istotne pojedyncze odchylenie od przewidywanej wartości tylko w jednym okresie, nie wpływające na wartości szeregu w następnych okresach. I choć występowanie pików cenowych na rynku energii jest jedną z podstawowych właściwości szeregów czasowych na tym rynku, to wśród nich mogą również występować obserwacje typu outliers.

Ignorowanie obserwacji odstających może doprowadzić do znaczących obciążeń estymowanych parametrów modeli (Fox, 1972; Van Dijk, Franses, Lucas, 1999), niepożądanych efektów podczas testowania warunkowej homoskedastyczności (Carnero, Peña, Ruiz, 2007), obciążonych prognoz (Chen, Liu, 1993; Franses, Ghijssels, 1999). Zatem stosowane w praktyce rozwiązania opierają się na identyfikacji i eliminacji lub korekcie ekstremalnych obserwacji lub zastosowaniu odpowiednich procedur, które zmniejszyłyby ich wpływ na błędy prognoz. Ze względu na fakt, iż gwałtowne skoki cen są typowe dla procesu cen energii (Clewlow, Strickland, 2000; Alvaro, Peña, Villaplana, 2002; Modelling

Prices..., 2004; Hadsell, Marathe, Shawky, 2004; Goto, Karolyi, 2004), nie powinno się ich z pewnością eliminować z odcinka kalibracji, a ze względu na fakt, iż nierzadko niosą ze sobą istotne informacje, ryzykowne jest również redukowanie ich wartości.

Na podstawie notowań z polskiej Towarowej Giełdy Energii dokonano analizy zidentyfikowanych gwałtownych skoków zmienności cen energii elektrycznej oraz zastosowano odporne metody estymacji parametrów modeli GARCH w celu odpowiedzi na pytania:

- czy na zmniejszenie błędów estymacji parametru zmienności może wpływać wcześniejsza identyfikacja i korekta obserwacji odstających, czy też stosowanie odpornych metod do szeregu finansowego?
- czy modyfikacje metody największej wiarygodności dają lepsze wyniki niż quasi-metoda największej wiarygodności w szeregach z gwałtownymi skokami cen?

## 1. Model zmienności cen energii elektrycznej w przypadku występowania obserwacji odstających

Przydatność szerokiej grupy modeli GARCH do opisu kształtowania cen energii elektrycznej i ich zmienności na polskim rynku energii przedstawiono w pracach Ganczarek (2008); Weron (2006); Włodarczyk i Zawada (2008). W kontekście obserwacji odstających rozważania skoncentrowano na nieliniowych modyfikacjach klasycznego modelu GARCH uwzględniających efekt dźwigni: GJR-GARCH oraz QGARCH.

W przypadku występowania jednorazowych obserwacji odstających AO w momencie  $t = \tau$ , wpływających na poziom obserwacji, równanie średniej warunkowej w modelach GARCH przyjmuje postać:

$$y_t = \mu + \omega_{AO} I_T(t) + \varepsilon_t = \mu + \omega_{AO} I_T(t) + \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1)$$

gdzie  $\omega_{AO}$  prezentuje wielkość obserwacji odstającej,  $I_T(t) = 1$  dla  $t = \tau$ ; w przeciwnym przypadku  $I_T(t) = 0$ ,  $\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$  (może być rozpatrywany inny rozkład).

Równania warunkowej wariancji w przypadku tego typu obserwacji pozostają takie same, tzn.:

- dla GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

gdzie  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_1 + \beta < 1$ ,

– dla GJR-GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}}(t-1) + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (3)$$

gdzie  $I_{\{\varepsilon_i < 0\}}(t) = 1$  dla  $\varepsilon_i < 0$ , lub 0 w przeciwnym wypadku,  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 / 2 < 1$ ,

– dla QGARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (4)$$

gdzie  $\alpha_1 + \beta < 1$ ; składnik  $\gamma_1 \varepsilon_{t-1}$  umożliwia uchwycenie asymetrycznego wpływu szoków na wariancję; jeśli  $\gamma_1 < 0$ , to efekt ujemnego szoku na wariancję  $\sigma_t^2$  będzie większy niż efekt dodatniego szoku tego samego rozmiaru.

Parametry modeli heteroskedastycznych są na ogół szacowane metodą quasi-największej wiarygodności (QML). Choć metoda ta daje zgodne oszacowania parametrów nawet wtedy, gdy rozkład nie jest rozkładem normalnym, zarzuca się jej wysokie wartości błędów prognoz oraz nieefektywność zwiększającą się wraz z poziomem odchylenia się od normalności (Jacquier, Polson, Rossi, 1994). Stąd oprócz wielu modeli stanowiących rozszerzenie klasycznego modelu GARCH (uwzględniających własności szeregów finansowych) występują metody tworzone dla celów estymacji parametrów podstawowych typów modeli GARCH.

## 2. Odporna estymacja zmienności

Głównym celem statystyki odpornej jest nie tylko dostarczanie narzędzi pozwalających na ocenę odporności klasycznych metod statystycznych, ale także dostarczanie nowych estymatorów i testów, które charakteryzują się odpornością na pewne odstępstwa od założonego modelu (Wielowymiarowe metody..., 2010).

Według Hubera (1981), odporne metody estymacji powinny mieć następujące własności:

- H1) Estymacja powinna być efektywna, gdy wszystkie obserwacje z próby pochodzą z założonego modelu.
- H2) Zastąpienie niewielkiej części obserwacji obserwacjami odstającymi powinno mieć nieznaczny wpływ na wynik estymacji.

Koncepcja odpornego podejścia do modeli GARCH polega na zmniejszeniu wpływu obserwacji odstających na estymowaną zmienność. Dzieje się to poprzez wprowadzenie odpowiedniej funkcji wagi  $r_k(x)$  w równaniu warunkowej wariancji (poniżej dla GARCH(1,1))\*:

$$\sigma_{kt}^{*2} = \alpha_0 + \alpha_1 r_k \left( \frac{y_{t-1}^2}{\sigma_{kt-1}^{*2}} \right) \sigma_{kt-1}^2 + \beta \sigma_{kt-1}^{*2}, \quad r_k(x) = \begin{cases} x, & |x| < k \\ k, & |x| \geq k \end{cases}, \quad (5)$$

która ma za zadanie zmniejszać rozprzestrzenianie się wpływu obserwacji odstających, ale przede wszystkim polega na zastosowaniu odpornej metody estymacji parametrów równania warunkowej wariancji (Muller, Yohai, 2007).

Wyniki dotychczasowych badań potwierdzają, iż kombinacja zmodyfikowanego równania wariancji oraz odpornej na obserwacje odstające metody estymacji redukuje wartości błędów prognoz ex-post RSME w obecności gwałtownych skoków cen/stóp zwrotu (Boudt, Danielsson, Laurent, 2010; Carnero, Pêna, Ruiz, 2008). Należy również zwrócić uwagę na fakt, iż w podejściu tym zarówno estymacja, jak i identyfikacja gwałtownych skoków stanowi jeden krok.

Odporna alternatywa metody quasi-największej wiarygodności – ograniczona metoda quasi największej wiarygodności (Bounded QML – BQML) dla oszacowań parametrów równań warunkowej wariancji wybranych modeli klasy GARCH (Carnero, Pêna, Ruiz, 2008) opiera się na maksymalizacji funkcji największej wiarygodności t-Studenta:

$$L_S = \sum_{t=2}^T L_{S_t} = \sum_{t=2}^T \left[ \log\left(\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2\eta}\right)\right) - \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{2\eta}\right)\right) - \frac{1}{2} \left[ \log\left(\Gamma\left(\frac{1-2\eta}{\eta}\right)\right) + \log(\pi) + \log \sigma_t^2 + \frac{\eta+1}{\eta} \log\left(1 + \frac{\eta}{1-2\eta} \frac{y_t^2}{\sigma_t^2}\right) \right] \right], \quad (6)$$

gdzie  $\Gamma(\cdot)$  jest funkcją Gamma oraz  $\eta = \frac{1}{\nu}$ , gdzie  $\nu$  jest liczbą stopni swobody rozkładu t-Studenta.

Parametr  $\eta$  jest postrzegany jako miara grubości ogona rozkładu, przy czym  $0 \leq \eta < 0,5$ , gdy warunkowy rozkład posiada skończoną wariancję, tj.  $\nu > 2$ . Jeśli oznaczy się przez  $\theta$  wektor nieznanych parametrów równania warunkowej wariancji, to estymator BQML ma następującą postać:

\* Za: Muller, Yohai (2006):  $k = 5,02$ .

$$\hat{\theta}_{QBML} = \begin{cases} \hat{\theta}_1, & L \leq L^* \\ \hat{\theta}_2, & L > L^* \end{cases}, \quad (7)$$

gdzie estymator  $\hat{\theta}_1$  wyznacza się maksymalizując funkcję największej wiarygodności t-Studenta, a  $\hat{\theta}_2$  – maksymalizując zmodyfikowaną postać funkcji największej wiarygodności t-Studenta  $L^*$ , gdzie równanie warunkowej wariancji ma postać (5). Estymator BQML posiada własności H1) oraz H2) (Carnero, Pêna, Ruiz, 2008).

### 3. Wyniki przeprowadzonej analizy

Celem analizy empirycznej jest odpowiedź na pytania:

- czy na zmniejszenie błędów estymacji parametru zmienności może wpływać wcześniejsza identyfikacja i korekta obserwacji odstających, czy też stosowanie odpornych metod do szeregu zmienności cen energii elektrycznej?
- czy modyfikacje metody największej wiarygodności dają lepsze wyniki niż quasi-metoda największej wiarygodności w szeregach zmienności cen energii elektrycznej z gwałtownymi skokami wartości?

O ile odporne metody przynoszą bardzo dobre efekty w estymacji i prognozowaniu zmienności na rynku kapitałowym (Wielowymiarowe metody..., 2010), o tyle interesujące jest ich zachowanie w przypadku szeregów czasowych pochodzących z rynku energii ze względu na fakt, iż średnia dzienna zmienność na rynku energii może wynieść aż 50% (na tradycyjnych rynkach kapitałowych osiąga około 1.5%).

#### 3.1. Charakterystyka danych

Analizie poddano godzinowe liniowe stopy zwrotu cen energii elektrycznej z Rynku Dnia Następnego (RDN) Towarowej Giełdy Energii z okresu od 01.01.2009 do 31.03.2011 roku. Ze względu na występującą w szeregu danych cykliczność (rysunek 1) szeregi stóp zwrotu opisano za pomocą zintegrowanego sezonowo modelu autoregresji i średniej ruchomej SARIMA(p,d,q)(P<sub>s</sub>,D<sub>s</sub>,Q<sub>s</sub>) (Brockwell, Davis, 1996):

$$p(B)P_s(B^s)\nabla_s^d r_t = q(B)Q_s(B^s)\varepsilon_t, \quad (8)$$

$$\text{gdzie: } p(B) = 1 - \sum_{j=1}^p p_j B^j, \quad P_s(B) = 1 - \sum_{j=1}^p P_{s,j} B^j, \quad q(B) = 1 - \sum_{j=1}^q q_j B^j,$$

$Q_s(B) = 1 - \sum_{i=1}^Q Q_{s,i} B^i$ ,  $s$  – opóźnienie sezonowe szeregu,  $d$  – rząd zintegrowania szeregu,  $r_t$  – empiryczne wartości szeregu (liniowe stopy zwrotu),  $B$  – operator przesunięcia  $B^s r_t = r_{t-s}$ ,  $\nabla$  – operator różnicowy  $\nabla^s r_t = r_t - r_{t-s} = (1 - B^s)r_t$ ,  $\varepsilon_t$  – reszty modelu.

Opierając się na wynikach funkcji autokorelacji oraz autokorelacji cząstkowej (rysunek 1), stopy zwrotu cen energii elektrycznej opisano za pomocą modelu SARIMA(1,0,1)(1,1,1) z opóźnieniem sezonowym 192 godziny (168 godzin – opóźnienie tygodniowe, 24 godziny – opóźnienie dobowe). Wszystkie parametry modelu SARIMA(1,0,1)(1,1,1)<sub>192</sub> są statystycznie istotne (tabela 1) i w pełni eliminują cykliczność i autokorelację w wartości oczekiwanej danych (rysunek 2).

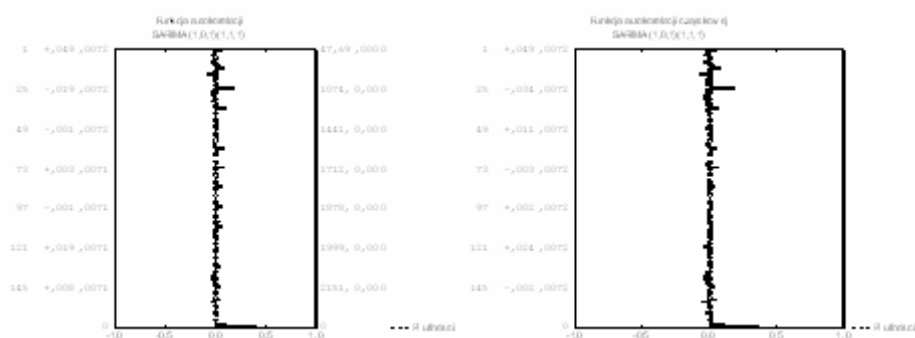


Rys. 1. Funkcja autokorelacji oraz funkcja autokorelacji cząstkowej szeregu stóp zwrotu cen energii elektrycznej

Tabela 1

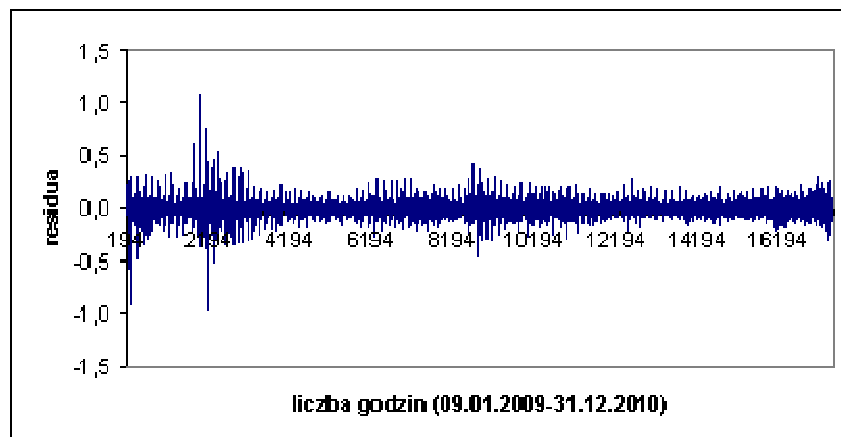
Parametry modelu SARIMA(1,0,1)(1,1,1)<sub>192</sub>

|       | Parametry | p-wartość |
|-------|-----------|-----------|
| p(1)  | 0,889880  | < 0,01    |
| q(1)  | 0,972254  | < 0,01    |
| Ps(1) | 0,608268  | < 0,01    |
| Qs(1) | 0,395399  | < 0,01    |



Rys. 2. Funkcja autokorelacji oraz funkcja autokorelacji cząstkowej reszt modelu SARIMA(1,0,1)(1,1,1)<sub>192</sub>

Po usunięciu z danych cykliczności i autokorelacji otrzymano residua o niewielkim wahanu oraz widocznym efekcie skupiania się zmienności, zaburzone pojedynczymi gwałtownymi skokami (rysunek 3). Otrzymane reszty stanowią próbę do estymacji parametrów zmienności (łącznie 19 487 obserwacji).



Rys. 3. Residua modelu SARIMA(1,0,1)(1,1,1)<sub>192</sub>

### 3.2. Identyfikacja danych odstających

W kolejnym kroku dokonano analizy szeregu residuów pod kątem identyfikacji wartości odstających. Najprostszą techniką identyfikacji pików cen/stóp zwrotu jest przyjęcie pewnego progu, powyżej którego wszystkie ceny/stopy zwrotu są obserwacjami odstającymi (przegląd technik identyfikacji i korekty obserwacji odstających można znaleźć w pracy Trück, Weron Wolff (2007), zaś przegląd klasycznych i nieklasycznych metod identyfikacji w pracy Cateni, Colla, Vannucci (2008)). Wybór progu jest dowolny, stąd tego typu metody należy stosować ostrożnie. Najrozsądniejsze wydaje się zastosowanie algorytmów, które w pojedynczych krokach wykrywają po jednej obserwacji odstającej. Jest to szczególnie ważne ze względu na własności obserwacji odstających (efekty maskowania oraz „zatapiania”, masking oraz swamping effects (Barnett, Lewis, 1994)). Jeden z algorytmów wykorzystuje dyskretną transformację falkową.

Niech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  będzie analizowanym szeregiem czasowym, gdzie  $X_i = f(t_i)$ ,  $t_i = i/n$ ,  $i = 1, \dots, n$  oraz  $n = 2^j$ . Dyskretna transformata falkowa (Discrete Wavelet Transform – DTW) pozwala przedstawić  $\mathbf{X}$  w postaci liniowej kombinacji czynników: detali  $\mathbf{D}_1 = (d_1, \dots, d_{n/2})$ , zawierających informację o wysokich częstotliwościach, oraz aproksymacji obserwacji  $\mathbf{A}_1 = (a_1, \dots, a_{n/2})$ \*. Główną zaletą współczynników detali jest ich skrajna wrażliwość na takie zjawiska, jak piki czy szum. Dlatego też koncepcja algorytmu wykrywania obserwacji odstających opiera się na analizie współczynników detali uzyskanych w wyniku zastosowania dyskretnego transformacji falkowej do szeregu reszt modelu. Obserwacja jest identyfikowana jako odstająca w wyjściowym szeregu czasowym, jeśli odpowiadający jej współczynnik detalu jest wyższy (co do wartości bezwzględnej) niż pewna założona wartość progowa. Dla szeregów czasowych z gwałtownymi pikami odpowiedni wybór stanowi funkcja falkowa typu „boxcar”, np. falka Haara (Bilen, Huzurbazar, 2002). Ponadto, za Veiga i Grane (2010), zakłada się, iż rozkład reszt modelu zgodny

\* Transformata falkowa jest przekształceniem dwuparametrowym odwzorującym jednowymiarowy sygnał  $f(t)$  w dwuwymiarową tablicę współczynników  $c_{j,k} : f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$ , gdzie zbiór funkcji

falkowych  $\psi_{j,k}(t)$  jest zazwyczaj bazą ortogonalną oraz  $j \in (0, \infty)$ ,  $k \in (-\infty, \infty)$ . Zbiór wszystkich współczynników  $c_{j,k}$  jest nazywany dyskretną transformacją falkową (Discrete Wavelet Transformation)

sygnału  $f(t)$ , a (1) jest transformacją odwrotną. Wprowadzając tzw. funkcję skalującą  $\varphi_{j,k}$ , sygnał  $f(t)$

można przedstawić jako: 
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

z rozkładem normalnym/t-studenta pociąga za sobą to, iż rozkład maksimum współczynników detali (co do wartości bezwzględnej) jest również normalny/t-studenta. Dla zidentyfikowania pojedynczych AO wystarczy ograniczenie do wyznaczenia pierwszego poziomu współczynników falkowych detali. Odwrotna transformacja falkowa pozwala na identyfikację obserwacji odstających w kolejnych etapach.

Kwestią indywidualną jest wyznaczenie wartości progowej, za Veiga i Grane (2010) – wartość progową stanowi 95% percentyl rozkładu maksimum detali.

Zatem niech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  będzie szeregiem reszt z dopasowania wybranego modelu, o rozkładzie normalnym (t-Studenta). Procedura wykrywania obserwacji odstających składa się z następujących kroków:

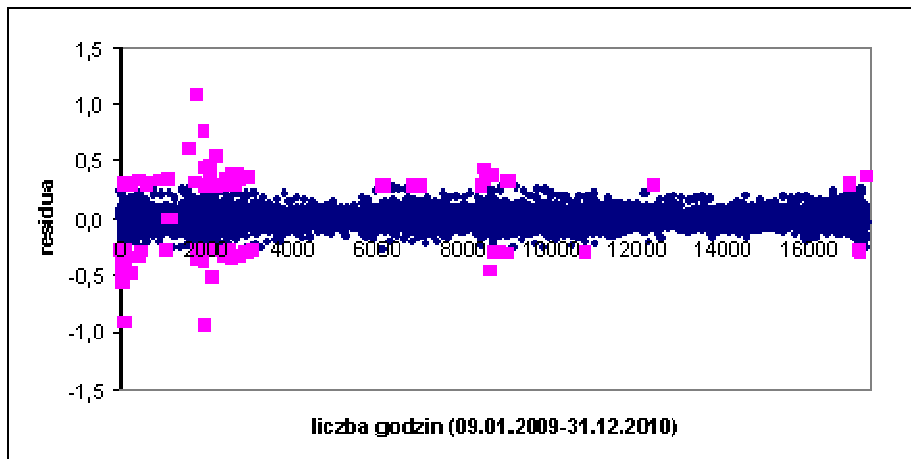
1. Zastosowanie dyskretnej transformacji falkowej do szeregu reszt  $\mathbf{X}$  w celu otrzymania pierwszego poziomu współczynników falkowych  $\mathbf{A}_1 = (a_1, \dots, a_{n/2})$  oraz  $\mathbf{D}_1 = (d_1, \dots, d_{n/2})$ .
2. Wybór progu  $k^\alpha$  równego 95% percentylowi rozkładu maksimum współczynników detali (w wartościach bezwzględnych), w przypadku wykrywania AO:  $k^\alpha = k^{0,05}$ .
3. Znalezienie  $d_{\max} = \max_{1 \leq j \leq n/2} \{|d_j| > k^{0,05}\}$  i oznaczenie przez  $s$  pozycji  $d_{\max}$  w wektorze  $\mathbf{D}$ .
4. Przyjęcie  $d_{\max} = 0$  oraz skonstruowanie wektora  $\tilde{\mathbf{D}}_1$  powstałego poprzez wstawienie 0 na pozycji  $s$ , tj.  $\tilde{\mathbf{D}}_1 = (d_1, \dots, d_{s-1}, 0, d_{s+1}, \dots, d_{n/2})$ .
5. „Odbudowanie” szeregu reszt poprzez odwrotną transformatę falkową dla  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\tilde{\mathbf{D}}_1$ .
6. Powtarzanie kroków od 1 do 5 do momentu uzyskania w wektorze detali współczynników niższych (w wartości bezwzględnej) od  $k^{0,05}$ . Przez  $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$  oznacza się uporządkowany zbiór indeksów zawierający pozycje  $d_{\max}$ .
7. Wykorzystanie  $S$  do wyznaczenia pozycji obserwacji odstających w szeregu  $\mathbf{X}$ . Niech  $s$  będzie elementem zbioru  $S$ . Wyznaczenie średniej szeregu  $\mathbf{X}$  bez obserwacji na pozycjach  $2s$  oraz  $2s - 1$ , tzn.  $\bar{x}_{n-2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i \neq 2s, 2s-1} X_i$ , i umieszczenie na pozycji obserwacji odstającej równej  $2s$ , jeśli  $|X_{2s} - \bar{x}_{n-2}| > |X_{2s-1} - \bar{x}_{n-2}|$ , lub równej  $2s - 1$  w przeciwnym przypadku.

Wykrycie obserwacji odstających pozwala na ich korektę, która polega na przypisaniu wartości  $d_{s_i} - \text{sign}(d_{s_i})k^{0,05}$  tym elementom wektora  $\mathbf{D}_1$ , których indeksy należą do zbioru  $S$ , i oznaczeniu przez  $\tilde{\mathbf{D}}_1$  wektora pierwszego rzędu współczynników detali po korekcie. Rekonstrukcja szeregu czasowego odbywa się dzięki odwrotnej transformacji falkowej.

Rysunek 4 przedstawia residua odpowiadające obserwacjom odstającym. W analizowanym szeregu wykryto 0,9% wartości znacznie różniących się od pozostałych, które uznano za outliers.

Obserwacje odstające pojawiały się w różnych godzinach. Największy odsetek o godzinie siódmej – 33%, dziewiątej – 12%, dwudziestej trzeciej – 15%, siedemnastej – 7%, dziesiątej – 5%.

Biorąc pod uwagę dzień tygodnia, największy odsetek wartości odstających pojawił się w poniedziałek – 44%, sobotę – 12%, piątek i niedzielę – 11%.



Rys. 4. Szereg residuów z odstającymi wartościami

36% wszystkich odstających wartości residuów stanowią wartości z okresu 09.01.2009-31.03.2009, czyli okresu, w którym były dokonywane zmiany mechanizmu kształtowania cen na rynku bilansującym. Kolejnych 18% przypada na kwiecień 2009 roku. 30% wszystkich obserwacji odstających przypada na styczeń, 15% – na grudzień. Pojedyncza obserwacja odstająca pojawiła się również 7.06.2010 roku, w momencie gdy w związku z powierzeniem Izbie Rozliczeniowej Giełd Towarowych S.A. rozliczeń transakcji zawartych na giełdzie, Zarząd TGE obniżył wysokość opłaty transakcyjnej z tytułu usługi giełdowej dla transakcji giełdowych zawieranych w okresie od 7.06.2010 roku do 31.12.2010 roku. Żadnych obserwacji odstających nie odnotowano w miesi-

cach lipiec-sierpień. W ciągu jednego dnia najwięcej obserwacji odstających odnotowano w dniach 12.01.2009 roku (poniedziałek, po podpisaniu przez Prezydenta Lecha Kaczyńskiego nowelizacji ustawy o komercjalizacji i prywatyzacji oraz ustawy o zasadach nabywania od Skarbu Państwa akcji w procesie konsolidacji spółek sektora elektroenergetycznego) i 06.04.2009 roku (poniedziałek, po przekazaniu przez Ministerstwo Środowiska firmom energetycznym unijnych uprawnień do emisji dwutlenku węgla). Znacznie większa część obserwacji odstających pochodzi z 2009 roku, na co prawdopodobnie wpływ miało spowolnienie gospodarcze, co bezpośrednio przełożyło się na zmniejszenie popytu na energię elektryczną.

### 3.3. Estymacja zmienności i ocena trafności prognoz na rynku energii

Estymacji parametru zmienności dokonano opierając się na modelach GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) oraz EGARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t-studenta, przy czym parametry warunkowych wariancji oszacowano:

- metodą quasi-największej wiarygodności na podstawie danych rzeczywistych bez korekty obserwacji odstających (QML),
- metodą quasi-największej wiarygodności na podstawie danych rzeczywistych po dokonaniu korekty obserwacji odstających metodą opisaną w 3.2 (QMLkor),
- odporną metodą quasi-największej wiarygodności dla danych rzeczywistych (RQML),

przy czym w każdym z przypadków  $\sigma_o^2$  jest szacowana klasycznym odchyleniem standardowym.

Na podstawie wyników z tabeli 2 i na podstawie kryterium AIC można stwierdzić, iż spośród analizowanych modeli najlepszym modelem (pod względem dopasowania do danych) jest model QGARCH z odporną metodą szacowania zmienności. Jednak zarówno odporna estymacja, jak i wcześniejsza identyfikacja i korekta obserwacji odstających daje porównywalne wyniki dla wszystkich trzech modeli. Dla pełnej analizy z pewnością warto byłoby rozpatrzeć inne metody korekty obserwacji odstających.

W kolejnym kroku wyznaczono prognozy zmienności, które były konstruowane na jedną godzinę do przodu dla okresu 01.01.2011-31.03.2011. Parametry wszystkich analizowanych modeli estymowano dodając za każdym razem kolejną obserwację. Ocenę trafności prognoz dokonano na podstawie średniego absolutnego błędu MAE oraz pierwiastka błędu średniokwadratowego RMSE (tabela 3).

Analizując wartości otrzymanych prognoz, można stwierdzić, że żaden z modeli (GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) i QGARCH(1,1)) nie jest satysfakcjonujący. Błędy prognoz w każdym wypadku są znaczne. Jednak oceniając możliwość identyfikacji i korekty obserwacji odstających oraz stosowania odpornych metod szacowania zmienności, obiecujące są mniejsze wartości błędów prognoz zmienności w obu przypadkach.

Należałoby również zauważyć, że w przypadku odpornej estymacji parametrów warunkowej wariancji początkową wartość parametru  $\sigma_0^2$  warto konsekwentnie oszacować również odpornym estymatorem, np. odchyleniem medianowym MAD.

Tabela 2

Parametry modeli GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) oraz QGARCH(1,1)  
z podziałem na różne metody szacowania

| Metoda | Parametry  | GARCH(1,1)      |           | GJR-GARCH(1,1)  |           | QGARCH(1,1)     |           |
|--------|------------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
|        |            | ocena parametru | p-wartość | ocena parametru | p-wartość | ocena parametru | p-wartość |
| QML    | $\alpha_0$ | 0,000654        | 0,00      | 0,000189        | 0,00      | 0,000678        | 0,00      |
|        | $\alpha_1$ | 0,731011        | 0,00      | 0,055373        | 0,00      | 0,639235        | 0,00      |
|        | $\beta_1$  | 0,268888        | 0,00      | 0,856736        | 0,00      | 0,280239        | 0,00      |
|        | $\gamma_1$ | –               | –         | –0,227363       | 0,01      | –0,00296        | 0,00      |
|        | AIC        | –64831,52       |           | –69828,4        |           | –69841,6        |           |
|        | BIC        | –64792,13       |           | –69789,1        |           | –69799,3        |           |
| QMLkor | $\alpha_0$ | 0,000528        | 0,00      | 0,0002357       | 0,00      | 0,0001          | 0,00      |
|        | $\alpha_1$ | 0,663406        | 0,00      | 0,0878602       | 0,00      | 0,100109        | 0,00      |
|        | $\beta_1$  | 0,336493        | 0,00      | 0,8422801       | 0,00      | 0,851284        | 0,00      |
|        | $\gamma_1$ | –               | –         | –0,120350       | 0,01      | –0,00874        | 0,00      |
|        | AIC        | –70053,3        |           | –70056,90       |           | –70121,63       |           |
|        | BIC        | –70021,8        |           | –70017,51       |           | –70104,91       |           |
| RQML   | $\alpha_0$ | 0,000326        | 0,00      | 0,0001349       | 0,00      | 0,000633        | 0,00      |
|        | $\alpha_1$ | 0,640567        | 0,01      | 0,0968201       | 0,00      | 0,138937        | 0,00      |
|        | $\beta_1$  | 0,397210        | 0,00      | 0,8747880       | 0,00      | 0,872669        | 0,00      |
|        | $\gamma_1$ | –               |           | –0,001653       | 0,00      | –0,00636        | 0,00      |
|        | AIC        | –70092,8        |           | –70123,7        |           | –70125,6        |           |
|        | BIC        | –70070,5        |           | –70109,9        |           | –70116,3        |           |

Należy podkreślić, że podjęcie decyzji o wyborze metody estymacji nie musi być poprzedzone analizą szeregu pod kątem występujących obserwacji odstających, choć efektywność odpornych estymatorów spada w ich stosowaniu w szeregach, w których nie występują obserwacje odstające.

Tabela 3

Błędy prognoz zmienności dla modeli GARCH(1,1), GJR-GARCH(1,1) oraz QGARCH(1,1) z podziałem na różne metody szacowania

| Metoda | Błąd prognozy | GARCH(1,1) | GJR-GARCH(1,1) | QGARCH(1,1) |
|--------|---------------|------------|----------------|-------------|
| QML    | MAE           | 0,397      | 0,386          | 0,387       |
|        | RMSE          | 0,405      | 0,425          | 0,427       |
| QMLkor | MAE           | 0,349      | 0,312          | 0,316       |
|        | RMSE          | 0,383      | 0,348          | 0,359       |
| RQML   | MAE           | 0,314      | 0,289          | 0,273       |
|        | RMSE          | 0,348      | 0,313          | 0,299       |

## Podsumowanie

Na rynkach energii elektrycznej charakteryzujących się dużą zmiennością występują często obserwacje odstające. Ze względu na fakt, że energii elektrycznej nie można magazynować, obserwacje odstające są bezpośrednią reakcją ceny na zaburzenie wolumenu obrotu energią elektryczną. W związku z tym zarówno w prognozowaniu, jak i analizie ryzyka zmiany ceny należy uwzględnić występowanie obserwacji odstających. Odporna estymacja zmienności na Rynku Dnia Następnego pozwoliła zidentyfikować obserwacje odstające w ciągu badanego okresu. Parametry modeli oszacowanych za pomocą metod odpornych są statystycznie istotne, niemniej jednak uzyskane prognozy są obciążone dużymi błędami. Wysoki poziom błędów może być spowodowany wyborem okresu, na który zostały wyznaczone prognozy. Z przeprowadzonej analizy wynika, że początek roku to okres największej liczby obserwacji odstających.

Podsumowując wyniki analizy pod względem postawionych celów, można powiedzieć, że:

- na zmniejszenie błędów estymacji parametru zmienności może wpływać wcześniejsza identyfikacja i korekta obserwacji odstających,
- modyfikacje metody największej wiarygodności dają lepsze wyniki niż quasi-metoda największej wiarygodności w szeregach z gwałtownymi skokami cen.

## Literatura

- Barnet V., Lewis, T. (1994): *Outliers in Statistical Data*. John Wiley.
- Bilen C., Huzurbazar S. (2002): Wavelet-based Detection of Outliers in Time Series. „*Journal of Computational and Graphical Statistics*” 11, s. 311-327.
- Boudt, K., Danielsson J., Laurent S.: *Robust Forecasting of Dynamic Conditional Correlation GARCH Models*. [www.econ.kuleuven.be/kris.boudt/public](http://www.econ.kuleuven.be/kris.boudt/public).
- Brockwell P.J., Davis R.A. (1996): *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag, New York.
- Carnero M., Pêna D., Ruiz E. (2007): Effects of Outliers on the Identification and Estimation of GARCH Models. „*Journal of Time Series Analysis*”, 28.
- Cateni S., Colla V., Vannucci M. (2008): *Outlier Detection Methods for Industrial Applications*. W: *Advances in Robotics, Automation and Control*. Red. J. Aramburo, Antonio Ramirez. Treviso. InTech.
- Chen C., Liu L. (1993): Forecasting Time Series with Outliers. „*Journal of Forecasting*”, 12.
- Clewlow L., Strickland C. (2000): *Energy Derivatives: Pricing and Risk Management*. „Lacima Publications”.
- Fiszeder P. (2007): Jak zwiększyć trafność prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modeli GARCH? *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*. Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Fox A. (1972): Outliers in Time Series. „*Journal of Royal Statistical Society*”, 34.
- Franses P., Ghijssels H. (1999): Additive Outliers, GARCH and Forecasting Volatility. „*International Journal of Forecasting*”, 15.
- Ganczarek A. (2008): Weryfikacja modeli z grupy GARCH na dobowo-godzinnych rynkach energii elektrycznej w Polsce. *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie. Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania nr 9*.
- Ganczarek-Gamrot A. (2010): Pomiar ryzyka w systemie ceny jednolitej na Towarowej Giełdzie Energii. W: *Modelowanie preferencji a ryzyko '09*. Red. T. Trzaskalik. AE, Katowice.
- Hadsell L., Marathe A., Shawky H.A. (2004): Estimating The Volatility of Wholesale Electricity Spot Prices in The U.S. „*The Energy Journal*”, 25(4), s. 23-40.
- Huber. P.J. (1981): *Robust Statistics*. Wiley, New York.
- Jacquier E., Polson N.G., Rossi P.E. (1994): Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models. „*Journal of Business and Economic Statistics*”.
- Modelling Prices in Competitive Electricity Markets* (2004). Red. D. Bunn. Wiley, New York.
- Muller N., Yohai V.J. (2002): Robust Estimates for ARCH Processes. „*Journal of Time Series Analysis*” 23, s. 341-375.

- 
- Trück S., Weron R., Wolff R. (2007): Outlier Treatment and Robust Approaches for Modeling Electricity Spot Prices. „Bulletin of the International Statistical Institute” 62, s. 1524.
- Van Dijk D., Franses P., Lucas A. (1999): Testing for ARCH in the Presence of Additive Outliers. „Journal of Applied Econometrics” 14.
- Veiga H., Grane A. (2010): Wavelet-based Detection of Outliers in Financial Time Series. „Computational Statistics and Data Analysis”.
- Weron R. (2006): Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach. Wiley, Chichester.
- Wielowymiarowe metody statystyczne w analizie ryzyka inwestycyjnego (2010). Red. G. Trzpiot. PWE, Warszawa.
- Włodarczyk A., Zawada M. (2008): Analiza cen spot energii elektrycznej. Przegląd wybranych modeli szeregów czasowych. „Energetyka” 7.

### **ROBUST VOLATILITY ESTIMATION ON THE ELECTRIC ENERGY MARKET**

#### **Summary**

Electricity spot prices exhibit very high volatility and unanticipated extreme price changes known as spikes (or jumps). A critical issue in estimation of the volatility is that it might be substantially affected by the price spikes. While it is clear that price spikes should be captured by an adequate model the literature does not agree on whether these observations have to be included or excluded in the estimation process. Our goal is to examine the consequences of the treatment of such extreme events in the estimation procedures. We investigate two approaches for the volatility estimation: identifying and correcting the spikes and using robust method for outliers. For our empirical analysis we have chosen data from the Polish Power Exchange.



**Agnieszka Orwat-Acedańska**  
**Anna Ojrzyńska**

## **STATYSTYCZNA ANALIZA STRUKTURY DEMOGRAFICZNEJ CZŁONKÓW OFE**

---

---

### **Wprowadzenie**

Polskie fundusze emerytalne są osobami prawnymi, których przedmiotem działalności jest gromadzenie środków pieniężnych i ich lokowanie z przeznaczeniem na wypłatę członkom funduszu po osiągnięciu przez nich wieku emerytalnego (Ustawa o organizacji..., 1997). Fundusz emerytalny jest tworzony jako otwarty lub pracowniczy przez organ funduszu, jakim jest Powołane Towarzystwo Emerytalne (PTE). Otwarte Fundusze Emerytalne (OFE) zarządzane przez PTE weszły na polski rynek kapitałowy 19 maja 1999 roku, tworząc II filar zreformowanego systemu emerytalnego. OFE lokują swoje aktywa, dążąc do osiągnięcia maksymalnego stopnia bezpieczeństwa i rentowności dokonywanych lokat (Ustawa o organizacji..., 1997). W ciągu jedenastu lat istnienia OFE na polskim rynku finansowym liczba funduszy zmalała z 21 w 1999 roku do 14 w 2011 roku. Zmiany te są konsekwencją likwidacji części funduszy oraz fuzji.

Jedną z ważnych kwestii branych pod uwagę w ocenie działalności funduszu emerytalnego oraz jego pozycji na rynku emerytalnym jest liczba członków. Zależy ona od wielu czynników, m.in. od liczby osób wchodzących na rynek pracy, liczby przeprowadzanych transferów, wyników losowań, działalności akwizytorów, dokonywanych fuzji i przejęć funduszy przez inne. Na zmiany w strukturze rynku OFE, kształtowanie polityki inwestycyjnej oraz strategii wobec członków wpływają więc mechanizmy demograficzne kształtujące liczbę członków poszczególnych funduszy.

Celem opracowania jest statystyczny opis struktury demograficznej członków Otwartych Funduszy Emerytalnych oraz zmian tej struktury w okresie badawczym 1999-2009. Do analizy zmian struktury demograficznej członków OFE ogółem oraz według płci i wieku zastosowano wybrane statystyczne wskaźniki demograficzne. Ponadto przeprowadzono badanie wzorców selektywności oraz klasyfikację funduszy pod względem struktury członków według różnych grup wiekowych.

## 1. Metody badania struktury demograficznej klientów OFE

Analizę empiryczną oparto na wybranych miarach struktury demograficznej oraz miarach analizy dynamiki.

Do badania struktury klientów według płci wykorzystano następujące współczynniki feminizacji (maskulinizacji):

- ogólny I typu – określa stosunek liczby kobiet (mężczyzn) w danym okresie do ogólnej liczby ludności,
- ogólny II typu – określa stosunek liczby kobiet (mężczyzn) w danym okresie do liczby mężczyzn (kobiet) w tym okresie (Holzer, 2003, s. 141).

Dynamikę zmian zjawiska maskulinizacji i feminizacji opisano za pomocą średniego tempa zmian wyrażonego w postaci:

$$T = n \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} - 1 \quad (1)$$

gdzie  $y_n$  – wartość cechy w ostatnim okresie badania,  $n$  – liczba okresów przyjętych do analizy.

Analiza struktury członków OFE według płci i wieku ogółem dla wszystkich OFE została przedstawiona za pomocą wykresu nazywanego piramidą wieku (Holzer, 2003, s. 144). Jest to odmiana wykresu słupkowego. Składa się on z dwóch części odnoszących się do grup płci położonych po obu stronach pionowej osi, na której znajdują się grupy wieku. Na osi poziomej znajduje się skala liczbowa w wielkościach bezwzględnych lub procentach.

Do weryfikacji hipotezy głoszącej, że istnieje zjawisko selektywności wśród klientów OFE, posłużył Współczynnik Selektywności Migracji (*WSM*) (Cieślak, 1992, s. 248). Definicję miernika zapisuje się w postaci:

$$WSM_{V=i} = \frac{\frac{M_{V=i}}{M} - \frac{P_{V=i}}{P}}{\frac{P_{V=i}}{P}} \quad (2)$$

gdzie:

$V$  – zmienna, ze względu na którą bada się selektywność zjawiska (np. płeć, wiek),

$i$  – kategoria zmiennej  $V$ , dla której jest liczona wartość współczynnika (np. kobiety, grupa wiekowa 21-25 lat),

$WSM_{V=i}$  – współczynnik selektywności ze względu na zmienną  $V$  dla kategorii  $i$ ,

$M_{V=i}$  – liczebność podpopulacji badanej należącej do kategorii  $i$  oraz zmiennej  $V$ ,

$M$  – liczebność podpopulacji badanej ogółem,

$P_{V=i}$  – liczebność populacji badanej należącej do kategorii  $i$  oraz zmiennej  $V$ ,

$P$  – całkowita liczebność populacji badanej.

Wartości dodatnie WSM świadczą o występowaniu dodatniej selektywności, przy czym jest ona tym wyższa, im wyższa wartość współczynnika. Oznacza to, że w danym zjawisku uczestniczy więcej jednostek danej kategorii, niż wynikałoby to z ich proporcji w całej populacji (Mioduszevska, 2008, s. 16). Mówi się, że zjawisko selektywności nie występuje, gdy wartości omawianego współczynnika wynoszą zero lub są bliskie zeru\*.

### Wybrane metody klasyfikacji

Do klasyfikacji OFE ze względu na określone przedziały wiekowe członków OFE zastosowano wybrane metody hierarchiczne klasyfikacji.

W teorii mnogościowej klasyfikację definiuje się jako niepustą rodzinę podzbiorów  $\mathbf{K}_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  określoną na zbiorze obiektów  $\mathbf{K}$  i spełniającą warunki (Gatnar, Walesiak, 2004):

$$\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j = \emptyset, \bigcup_{i=1}^k \mathbf{K}_i = \mathbf{K}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

gdzie  $\emptyset$  oznacza zbiór pusty. Klasyfikacja jest traktowana jako zbiór klas wyróżnionych z klasyfikowanego zbioru obiektów (Gatnar, Walesiak, 2004).

Jedną z kategorii grupowania danych są metody hierarchiczne. Hierarchiczne procedury grupowania można opisać za pomocą następującego schematu. Mając daną macierz odległości zbioru obiektów, zakłada się, że każdy obiekt tworzy odrębną klasę. Na każdym etapie znajduje się parę klas, między którymi odległość jest najmniejsza, by połączyć je w jedno skupienie. Następnie ustala się odległość nowej klasy od pozostałych. Algorytm ten jest powtarzany do momentu zebrania wszystkich klas w jedną. Różnice między wariantami metod aglomeracyjnych tkwią w odmiennym sposobie określania odległości między skupieniami. Wyróżnia się m.in. metody pojedynczego wiązania, pełnego wiązania, średnich połączeń, metodę Warda (Gatnar, Walesiak, 2004).

\* W demografii częstym zastosowaniem cieszy się Współczynnik Selektywności Migracji, który bada wpływ pewnych (często nieobserwowalnych) czynników, które sprawiają, że struktura populacji migrantów z danego obszaru różni się od struktury populacji na danym obszarze.

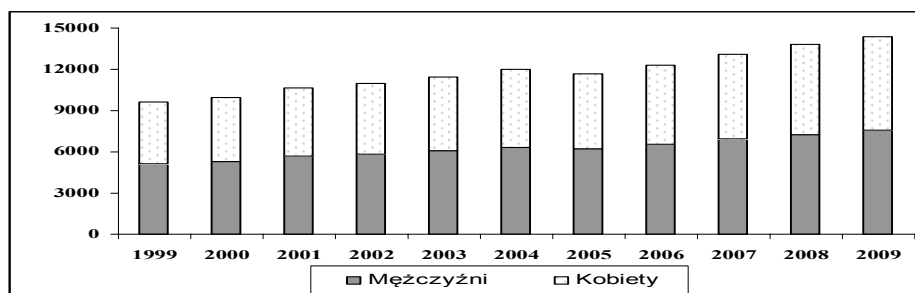
## 2. Wyniki analizy empirycznej

Analizę empiryczną przeprowadzono na podstawie danych zamieszczonych w biuletynach rocznych wydawanych przez Komisję Nadzoru Finansowego (KNF). Do analizy zmian struktury demograficznej członków OFE za okres badawczy przyjęto lata 1999-2009. Ograniczenie końca okresu badawczego do 2009 roku wynika z dostępności danych opracowanych przez KNF do 2009 roku.

### 2.1. Zmiany w liczbie i strukturze klientów OFE w latach 1999-2009 ogółem

Liczba klientów OFE ogółem w latach 1999-2009 znacznie się zwiększyła, z poziomu 9665,8 tys. osób do 14 360,6 tys. osób w 2009 roku. Średnie tempo zmian dla liczby klientów ogółem wyniosło 4,04%, co oznacza, że liczba członków OFE wzrastała z roku na rok średnio o 4,04%.

Liczbę klientów OFE w przyjętym okresie badawczym, z uwzględnieniem podziału według płci, ilustruje rysunek 1.



Rys. 1. Liczba członków OFE w latach 1999-2009 z uwzględnieniem podziału według płci

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych KNF.

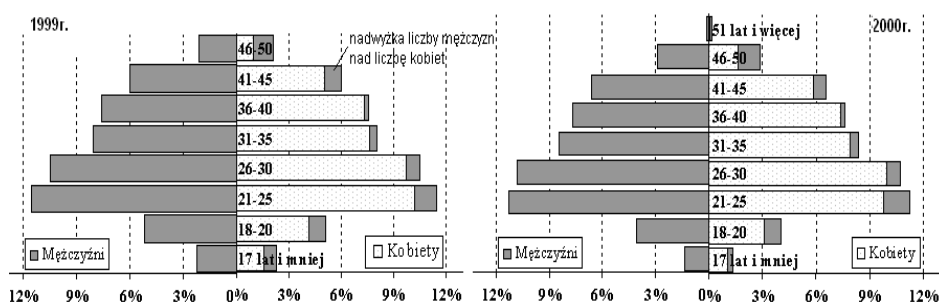
Obserwuje się wzrost klientów zarówno w liczbie kobiet, jak i mężczyzn. Średnioroczne tempo zmian dla kobiet jest nieznacznie większe niż dla mężczyzn, wynosi bowiem 4,20% dla kobiet oraz 3,90% dla mężczyzn. W całym badanym okresie, średnio rzecz biorąc, mężczyźni stanowili 52,93% badanej zbiorowości, a kobiety – 47,07%. Wskaźnik maskulinizacji wyniósł średnio 112,45%, a wskaźnik feminizacji – 88,94%.

Strukturę członków OFE ogółem według płci i wieku zilustrowano za pomocą piramid wieku dla każdego roku okresu 1999-2009 (rysunki 2-8). Obserwacja kształtu piramidy wieku dla klientów OFE ma na celu ocenę:

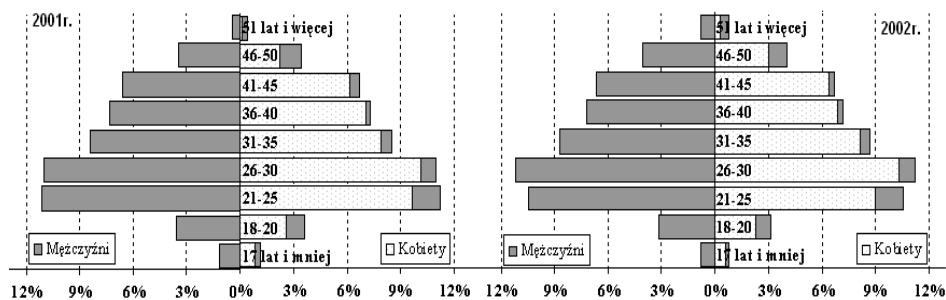
- obecnej struktury według płci w poszczególnych grupach wieku oraz proporcji pomiędzy wyróżnionymi grupami wieku dla każdej płci oddzielnie,
- przyszłej liczebności populacji oraz jej struktury.

W celu uzyskania porównywalności, liczebności rozważanej populacji w latach zostały wyrażone w procentach ogólnej liczby członków OFE w danym roku.

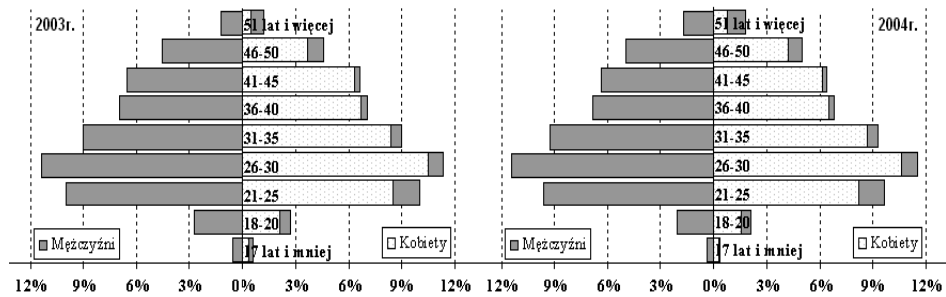
Porównując kształty piramid wieku, można stwierdzić proces starzenia się klientów OFE. Jest to ogólna, występująca dla całej ludności Polski tendencja. Można zauważyć przesuwanie się najliczniej występujących kategorii wiekowych – w 1999 roku to osoby w wieku 21-25 lat oraz 26-30 lat, natomiast w 2009 roku osoby w wieku 26-30 lat oraz 31-45 lat. W badanym okresie zmniejszyła się także nadwyżka liczby mężczyzn nad liczbą kobiet w grupach wiekowych 21-25 lat oraz 41-50 lat. Natomiast nierównowaga w strukturze płci została podkreślona w grupie osób powyżej 50 roku życia.



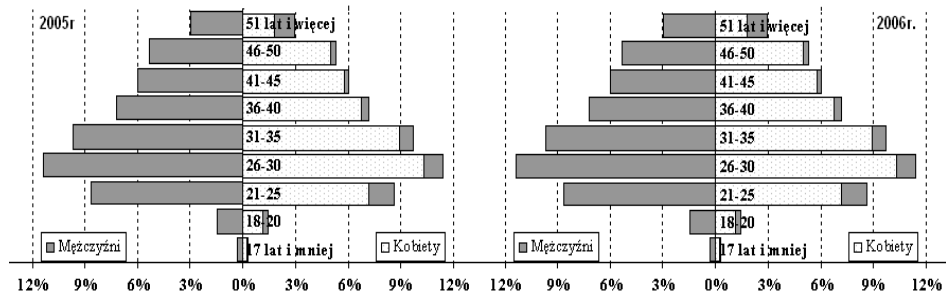
Rys. 2. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 1999 i 2000 roku



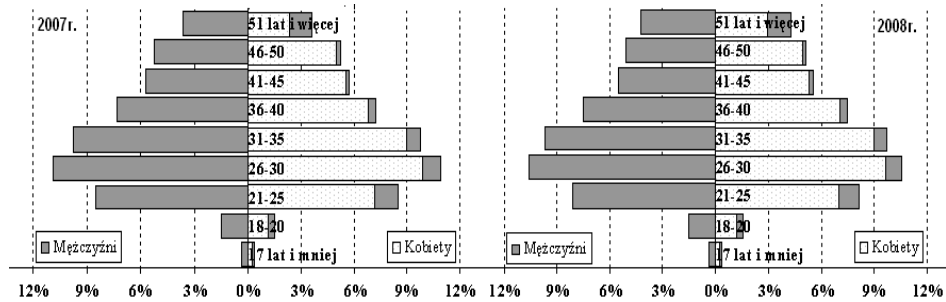
Rys. 3. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 2001 i 2002 roku



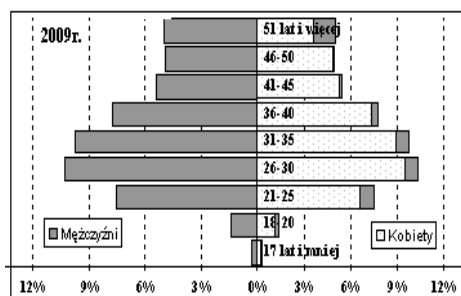
Rys. 4. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 2003 i 2004 roku



Rys. 5. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 2005 i 2006 roku



Rys. 6. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 2007 i 2008 roku



Rys. 7. Piramida wieku członków OFE – stan na koniec 2009 roku

## 2.2. Zmiany w liczbie i strukturze klientów OFE w 2009 roku

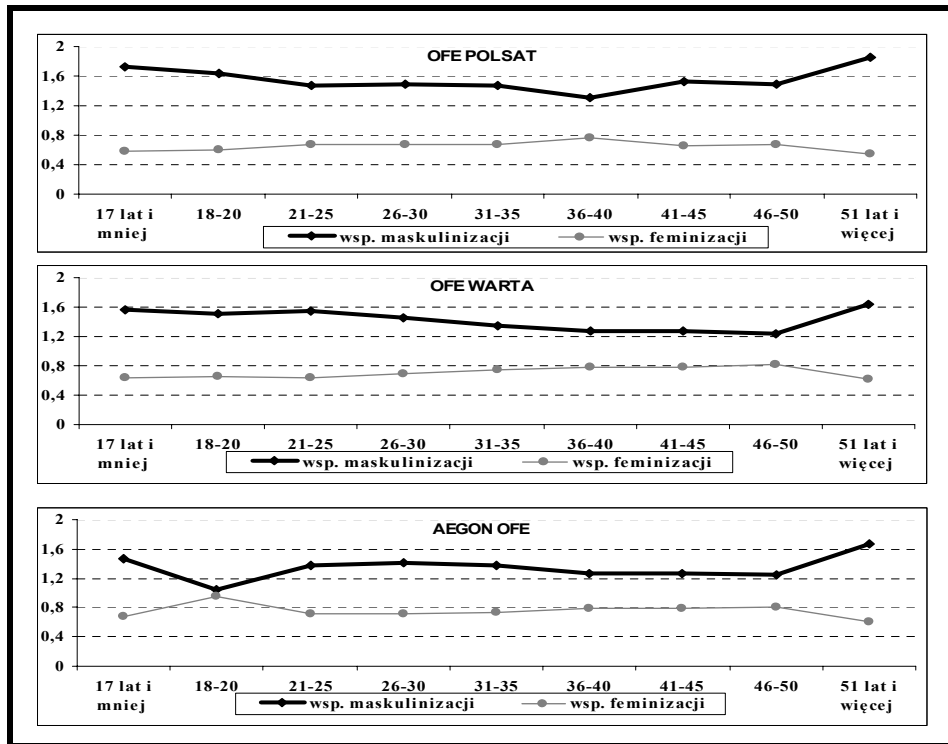
Ogółem w Otwartych Funduszach Emerytalnych w 2009 roku na 100 kobiet przypadało 110,6 mężczyzn. Funduszami najbardziej zmaskulinizowanymi, w których liczba mężczyzn na 100 kobiet przekracza wartość wskaźnika dla wszystkich funduszy, są: OFE POLSAT, OFE WARTA, Aegon OFE, Pekao OFE, Amplico OFE, PKO BP Bankowy OFE, Allianz Polska OFE oraz Generali OFE. Funduszami emerytalnymi, w których liczba mężczyzn na 100 kobiet jest bliska wartości 100, co oznacza równowagę ze względu na strukturę według płci, są: Nordea OFE oraz ING OFE. Pozostałe jednostki charakteryzują się średnim poziomem maskulinizacji; należą do nich: OFE Pocztylion, OFE PZU „Złota jesień”, AXA OFE oraz Aviva OFE.

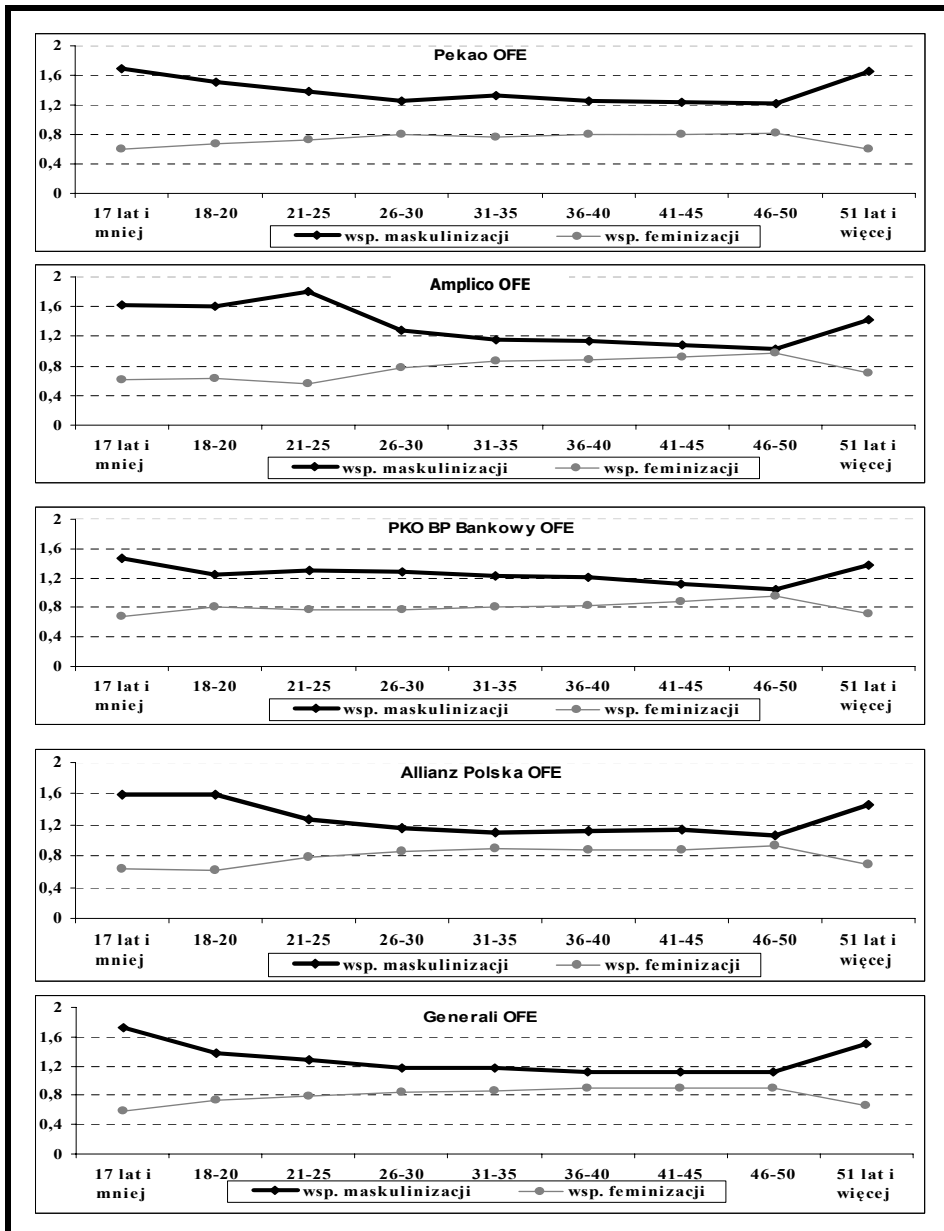
Tabela 1

Wskaźniki maskulinizacji i feminizacji według jednostek OFE w 2009 roku

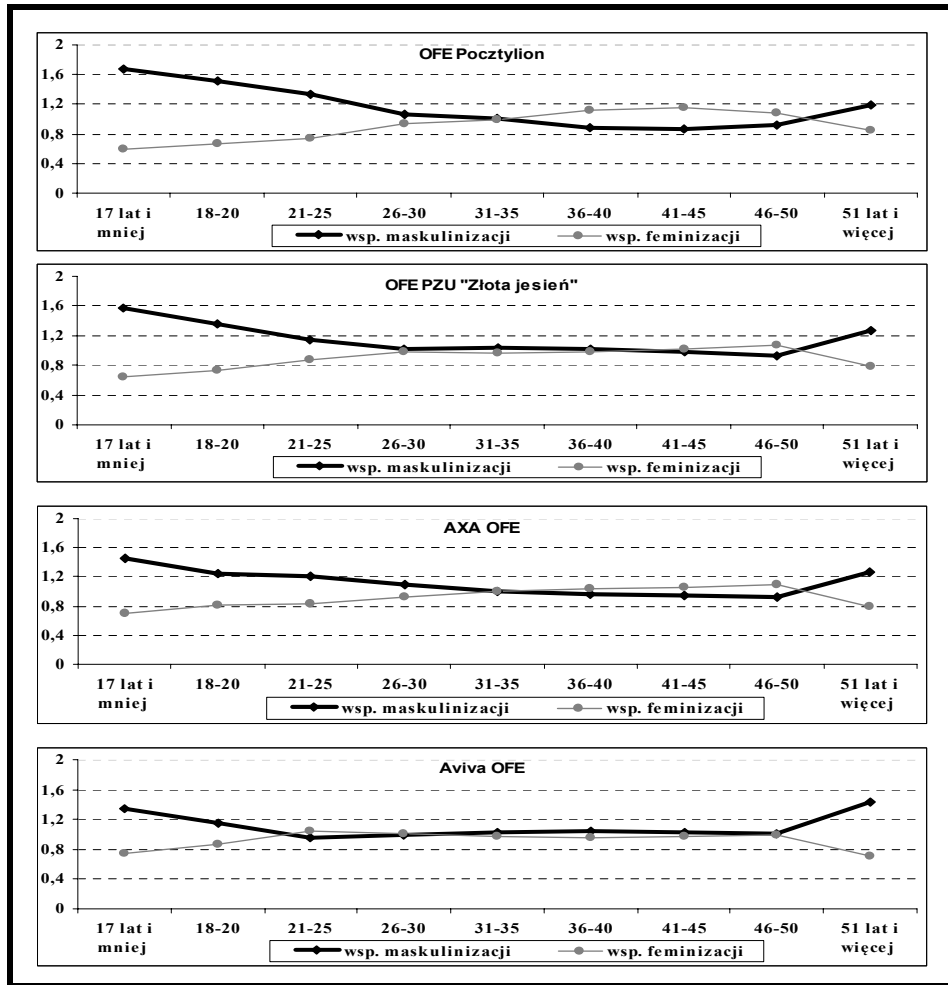
| OFE                    | Wskaźnik maskulinizacji | Wskaźnik feminizacji |
|------------------------|-------------------------|----------------------|
| OFE POLSAT             | 148,7                   | 67,2                 |
| OFE WARTA              | 141,3                   | 70,8                 |
| Aegon OFE              | 135,9                   | 73,6                 |
| Pekao OFE              | 132,8                   | 75,3                 |
| Amplico OFE            | 127,1                   | 78,7                 |
| PKO BP Bankowy OFE     | 122,7                   | 81,5                 |
| Allianz Polska OFE     | 121,8                   | 82,1                 |
| Generali OFE           | 120,7                   | 82,9                 |
| OFE Pocztylion         | 108,1                   | 92,5                 |
| OFE PZU „Złota Jesień” | 105,4                   | 94,8                 |
| AXA OFE                | 105,3                   | 95,0                 |
| Aviva OFE              | 105,0                   | 95,2                 |
| Nordea OFE             | 100,4                   | 99,6                 |
| ING OFE                | 99,8                    | 100,2                |

Struktura według płci jest zróżnicowana także w zależności od wieku. Przedstawiają to rysunki 8-10. Otwarte Fundusze Emerytalne są ułożone według wartości współczynnika maskulinizacji, a więc kolejno: najsilniej zmaskulinizowane (rysunek 8), umiarkowanie zmaskulinizowane (rysunek 9) oraz należące do grupy, w której jest zachowana równowaga płci (rysunek 10). Wspólną cechą funduszy najsilniej zmaskulinizowanych jest utrzymująca się przewaga liczby mężczyzn nad liczbą kobiet we wszystkich kategoriach wiekowych. Równowaga struktury według płci, gdy współczynniki feminizacji i maskulinizacji przyjmują wartość równą 100, występuje rzadko, dla pojedynczych grup wiekowych (Amplico OFE oraz PKO BP Bankowy OFE w wieku 46-50 lat). Natomiast fundusze emerytalne o umiarkowanym poziomie maskulinizacji cechują się zdecydowaną przewagą mężczyzn w najmłodszych i najstarszych grupach wiekowych. Równowaga struktury płci zostaje osiągnięta dla osób w wieku 21-25 lat bądź 26-30 lat i utrzymuje się aż dla grupy osób poniżej 40 lat.



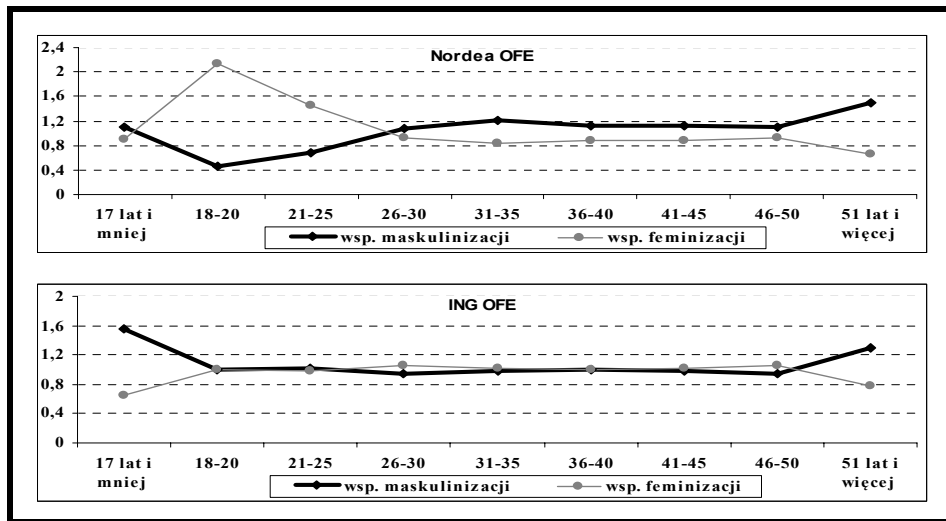


Rys. 8. Struktura członków OFE według płci i wieku w funduszach najsilniej zmaskulinizowanych



Rys. 9. Struktura członków OFE według płci i wieku w funduszach o umiarkowanej maskulinizacji

Zrównoważoną strukturę według płci można zauważyć na przykładzie ING OFE, gdzie jedynie grupa osób poniżej 17 oraz powyżej 51 roku życia jest silnie zmaskulinizowana. Natomiast w pozostałych grupach wiekowych jest osiągnięty stan równowagi, a nawet stan słabej feminizacji członków tego funduszu. Wyróżnia się strukturę klientów Nordea OFE, dla której obliczone wskaźniki maskulinizacji i feminizacji wskazywały na stan równowagi według płci. Biorąc pod uwagę wskaźniki dla poszczególnych grup wiekowych, widoczna zdecydowana przewaga kobiet nad liczbą mężczyzn występuje jedynie w grupie osób młodych, tj. pomiędzy 18 a 25 rokiem życia.

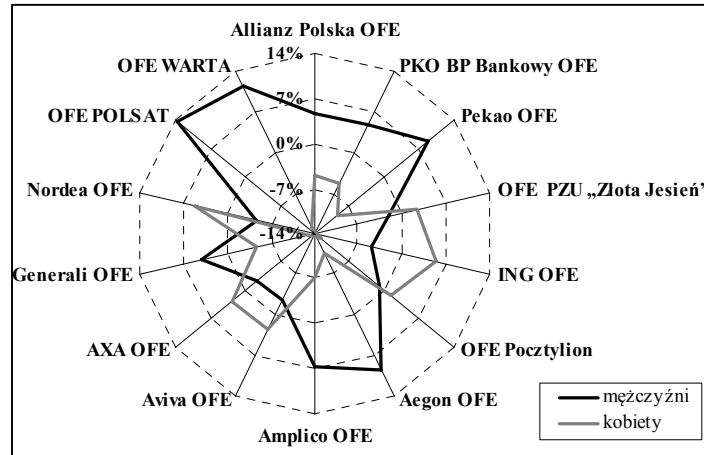


Rys. 10. Struktura członków OFE według płci i wieku w funduszach „mieszanych”

### 2.3. Wyznaczenie wzorców selektywności w strukturze klientów wybranych OFE w 2009 roku

Współczynniki selektywności będą konstruowane na podstawie porównania wartości danej cechy dla osób należących do wybranego funduszu emerytalnego z wartościami tej cechy w populacji członków OFE ogółem. W pierwszej kolejności zostaną przedstawione wartości WSM dla zmiennej w 2009 roku. Wyniki przedstawione na rysunku 11 pozwalają stwierdzić, że w 2009 roku mężczyźni byli bardziej skłonni wybrać OFE POLSAT, OFE WARTA, Pekao OFE oraz Amplico OFE (dodatknie oraz wysokie wartości WSM), a zdecydowanie mniej byli skłonni do uczestnictwa w takich funduszach, jak: ING OFE, Nordea OFE czy Aviva OFE (o czym świadczą ujemne współczynniki WSM). Tymczasem kobiety były bardziej skłonne zaufać OFE ING (WSM = 5,43) oraz Nordea OFE (WSM = 5,10).

Współczynniki selektywności dla poszczególnych funduszy emerytalnych według grup wiekowych zawarto w tabeli 2.



Rys. 11. Selektowność klientów OFE według płci w 2009 roku

Tabela 2

Wartości WSM dla zmiennej wiek w 2009 roku

| OFE                    | 17 lat i mniej | 18-20       | 21-25       | 26-30 | 31-35 | 36-40 | 41-45 | 46-50 | 51 lat i więcej |
|------------------------|----------------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| AEGON OFE              | 0,11           | -0,33       | -0,39       | 0,04  | 0,07  | 0,01  | 0,04  | 0,09  | 0,29            |
| Allianz Polska OFE     | <b>5,80</b>    | <b>2,69</b> | 0,02        | -0,15 | -0,09 | -0,10 | -0,10 | -0,15 | -0,15           |
| Amplico OFE            | <b>-0,84</b>   | -0,27       | 0,18        | -0,06 | -0,09 | -0,07 | 0,00  | 0,07  | 0,22            |
| Aviva OFE              | 0,49           | 0,02        | -0,35       | -0,23 | 0,14  | 0,20  | 0,20  | 0,13  | 0,01            |
| AXA OFE                | -0,47          | 0,18        | 0,08        | 0,02  | 0,02  | 0,02  | 0,01  | -0,09 | -0,18           |
| Generali OFE           | -0,74          | 0,01        | 0,34        | 0,02  | -0,14 | -0,09 | -0,07 | -0,02 | 0,02            |
| ING OFE                | <b>-0,86</b>   | -0,52       | 0,01        | 0,20  | 0,06  | 0,00  | -0,05 | -0,13 | -0,19           |
| Nordea OFE             | <b>-0,90</b>   | 0,40        | 0,56        | 0,04  | -0,07 | -0,14 | -0,19 | -0,22 | -0,18           |
| Pekao OFE              | -0,47          | <b>0,81</b> | 0,67        | 0,16  | -0,18 | -0,25 | -0,32 | -0,28 | -0,11           |
| PKO BP Bankowy OFE     | -0,70          | -0,51       | -0,26       | 0,09  | 0,05  | 0,08  | 0,05  | 0,07  | 0,02            |
| OFE Pocztalion         | -0,15          | <b>0,98</b> | 0,47        | -0,02 | -0,25 | -0,17 | -0,11 | -0,04 | 0,01            |
| OFE POLSAT             | <b>-0,82</b>   | 0,18        | <b>0,75</b> | 0,44  | -0,19 | -0,30 | -0,46 | -0,43 | -0,26           |
| OFE PZU „Złota Jesień” | 0,53           | -0,11       | -0,19       | -0,07 | -0,05 | -0,02 | 0,07  | 0,22  | 0,27            |
| OFE WARTA              | <b>2,85</b>    | 0,27        | 0,39        | 0,13  | -0,12 | -0,13 | -0,25 | -0,23 | -0,13           |

Pogrubioną czcionką oznaczono wartości WSM, które wskazują na istotny poziom zjawiska selektywności.

Na podstawie tabeli 2 można stwierdzić, że jedynie w przypadku najmłodszych grup wiekowych występuje zjawisko selektywności. Osoby w wieku poniżej 20 lat zdecydowanie częściej wybierały takie fundusze, jak Allianz Polska OFE oraz OFE Warta, natomiast nie były skłonne zaufać Nordea OFE, PKO PB Bankowy OFE. Dla pozostałych grup wiekowych obliczone wartości WSM są bliskie zeru, dlatego można mówić o braku selektywności członków OFE w tych grupach wiekowych.

## 2.4. Wyniki klasyfikacji OFE

W tej części opracowania dokonano klasyfikacji OFE ze względu na odsetek ich członków w 2009 roku (dane zawiera tabela 3).

Tabela 3

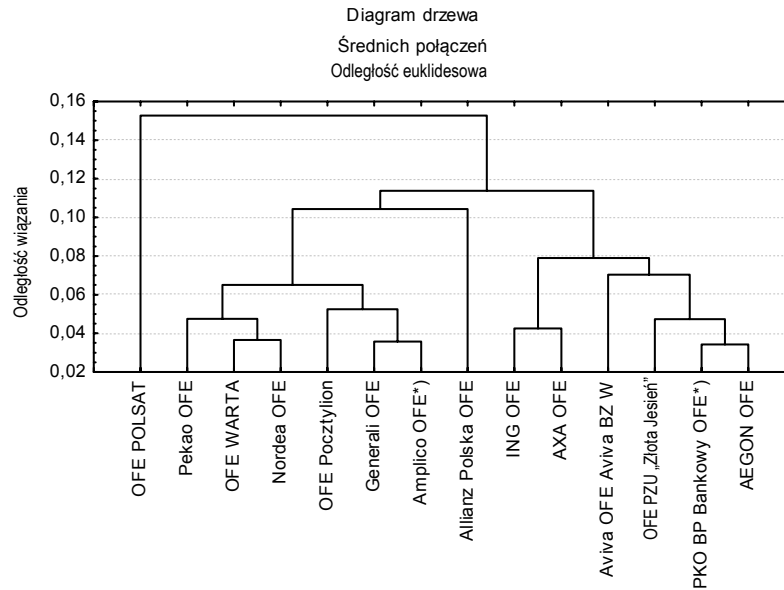
Odsetek członków OFE według wieku w 2009 roku

| OFE*       | Wiek       |       |       |       |       |       |       |       |             |
|------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
|            | 17 i mniej | 18-20 | 21-25 | 26-30 | 31-35 | 36-40 | 41-45 | 46-50 | 51 i więcej |
| AEGON      | 0,006      | 0,017 | 0,087 | 0,207 | 0,201 | 0,152 | 0,111 | 0,108 | 0,111       |
| Allianz    | 0,035      | 0,093 | 0,144 | 0,168 | 0,170 | 0,135 | 0,096 | 0,084 | 0,074       |
| Amplico    | 0,001      | 0,018 | 0,167 | 0,187 | 0,169 | 0,140 | 0,107 | 0,106 | 0,105       |
| Aviva      | 0,008      | 0,026 | 0,092 | 0,153 | 0,213 | 0,181 | 0,128 | 0,112 | 0,087       |
| AXA        | 0,003      | 0,030 | 0,152 | 0,202 | 0,191 | 0,154 | 0,108 | 0,090 | 0,071       |
| Generali   | 0,001      | 0,025 | 0,189 | 0,203 | 0,160 | 0,138 | 0,099 | 0,097 | 0,088       |
| ING        | 0,001      | 0,012 | 0,142 | 0,238 | 0,199 | 0,151 | 0,101 | 0,086 | 0,070       |
| Nordea     | 0,000      | 0,035 | 0,220 | 0,207 | 0,173 | 0,130 | 0,086 | 0,077 | 0,071       |
| Pekao      | 0,003      | 0,046 | 0,236 | 0,231 | 0,153 | 0,112 | 0,072 | 0,071 | 0,077       |
| Bankowy    | 0,002      | 0,012 | 0,105 | 0,216 | 0,196 | 0,164 | 0,112 | 0,106 | 0,088       |
| Pocztylion | 0,004      | 0,050 | 0,207 | 0,194 | 0,141 | 0,125 | 0,095 | 0,095 | 0,087       |
| OFE        | 0,001      | 0,030 | 0,247 | 0,287 | 0,152 | 0,106 | 0,057 | 0,057 | 0,064       |
| PZU        | 0,008      | 0,022 | 0,114 | 0,185 | 0,179 | 0,147 | 0,114 | 0,121 | 0,109       |
| WARTA      | 0,020      | 0,032 | 0,197 | 0,224 | 0,164 | 0,131 | 0,080 | 0,077 | 0,075       |

\* W tabeli 3 i w dalszej części opracowania zastosowano skrócone nazwy funduszy.

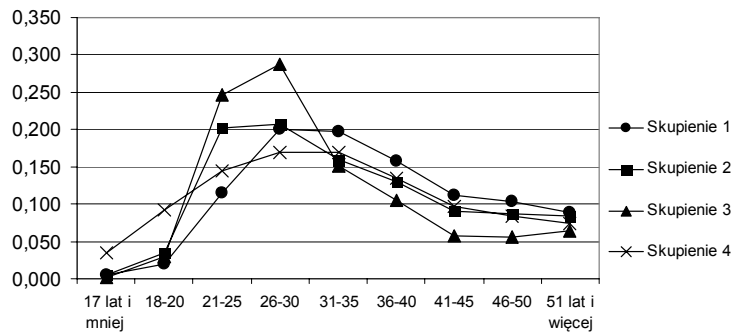
Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych KNF.

Klasyfikacji poddano fundusze ze względu na strukturę wiekową członków, wykorzystując metody hierarchiczne: Warda, pełnego wiązania i średnich połączeń. Po zastosowaniu wymienionych metod z użyciem odległości euklidesowej otrzymano podobne wyniki klasyfikacji, na podstawie których można wyróżnić cztery klastry funduszy (przykładowo zamieszczono dendrogram dla metody średnich połączeń – rysunek 12).



Rys. 12. Dendrogram OFE ze względu na strukturę wiekową

Skupienie 1 tworzą fundusze: Aegon, Aviva, Axa, ING, Bankowy, PZU. Jest to grupa funduszy, które mają najwięcej członków w wieku powyżej 26 lat. Skupienie 2 tworzą fundusze: Amplico, Generali, Nordea, Pekao, Pocztylion, Warta. Są to fundusze, które mają najwięcej członków w wieku 21-30 lat. Osobne skupienia tworzą Allianz oraz Polsat. W przypadku pierwszego funduszu najwięcej jest klientów bardzo młodych, od 17 lat, i mniej do 20 lat. Natomiast Polsat jest funduszem mającym ekstremalnie najwięcej członków w wieku 21-25 lat, a najmniej po 35 roku życia. Uzyskane wyniki klasyfikacji potwierdza również wykres średnich udziałów członków w danej grupie wiekowej (rysunek 13).



Rys. 13. Wykres średnich udziałów członków w danej grupie wiekowej

## Podsumowanie

Struktura klientów Otwartych Funduszy Emerytalnych jest zróżnicowana zarówno pod względem płci, jak i wieku. W okresie badania liczba członków OFE wzrastała z roku na rok, przy czym średnioroczne tempo zmian dla kobiet jest większe niż dla mężczyzn, co wpłynęło na zmniejszenie wskaźnika maskulinizacji z 113,8 do 110,6 mężczyzn przypadających na 100 kobiet. Struktura według płci jest różna w poszczególnych funduszach emerytalnych. Można wyróżnić fundusze znacznie zmaskulinizowane oraz takie, w których zachodziła równowaga w strukturze płci. Na podstawie obliczonych wskaźników selektywności można mówić, iż określona płeć oraz wiek mają wpływ na wybór funduszu emerytalnego. Potwierdzeniem mogą być osoby młode, które były bardziej skłonne wybrać Allianz Polska OFE oraz OFE Warta, niż przystąpić do funduszu Nordea OFE czy PKO PB Bankowy OFE.

Przeprowadzona klasyfikacja ujawniła zróżnicowanie OFE ze względu na strukturę demograficzną członków. Można wyróżnić dwie zasadnicze grupy funduszy. Pierwszą tworzą osoby w wieku 21-30 lat, drugą osoby powyżej 31 lat. Istnieją dwa fundusze odstające od tych grup, chociaż w podobny sposób charakteryzowane. Mianowicie OFE Polsat ma największą liczbę klientów w wieku 21-30, a najmniejszą w wieku powyżej 36 lat. Drugim funduszem wyróżniającym się jest Allianz, który ma najwięcej członków najmłodszych, w wieku od 17 lat, i mniej w wieku do 20 lat.

## Literatura

- Cieślak M. (1992): Demografia. Metody analizy i prognozowania. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Gatnar E., Walesiak M. (2004): Metody statystycznej analizy wielowymiarowej w badaniach marketingowych. AE, Wrocław.
- Holzer J.Z. (2003): Demografia. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Mioduszevska M. (2008): Najnowsze migracje z Polski w świetle danych Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności. OBM WNE UW, Warszawa.
- Ustawa z dnia 28 sierpnia 1997 roku o organizacji i funkcjonowaniu funduszy. Dz.U. nr 139, art. 21, pkt 2 z późn. zm.
- Witryna Komisji Nadzoru Finansowego: [www.knf.gov.pl/opracowania/rynek\\_emerytalny/](http://www.knf.gov.pl/opracowania/rynek_emerytalny/).

## **THE STATISTICAL ANALYZE OF THE OPEN PENSIONS FUNDS MEMBERS DEMOGRAPHICAL STRUCTURE**

### **Summary**

One of the important issues to be considered in assessing the activities of the pension fund and its market position, is the number of pension members. It depends on many factors, including the number of people entering the labor market, the number of transfers carried out, the results of draws, salesmen activity, mergers and acquisitions made by other funds. The aim of this paper is a statistical description of the demographic structure of the members of the Open Pension Funds. To analyze changes in the demographic structure of OFE members selected indicators of demographic statistics were used. Moreover an analysis of patterns of selectivity and classification of funds in terms of structure members according to different age groups were performed.

**Grażyna Trzpiot**  
**Joanna Tomanek**

## **SZACOWANIE STRUKTURY TERMINOWEJ STÓP PROCENTOWYCH**

---

---

### **Wprowadzenie**

Stopy procentowe jest miernikiem przychodu przysługującego posiadaczowi kapitału z racji udostępniania go innym. Jest to jeden z ważniejszych czynników ekonomicznych. Decyduje o popycie na kapitał oraz jego podaży na danym rynku. Może być przedmiotem manipulacji jako czynnik wpływający na koniunkturę. Od czasu, gdy zostało uznane znaczenie stopy procentowej dla wzrostu gospodarczego, jest ona zasadniczym elementem polityki pieniężnej. Informacja o strukturze terminowej stóp procentowych jest ważna z punktu widzenia podejmowania decyzji inwestycyjnych, finansowania i zarządzania ryzykiem stopy procentowej. Niniejszy artykuł ma na celu przedstawienie podstawowych modeli przybliżających strukturę terminową stóp procentowych w aspekcie aproksymacji krzywej dochodowości.

### **1. Podstawowe pojęcia**

W pierwszej kolejności zostaną przedstawione: pojęcie struktury terminowej stóp procentowych oraz rodzaje stóp procentowych podlegających modelowaniu.

Struktura terminowa stóp procentowych opisuje relacje pomiędzy poziomami dochodowości instrumentów a czasem pozostałym w danej chwili do ich wykupu. Jeżeli przyjmie się, że jest znana obecna rynkowa cena zerokuponowej obligacji  $P$ , a  $C$  to kwota, która zostanie wypłacona posiadaczowi obligacji w chwili  $t$ , to wykorzystując dyskonto składane z kapitalizacją co jednostkę czasu, można obliczyć stopę procentową na okres  $t$  (Kliber, 2009):

$$P = \frac{C}{(1 + r(t))^t} \quad (1)$$

gdzie funkcja  $r(t)$  określa stopę procentową za okres od chwili obecnej do  $t$  i jest nazywana strukturą terminową stóp spot.

Zagadnienie struktury terminowej stóp procentowych (ang. term structure of interest rates) jest również zwane zagadnieniem krzywej dochodowości lub krzywej stopy dochodu (yield curve). Modele struktury terminowej stóp procentowych są wykorzystywane w wielu innych zagadnieniach teoretycznych (np. wycena instrumentów dłużnych i instrumentów pochodnych na stopę procentową). Znajomość struktury terminowej stóp procentowych ma także praktyczne znaczenie. Pozwala na podejmowanie efektywnych decyzji dotyczących inwestowania, finansowania i zarządzania ryzykiem stopy procentowej.

Przegląd podstawowych stóp procentowych podlegających modelowaniu przedstawili w literaturze polskiej m.in. Piontek (1999), Jajuga (2005), Kliber (2009). Punktem wyjścia w analizie stóp procentowych jest stopa spot, zwana inaczej natychmiastową. Stopy spot to bieżące stopy procentowe, tj. stopy dla okresów zaczynających się teraz i kończących się w danym momencie w przyszłości. Dla inwestycji o nakładzie początkowym  $P$ , rozpoczynającej się dzisiaj i trwającej  $t$  dni (w przypadku rynku pieniężnego) lub  $n$  lat (na rynku kapitałowym), osiągającej wartość końcową  $FV$  oraz nieprzynoszącej żadnych innych przepływów pieniężnych, stopę spot można zapisać następująco:

$$r_t = \frac{FV - P}{P} \cdot \frac{T}{t} \quad (2)$$

gdzie:

$t$  – liczba dni trwania inwestycji,  
 $T$  – umowna liczba dni w roku,

lub:

$$r_n = \left( \frac{FV}{P} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (3)$$

gdzie:

$n$  – liczba lat trwania inwestycji.

Stopa terminowa (forward) reprezentuje oprocentowanie pożyczki dotyczące okresu rozpoczynającego się w przyszłości i trwającego pewien czas. Formalnie stopa terminowa dotycząca okresu rozpoczynającego się obecnie (chwila zerowa) jest stopą spot. Według Jajugi (2005), biorąc pod uwagę specyfikę odpowiednio rynku pieniężnego i kapitałowego, stopę forward zapisuje się następująco:

$$f_{s,v} = \left( \frac{1 + r_m \frac{m}{T}}{1 + r_s \frac{s}{T}} - 1 \right) \cdot \frac{T}{v} \quad (4)$$

gdzie:

$f_{s,v}$  – stopa terminowa v-dniowa za s dni,

$r_s$  – stopa spot s-dniowa,

$r_m$  – stopa spot m-dniowa ( $m = s + v$ ),

$T$  – umowna liczba dni w roku,

lub:

$$f_{s,v} = \left( \frac{(1 + r_m)^m}{(1 + r_s)^s} - 1 \right)^{\frac{1}{v}} - 1 \quad (5)$$

gdzie:

$f_{s,v}$  – stopa terminowa v-letnia za s lat,

$r_s$  – stopa spot s-letnia,

$r_m$  – stopa spot m-letnia ( $m = s + v$ ).

Najczęściej rozpatrywanymi stopami terminowymi w przypadku inwestycji długoterminowej są stopy roczne, oznaczane jako  $f_{s,1}$ . Stopy forward można bezpośrednio wyznaczyć na podstawie kontraktów FRA (Forward Rate Agreement), czyli kontraktów, w których jedna strona zobowiązuje się pożyczyć drugiej określoną kwotę pieniędzy na pewien okres w przyszłości o ustalonej wcześniej stopie procentowej. Jednak trudność może przysporzyć zgromadzenie odpowiedniego zbioru informacji o tego typu kontraktach, w związku z czym stopy te wyznacza się na podstawie struktury terminowej stóp spot.

Kolejnym typem stopy procentowej jest chwilowa stopa procentowa (ang. instantaneous interest rate), nazywana także stopą krótkoterminową (short rate). Odpowiada ona oprocentowaniu pożyczki rozpoczętej dzisiaj i trwającej przez dowolnie krótki okres, co zapisuje się jako:

$$r(t) = \lim_{t \rightarrow 0} r_t \quad (6)$$

Chwilowa stopa terminowa (ang. instantaneous forward rate) odpowiada natomiast stopie pożyczki zakontraktowanej w danej chwili oraz rozpoczynającej się w momencie s i zwracanej chwilę potem:

$$f(s, t) = \lim_{t \rightarrow 0} r_{s,t} \quad (7)$$

Chwilowa stopa terminowa wyznaczona dla chwili obecnej (czyli okresu zerowego) jest stopą natychmiastową spot. Struktura terminowa cen spot jednoznacznie określa strukturę terminową stóp forward. Prawdziwa jest także zależność odwrotna – struktura terminowa forward jednoznacznie określa strukturę terminową spot, co można zapisać za pomocą następującej zależności (Piontek, 1999):

$$r(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(0, s) ds \quad (8)$$

Po zróżniczkowaniu obu stron jest możliwe wyznaczenie chwilowych stóp forward:

$$f(0, t) = r(t) + t \cdot r'(t) \quad (9)$$

## 2. Podstawa szacowania stóp procentowych

W praktyce właściwie żadna stopa procentowa nie jest obserwowana bezpośrednio. Do określenia stóp spot, a następnie na ich podstawie stóp forward są wykorzystywane stopy procentowe obserwowane na rynku. W przypadku okresów krótszych niż rok wykorzystuje się stopy rynku międzybankowego, stopy rentowności bonów skarbowych, stopy transakcji repo na rynku pieniężnym i stopy kontraktów swap. W przypadku dłuższych okresów głównym źródłem informacji są stopy dochodu obligacji. Pewnym przybliżeniem chwilowej stopy natychmiastowej jest stopa jednodniowa typu overnight określana na rynku międzybankowym.

Struktura terminowa jest najczęściej odnoszona do skarbowych papierów wartościowych. Decyduje o tym fakt, że przedsiębiorstwa nie są homogeniczne. Ponadto skarbowe papiery wartościowe są często traktowane jako papiery wolne od ryzyka (z tego powodu ich cena zależy wyłącznie od zróżnicowania stóp procentowych).

Stopy dochodu obligacji zerokuponowych bezpośrednio determinują stopę spot. Jednak stopy otrzymywane na podstawie obligacji kuponowych (przynoszących okresowe odsetki) muszą być odpowiednio transformowane w celu uzyskania stóp spot. W przypadku obligacji kuponowych można mówić o cenie czystej, niezawierającej narosłych odsetek, oraz o cenie brudnej, która zawiera odsetki narosłe od ostatniej płatności (inaczej nazywanej ceną rozliczeniową). Cenę brudną oblicza się jako sumę kursu obligacji pomnożonego przez wartość nominalną oraz narosłych odsetek. Kurs obligacji wyraża się zwykle jako procent wartości nominalnej.

Na GPW są notowane obligacje skarbowe, komunalne i korporacyjne. Wśród obligacji skarbowych są dostępne obligacje dwuletnie, trzyletnie, pięcioletnie oraz dziesięcioletnie. Obligacje dwuletnie są zerokuponowe, co oznacza, że są sprzedawane z dyskontem i w momencie wykupu inwestorowi jest zwracana wartość nominalna. Nazwy dwuletnich obligacji zerokuponowych rozpoczynają się od znaków OK. Obligacje trzyletnie są oprocentowane według zmiennej stopy procentowej opartej na rentowności trzynastotygodniowych bonów skarbowych uzyskanych na ostatnich przetargach. Odsetki od tych obligacji są płacone w okresach kwartalnych (luty, maj, sierpień, listopad). Nazwy trzyletnich obligacji o zmiennym oprocentowaniu rozpoczynają się od znaków TZ. Obligacje pięcioletnie mają stałe oprocentowanie. Odsetki są wypłacane rocznie. Profil tej obligacji określają znaki SP lub PS. Obligacje dziesięcioletnie mogą mieć stałe lub zmienne oprocentowanie o okresie wypłaty odsetek równym jeden rok. Obligacje dziesięcioletnie o oprocentowaniu stałym mają w swojej nazwie DS, natomiast o oprocentowaniu zmiennym – DZ. W przypadku wszystkich notowanych obligacji cztery ostatnie znaki w nazwie oznaczają miesiąc i rok wykupu. Przykładowo obligacja OK1012 ma termin wykupu 25 października 2012. Informacje o notowanych obligacjach są dostępne na stronie internetowej GPW ([http://www.gpw.pl/zrodla/gpw/spws/pol/oblig\\_napl.html](http://www.gpw.pl/zrodla/gpw/spws/pol/oblig_napl.html)).

### 3. Krzywa dochodowości

Krzywa dochodowości jest graficzną prezentacją terminowej struktury stóp procentowych. Wyznacza się ją za pomocą pewnej funkcji przybliżającej dane empiryczne (stopy dochodu dla pewnych okresów). W rezultacie jest możliwe określenie stóp dochodu odpowiadających dowolnym okresom. Wymaga się, aby wyestymowana krzywa dochodowości była dobrze dopasowana do danych oraz dostatecznie gładka. Wymaganiem minimalnym dla krzywej dochodowości jest ciągłość. Ponadto, aby możliwe było otrzymanie struktury terminowej stóp forward, struktura stóp spot, zgodnie ze wzorem 9, powinna być różniczkowalna.

Modele aproksymacji krzywej dochodowości polegają na wyznaczeniu pewnej funkcji na podstawie danych empirycznych (stopy dochodu dla pewnych okresów). W rezultacie funkcja powinna umożliwiać określenie stóp dochodu odpowiadających dowolnym okresom. Można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje modeli estymacji krzywej dochodowości:

- bezpośrednio,
- aproksymacji segmentowej,
- funkcji sklepanych,
- aproksymacji całej krzywej dochodowości.

Modele bezpośrednie polegają na wyznaczeniu stóp spot (zerokuponowych) na podstawie stóp dochodu obligacji kuponowych poprzez rozwiązanie równania:

$$\sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+r_t)^t} = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+YTM)^t} \quad (10)$$

gdzie po lewej stronie równania występują nieznane stopy spot, a po prawej znane stopy dochodu obligacji kuponowych (Jajuga, 2005). Metoda ta opiera się na spostrzeżeniu, że obligacja kuponowa może być potraktowana jako portfel obligacji bezkuponowych. Próbę wyznaczenia krzywej rentowności dla rynku polskiego na podstawie notowań obligacji o stałym oprocentowaniu przedstawił Piontek (1999).

Modele aproksymacji segmentowej polegają na podziale przedziału czasowego na kilka segmentów, a następnie konstrukcji standardową metodą interpolacji krzywej dochodowości na podstawie danych empirycznych dla każdego segmentu (tzw. metoda funkcji sklejaných – ang. splines) (Zivot, Wang, 2001). Najczęściej dokonuje się podziału na trzy segmenty odpowiadające odpowiednio stopom krótkoterminowym (1 dzień-1 rok), średnioterminowym (1-10 lat) oraz długoterminowym (powyżej 10 lat). Jako funkcje aproksymujące najczęściej stosuje się wielomiany lub funkcje wykładnicze. Koncepcja tego modelu została zaproponowana jeszcze w latach siedemdziesiątych w pracach McCulloch (1971, 1975).

Metoda funkcji sklejaných pozwala na dopasowanie prawie każdego przebiegu struktury terminowej. Jest stosunkowo prosta do zastosowania (estymacja opiera się na regresji liniowej). Jej wadą jest duża wrażliwość na sposób rozmieszczenia węzłów i ich przyjętą liczbę. Inną wadą jest brak podstaw teoretycznych. Otrzymane tą metodą krzywe przebiegu struktury stóp terminowych mogą jednak znacznie odbiegać od oczekiwanych na podstawie teorii finansów (Kliber, 2009).

Innym podejściem modelowania stóp procentowych jest aproksymacja całej krzywej dochodowości poprzez estymację pewnej funkcji opisującej wszystkie stopy procentowe, przy czym parametry tej funkcji mają praktyczną interpretację. Największą popularność zdobyły dwa modele: Nelsona-Siegela (Nelson, Siegel, 1987) oraz Svenssona (Svensson, 1994).

Model Nelsona-Siegela opisuje funkcyjną zależność pomiędzy czasem zapadalności a poziomem stopy terminowej. Model ten bazuje na chwilowej stopie procentowej i kapitalizacji ciągłej. Punktem wyjścia modelu jest stopa terminowa dla depozytów jednodniowych wyrażona następująco:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] + \beta_2 \frac{t}{\tau} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \quad (11)$$

Po scałkowaniu otrzymano:

$$r_t = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - \exp(t/\tau)}{t/\tau} - \beta_2 \exp(t/\tau) \quad (12)$$

Model ten obejmuje trzy komponenty określające położenie i kształt krzywej dochodowości w danym przedziale czasowym zapadalności instrumentów finansowych: długoterminowy  $\beta_0$ , średnioterminowy  $\beta_1 \frac{1 - \exp(t/\tau)}{t/\tau}$  oraz krótkoterminowy  $\beta_2 \left( \frac{1 - \exp(t/\tau)}{t/\tau} - \exp(-t/\tau) \right)$ . Ze względu na fakt, że stopa procentowa instrumentu o bardzo długim terminie zapadalności (dążącym do nieskończoności) dąży do wartości określonej przez parametr  $\beta_0$ , jest on interpretowany jako stopa, do której w długim okresie dążą wszystkie inne. Natomiast w bardzo krótkim okresie (gdy termin zapadalności dąży do zera) otrzymano wartość  $(\beta_1 + \beta_2)$ , która jest interpretowana jako nieskończenie krótka stopa natychmiastowa, czyli, w praktyce, jako bieżąca stopa oprocentowania lokaty overnight.

Relacja  $(\beta_1 / \beta_2)$  determinuje punkt ekstremalny krzywej  $r(t)$ . Funkcja może mieć najwyżej jedno ekstremum i posiada je, gdy wartość bezwzględna parametru  $\beta_1$  jest mniejsza od wartości bezwzględnej  $\beta_2$ . Natomiast znak parametru  $\beta_2$  określa charakter tego ekstremum: znak ujemny oznacza minimum, a dodatni znak  $\beta_2$  odpowiada za osiągnięcie przez krzywą  $r(t)$  maksimum. Parametr  $\tau$  determinuje natomiast wartość czasu zapadalności, w którym jest osiągnięte ekstremum funkcji  $r(t)$  (Świętoń, 2002).

Parametry modelu można szacować np. nieliniową metodą najmniejszych kwadratów. Znając rynkowe ceny obligacji, wartości parametrów dobiera się tak, aby zminimalizować sumę kwadratów różnic między cenami rynkowymi a teoretycznymi. Do rozwiązania zadania stosuje się metody numeryczne. Istotną kwestią jest tutaj jednak określenie punktu startowego, przy czym pomocne są interpretacje parametrów funkcji (Kliber, 2009).

Model Svenssona jest rozwinięciem modelu Nelsona-Siegel. Pozwala na większą elastyczność w modelowaniu krzywej dzięki dwóm dodatkowym parametrom:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} \exp\left[-\frac{t}{\tau_1}\right] + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} \exp\left[-\frac{t}{\tau_2}\right] \quad (13)$$

Rozszerzenie to powoduje, że w modelu Svenssona struktura terminowa stóp procentowych może mieć dwa „garby”. O ich położeniu decydują parametry  $\tau_1$  oraz  $\tau_2$ , a  $\beta_2$  i  $\beta_3$  o tym, czy ma się do czynienia z minimum, czy maksimum. Pozostałe parametry są interpretowane jak w modelu Nelsona-Siegela. Proces estymacji wygląda więc bardzo podobnie.

Banki centralne w krajach o dojrzałym rynku kapitałowym publikują swoje oszacowania krzywej dochodowości. Przykładowo we Włoszech i Finlandii jest stosowany model Nelsona-Siegła, a w Hiszpanii, Kanadzie, Niemczech, Norwegii i Szwajcarii – model Svenssona. W Belgii i Francji korzysta się natomiast z obu modeli: Nelsona-Siegła i Svenssona. W takich krajach, jak Szwecja, USA, Wielka Brytania czy Japonia, jest wykorzystywana metoda funkcji sklepanych (Kliber, 2009). W Polsce jak dotąd Narodowy Bank Polski nie opublikował oszacowań struktury terminowej.

#### 4. Przykład aproksymacji krzywej dochodowości – model Svenssona

Do estymacji krzywej dochodowości wykorzystano dane na temat obligacji skarbowych krajów strefy euro o ratingu AAA, publikowane na stronie Europejskiego Banku Centralnego (<http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>). Obliczenia przeprowadzono w pakiecie statystycznym R ([www.r-project.org](http://www.r-project.org)), wykorzystując bibliotekę „YieldCurve”.

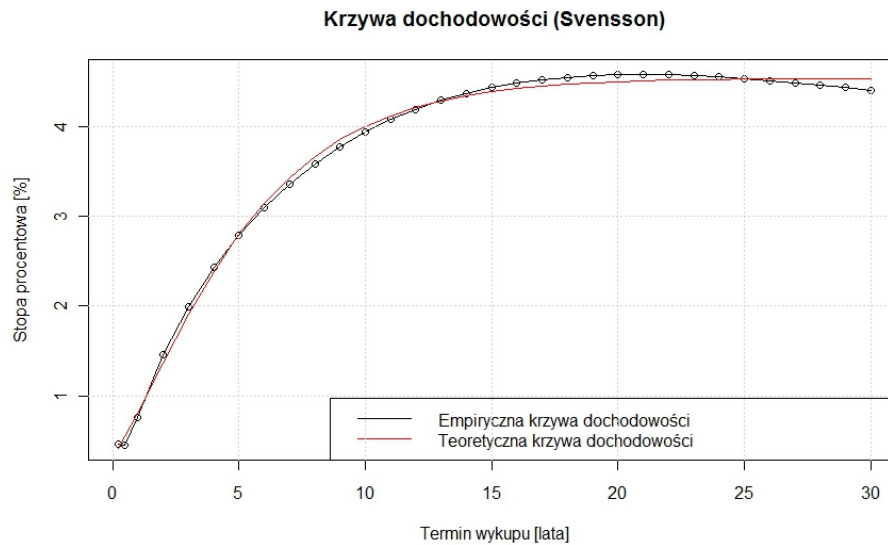
Wyniki oszacowania parametrów modelu Svenssona na dzień 24 lipca 2009 roku zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1

Oszacowanie parametrów modelu Svenssona

| Parametr          | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| Wartość parametru | 4,468     | -4,170    | -4,520    | 4,768     | 2,231    | 4,461    |

Rysunek 1 przedstawia krzywą dochodowości dla dnia 24 lipca 2009 roku według modelu Svenssona. Można zauważyć, że model stosunkowo dobrze odzwierciedla krzywą dochodowości przy krótszych terminach wykupu. Gorsze dopasowanie uzyskano dla okresów zapadalności zbliżających się do 30 lat.



Rys. 1. Krzywa dochodowości według modelu Svenssona

## Podsumowanie

Zagadnienie struktury terminowej stóp procentowych jest istotnym problemem o charakterze teoretycznym i praktycznym. Właściwe rozpoznanie krzywej dochodowości ma fundamentalne znaczenie w sferze ekonomii i finansów. Opisanie modelem estymacji krzywej dochodowości pozwala na przybliżenie struktury terminowej stóp procentowych i lepsze zrozumienie jej istoty.

## Literatura

- Ferstl R., Hayden J. (2010): Zero-coupon Yield Curve Estimation with the Package Termstrc. „Journal of Statistical Software”, Vol. 36, Iss. 1, August.
- Jajuga K. (2005): Modelowanie stóp procentowych a narzędzia ekonometrii finansowej. W: Dynamiczne modele ekonometryczne. UMK, Toruń.
- Jajuga K. (2005): Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych – wyzwanie dla ekonometrii. Ekonometryczne modelowanie i prognozowanie wzrostu gospodarczego. UG, Gdańsk.
- Kliber A.M. (2010): Stopy procentowe i kursy walutowe. Zależność i powiązania w gospodarkach środkowoeuropejskich. Wolters Kluwer Polska.

- Kliber P. (2009): Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce. „Bank i Kredyt”, 40 (1), s. 109-126
- Piontek K. (1999): Modelowanie struktury stóp procentowych na rynku polskim – wprowadzenie. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 869, s. 146-155.
- Świętoń M. (2002): Terminowa struktura dochodowości skarbowych papierów wartościowych w Polsce w latach 1998-2001. „Materiały i Studia”, 150.
- Zivot E., Wang J. (2001): Modelling Financial Time Series with S-PLUS. September, 27.

## YIELD CURVE ESTIMATION PROBLEM

### Summary

In paper we describe a problem of yield curve estimation. The purpose was comparing the two most common models: Nelson-Siegel model and Svensson model. Svensson model is a modification of Nelson-Siegel model. This model have the better properties of estimators so the better properties of model. We applied Svensson model for empirical data.