Zadanie 1A

Firma „Dresiarz” produkuje dwa typy dresów sportowych: „normalny” i „lux”, zużywając do tego celu 3 rodzaje surowców, S_1, S_2, S_3, których dobowe zasoby wynoszą odpowiednio: 32, 60 i 52 jednostki. Zysk jednostkowy[1] z produkcji „normalnego” dresu wynosi 10 zł, natomiast z dresu „lux” 25 zł. Jednostkowe zużycie surowców podane jest w tablicy 1A.1.

Tablica 1A.1

Rodzaj dresu	Zużycie surowców		
	S_1	S_2	S_3
normalny	4	3	8
lux	4	15	4

Zapisać model matematyczny zadania pozwalającego na znalezienie optymalnego dobowego planu produkcji, który przyniesie firmie „Dresiarz” maksymalny dobowy zysk.

Rozwiązanie

Opis zmiennych decyzyjnych

x_1 – planowana dobowa produkcja (w sztukach) dresu normalnego
x_2 – planowana dobowa produkcja (w sztukach) dresu lux.

Funkcja celu:

$$10x_1 + 25x_2 \text{ ---> max}$$

Ograniczenia:

$$4x_1 + 4x_2 \leq 32$$
$$3x_1 + 15x_2 \leq 60$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 52$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$[2]

[1] Wyrażenie *zysk jednostkowy* jest pewnym uproszczeniem. W istocie chodzi o *jednostkową marżę pokrycia* przy założeniu, że koszty zużycia surowców są jedynymi kosztami zmiennymi.

[2] Łatwo sprawdzić, wykorzystując na przykład odpowiedni program komputerowy, że w rozwiązaniu optymalnym $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, czyli otrzymane wartości są całkowite. Gdyby któraś z nich nie spełniała tej własności, należałoby powtórzyć obliczenia zakładając dodatkowo, że zarówno x_1, jak i x_2 mają być liczbami całkowitymi (przyjętymi w zadaniu jednostkami są sztuki). Modele liniowe całkowitoliczbowe przedstawiono w następnym rozdziale.

Zadanie 2A

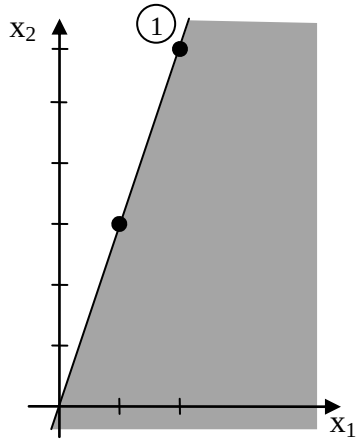
Rozwiązać metodą geometryczną zadanie:

$$2x_1 + 3x_2 \text{ ---> max}$$
$$3x_1 - x_2 \geq 0$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$1½\ x_1 + x_2 \leq 12\ ¼$$
$$-x_1 + 6x_2 \geq 8½$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

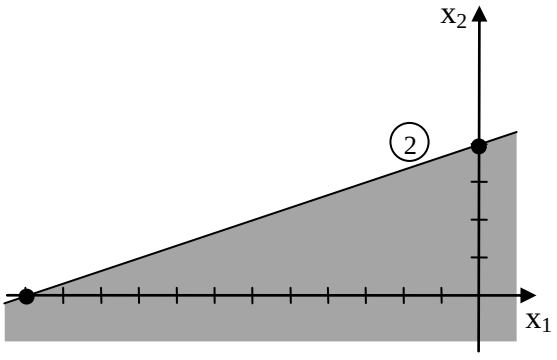
Rozwiązanie

Znajdujemy te punkty płaszczyzny, dla których spełniona jest nierówność $3x_1 - x_2 \geq 0$ (pierwsze ograniczenie). W tym celu rysujemy najpierw prostą $3x_1 - x_2 = 0$. Wyznaczamy dwa dowolne punkty leżące na tej prostej, wstawiając do równania $3x_1 - x_2 = 0$ dwie różne (dowolne) wartości zmiennej x_1 i wyznaczając x_2 z tego równania. Jeśli na przykład wstawimy $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, to otrzymamy dwa punkty leżące na prostej: (1,3) i (2,6). Szukana prosta (o numerze 1) przedstawiona jest na rys. 1. Wyznaczamy teraz półpłaszczyznę, dla której $3x_1 - x_2 \geq 0$. W tym celu wykorzystujemy dowolny punkt, nie leżący na prostej $3x_1 - x_2 = 0$. Najwygodniej posłużyć się punktem (1, 1). Wstawiając jego współrzędne do rozpatrywanej nierówności otrzymujemy $3 - 1 \geq 0$, tak więc punkt (1, 1) leży na poszukiwanej półpłaszczyźnie. Interesujący nas obszar przedstawia rys. 1A.1

W podobny sposób wyznaczymy kolejne obszary, wyznaczone przez następne ograniczenia. Chcąc znaleźć obszar, w którym $-x_1 + 3x_2 \leq 12$, rysujemy prostą $-x_1 + 3x_2 = 12$. Ponieważ po prawej stronie równania jest liczba różna od 0, możemy wyznaczyć dwa punktu leżące na tej prostej przyjmując najpierw $x_1=0$, a potem $x_2=0$. Wówczas otrzymamy następujące punkty: (-12, 0) oraz (0, 4). Szukana prosta (o numerze 2) przedstawiona jest na rys. 2. Do wyznaczenia poszukiwanego obszaru najłatwiej teraz wykorzystać punkt (0, 0). Podstawiając jego składowe do nierówności $-x_1 + 3x_2 \leq 12$ otrzymujemy $0 \leq 12$, tak więc punkt (0, 0) leży na poszukiwanej półpłaszczyźnie. Interesujący nas obszar przedstawiono na rys. 1A.2.



Rys. 2A.1

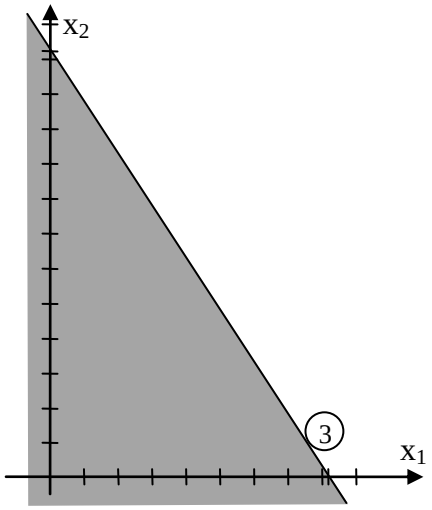


Rys. 2A.2

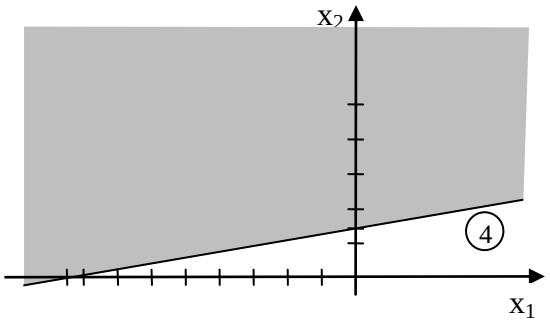
Chcąc znaleźć obszar, w którym $1½\ x_1 + x_2 \leq 12¼$, rysujemy prostą $1½x_1 + x_2 = 12¼$. Podstawiając najpierw $x_1 = 0$, a potem $x_2 = 0$, otrzymamy następujące punkty: ($8^1/_6$, $^1/_6$) oraz (0, 12¼). Szukana prosta (o numerze 3) przedstawiona jest na rys. 3. Do wyznaczenia poszukiwanego obszaru najłatwiej ponownie wykorzystać punkt (0, 0). Podstawiając jego

składowe do nierówności 1½ $x_1 + x_2 \leq 12¼$ otrzymujemy $0 \leq 12$, tak więc punkt (0, 0) leży na poszukiwanej półpłaszczyźnie. Interesujący nas obszar przedstawiono na rys. 2A.3.

Chcąc znaleźć obszar, w którym $-x_1 + 6x_2 \geq 8½$, rysujemy prostą $-x_1 + 6x_2 = 8½$. Podstawiając najpierw $x_1=0$, a potem $x_2=0$, otrzymamy następujące punkty: (–8 ½, 0), oraz (0, $^5/_{12}$). Szukana prosta (p numerze 4) przedstawiona jest na rys. 4. Do wyznaczenia poszukiwanego obszaru znów wykorzystamy punkt (0, 0). Podstawiając jego składowe do nierówności $-x_1 + 6x_2 \geq 8½$ otrzymujemy $0 \geq 8½$, która nie jest spełniona, więc punkt (0, 0) nie leży na poszukiwanej półpłaszczyźnie. Interesujący nas obszar znajduje się po przeciwnej stronie tej prostej i przedstawiony został na rys. 2A.4.



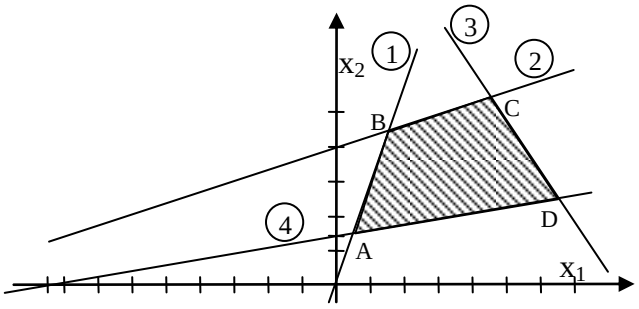
Rys. 2A.3



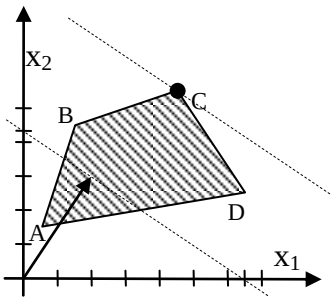
Rys. 2A.4

Część wspólną obszarów, wyznaczonych przez kolejne ograniczenia z uwzględnieniem warunków nieujemności (co oznacza, że rozpatrujemy jedynie punkty, leżące w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych) przedstawia rysunek 2A.5. Jest to zbiór rozwiązań dopuszczalnych rozpatrywanego zadania. Wierzchołkami tego zbioru są punkty A, B, C i D.

Funkcja celu f ma pochodne cząstkowe równe odpowiednio $\partial f/\partial x_1 = 2$, $\partial f/\partial x_2 = 3$. Wykreślamy gradient funkcji celu[3], zaczepiając jego początek w początku układu współrzędnych. Zwrot gradientu wskazuje kierunek wzrostu funkcji celu. Wykreślamy prostą prostopadłą do wektora gradientu, będącą jedną z warstwic funkcji celu i przesuwamy ją równolegle do punktu C, w którym znajduje się rozwiązanie optymalne (rys. 2A.6)[4].



Rys. 2A.5



Rys. 2A.6

[3] Gradient funkcji celu to wektor, którego składowe równe są współczynnikom funkcji celu.

[4] Inny sposób znalezienia rozwiązania optymalnego to metoda prób i błędów, opisana dokładnie w podręczniku T.Trzaskalika „Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem", PWE, Warszawa, 2008.

Punkt C leży na przecięciu prostych 2 i 3. Rozwiązując wyznaczone przez te proste układ równań:

$$-x_1 + 3x_2 = 12$$

$$1½x_1 + \ x_2 = 12¼.$$

otrzymujemy współrzędne punktu C, których wartości stanowią jednocześnie rozwiązanie optymalne rozpatrywanego przez nas zadania PL. Mamy: $x_1 = 4½$, $x_2 = 5½$.

Obliczamy optymalną wartość funkcji celu:

Zadanie 3A

Zadanie PL:

$$2x_1 + 3x_2 \text{ ---> max}$$

$$3x_1 - x_2 \geq 0$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$1½\ x_1 + x_2 \leq 12\ ¼$$

$$-x_1 + 6x_2 \geq 8½$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

zapisać w postaci tablicy simpleksowej.

Rozwiązanie

Pierwsza nierówność mnożymy stronami przez (-1). Możemy tak postąpić, ponieważ po wykonaniu tego działania prawa strona pozostanie nieujemna. Jednocześnie wykonanie tego działania pozwoli na zmniejszenie liczby zmiennych sztucznych, które wprowadzimy do zadania. Ograniczenie to jest obecnie w postaci:

$$-3x_1 + x_2 \leq 0$$

Wprowadzając do kolejnych ograniczeń zmienne bilansujące x_3, x_4, x_5 i x_6 otrzymujemy następującą postać zadania:

$$2x_1 + 3x_2 \text{ ---> max}$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$1½\ x_1 + x_2 + x_5 = 12¼$$

$$-x_1 + 6x_2 - x_6 = 8½$$

$$x_1,..., x_6 \geq 0$$

Zmiennymi bazowymi dla ograniczeń 1 – 3 są odpowiednio zmienne x_3, x_4 i x_5. Chcąc uzyskać zmienną bazową dla ograniczenia 4, wprowadzamy zmienną sztuczną x_6. Zmienną tą wprowadzamy również do funkcji celu ze współczynnikiem $c_7 = -300$. Wartość bezwzględna tego współczynnika powstała przez pomnożenie największego współczynnika funkcji celu, czyli $c_2 = 3$, przez liczbę 100. Współczynnik ten jest ujemny za względu na to, że rozpatrywane zadanie jest zadaniem maksymalizacji.

Otrzymujemy zadanie:

$$2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \text{ ---> max}$$

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_4 = 12$$

$$1½\, x_1 + x_2 + x_5 = 12¼$$

$$-x_1 + 6x_2 - x_6 + x_7 = 8½$$

$$x_1, \ldots, x_7 \geq 0$$

Zadanie to zapisujemy w tablicy simpleksowej (tablica 3A.1).

Tablica 3A.1

cx-->max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Baza	c_B	2	3	0	0	0	0	-300	b
x_3	0	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	-1	3	0	1	0	0	0	12
x_5	0	1½	1	0	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	-1	6	0	0	0	-1	1	8½

Obliczamy kolejno wskaźniki optymalności:

$$c_1 - z_1 = 2 - [0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + 1{,}5 \cdot 0 + (-300) \cdot (-1)] = -298$$

$$c_2 - z_2 = 3 - [0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot (-300)] = 1803$$

$$c_3 - z_3 = 0$$

$$c_4 - z_4 = 0$$

$$c_5 - z_5 = 0$$

$$c_6 - z_6 = 0 - [0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-300)] = -300$$

$$c_7 - z_7 = 0$$

Dołączamy wskaźniki optymalności do tablicy simpleksowe (tablica 3A.2).

Tablica 3A.2

cx-->max		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Baza	c_B	2	3	0	0	0	0	-300	b
x_3	0	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	-1	3	0	1	0	0	0	12
x_5	0	1½	1	0	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	-1	6	0	0	0	-1	1	8½
$c_j - z_j$		-298	1803	0	0	0	-300	0	

Zadanie 4A

Dana jest następująca tablica simpleksowa (tablica 4A.1). Wykonać jedną iterację simpleksową.

Tablica 4A.1

cx--> max		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	0	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	-1	3	0	1	0	0	0	12
x_5	0	1½	1	0	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	-1	6	0	0	0	-1	1	8½
$c_j - z_j$		-298	1803	0	0	0	-300	0	

Rozwiązanie.

Kryterium optymalności
Ponieważ współczynnik optymalności dla zmiennej x_2 jest ujemny, rozpatrywane rozwiązanie nie jest optymalne i istnieje możliwość jego poprawy.

Kryterium wejścia
Współczynnik optymalności przyjmuje największą wartość dla zmiennej x_2., dlatego też jako zmienną wprowadzaną do bazy wybieramy x_1.

Kryterium wyjścia
W kolumnie, odpowiadającej zmiennej wprowadzanej do bazy znajdują się cztery składowe dodatnie. tworzymy kolejno ilorazy:

$$0 : 1 = 0$$
$$12 : 3 = 4$$
$$12¼ : 1 = 12¼$$
$$8½ : 6 = 1^5/_{12}$$

najmniejszy z nich wynosi zero i odpowiada pierwszemu wierszowi tablicy simpleksowej, stąd też z bazy usuwamy zmienna x_3.

Wykorzystanie przekształceń elementarnych.
Nową zmienną bazową staje się x_2. Ponieważ element a_{12} macierzy współczynników wynosi 1, pierwszy wiersz przepisujemy bez zmian. Jednocześnie wiemy, że pozostałe składowe kolumny odpowiadającej nowej zmiennej bazowej x_2 są zerami (tablica 4A.2).

Tablica 4A.2

cx--> min		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0		0						
x_5	0		0						8½
x_7	-300		0						
$c_j - z_j$									

Wykorzystując nowy wiersz odpowiadający zmiennej x_2 (tablica 2) wykonujemy dalsze przekształcenia elementarne.
Wiersz 1 z nowej tablicy mnożymy przez (-3) i dodajemy do drugiego wiersza poprzedniej tablicy:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**b**
9	-3	-3	0	0	0	0	0
-1	3	0	1	0	0	0	12
8	**0**	**-3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**12**

Wynik zapisujemy w tablicy 4A.3.

Tablica 4A.3

cx-->min		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Baza	c_B	2	3	0	0	0	0	-300	b
x_2	3	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	8	0	-3	1	0	0	0	12
x_5	0	1							8½
x_7	-300	0							
$c_j - z_j$									

Wiersz 1 z nowej tablicy, pomnożony przez (-1) dodajemy do trzeciego wiersza poprzedniej tablicy:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
3	-1	-1	0	0	0	0	12
1½	1	0	0	1	0	0	12½
4½	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**12¼**

Wynik zapisujemy w tablicy 4A.4.

Tablica 4A.4

cx-->min		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	8	0	-3	1	0	0	0	12
x_5	0	4½	0	-1	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	0							
$c_j - z_j$									

Wiersz 1 z nowej tablicy, pomnożony przez (-6) dodajemy do czwartego wiersza poprzedniej tablicy:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
18	-6	-6	0	0	0	0	0
1	6	0	0	0	-1	1	8 ½
17	**0**	**-6**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**8½**

Wynik zapisujemy w tablicy 4A.5

Tablica 4A.5

cx-->min		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	8	0	-3	1	0	0	0	12
x_5	0	4½	0	-1	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	**17**	**0**	**-6**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**8½**
$c_j - z_j$									

Obliczamy nowe wartości wskaźników optymalności:

$c_1 - z_1 = 2 - [\ 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4½ + \ (-300) \cdot 17] = 5111$

$c_2 - z_2 = 0$

$c_3 - z_3 = 0 - [3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + (-300) \cdot (-6)] = -1803$

$c_4 - z_4 = 0$

$c_5 - z_5 = 0$

$c_6 - z_6 = 0 - [0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-300)] = -300$

$c_7 - z_7 = 0$

Wskaźniki optymalności zapisujemy w tablicy 4A.6

Tablica 4A.6

cx-->min		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	8	0	-3	1	0	0	0	12
x_5	0	4½	0	-1	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	17	0	-6	0	0	-1	1	8½
$c_j - z_j$		5111	0	-1803	0	0	-300	0	

Zadanie 5A

a) Rozwiązując zadanie PL metodą simpleks, otrzymano tablicę 5A.1.

Tablica 5A.1[5]

cx-->min		0,00	0,00	500,00	500,00	500,00	
Baza	x_B	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_1	-3	0,00	-1,00	0,00	2,14	-1,14	3,33
x_3	0	0,00	-9,00	-1,00	18,14	-9,14	16,00
x_2	5	0,00	0,00	0,00	-0,57	0,57	1,33
c_j-z_j		0,00	-3,00	500,00	**509,29**	**493,71**	

W jaki sposób należy ją zinterpretować?

Rozwiązanie

Kryterium optymalności.
Rozwiązanie, przedstawione w tablicy (zadanie minimalizacji) nie jest optymalne, gdyż jeden ze wskaźników optymalności jest ujemny.

Kryterium wejścia
Zmienną wprowadzaną do bazy jest x_5

Kryterium wyjścia
Ponieważ wszystkie składowe kolumny odpowiadającej zmiennej x_5 są ujemne lub równe zeru, funkcja celu jest nieograniczona od dołu.

b) Rozwiązując zadanie PL metodą simpleks, otrzymano tablicę 5A.2

Tablica 5A.2

[5] Jeżeli obliczymy wskaźniki optymalności dla zmiennych x_1 oraz x_8, posługując się liczbami zamieszczonymi w tablicy simpleksowej, otrzymamy: $c_7 - z_7 = 509{,}27$, $c_8 - z_8 = 493{,}63$. Pojawiające się różnice w stosunku do wartości zamieszczonych w tablicy wynikają z błędów zaokrągleń.

cx-->min		1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
Baza	x_B	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
x_7	100,00	3,50	-1,00	0,00	0,00	-1,00	6,33
x_8	100,00	-1,00	0,00	-1,00	0,00	-2,00	2,00
x_9	100,00	-2,75	0,00	0,00	-1,00	-3,75	0,83
x_2	2,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,00
c_j-z_j		28,00	100,00	100,00	100,00	677,00	912,00

W jaki sposób należy ją zinterpretować?

Rozwiązanie

Kryterium optymalności.
Wszystkie wskaźniki optymalności dla zmiennych niebazowych przyjmują wartość dodatnie. co mogłoby świadczyć o tym, że rozwiązanie bazowe, zapisane w tablicy 2 jest rozwiązaniem optymalnym. Zwracają jednak uwagę duże wartości współczynników funkcji celu dla zmiennych bazowych x_7, x_8 oraz x_9. Te wartości są stukrotnościami największego z pozostałych współczynników optymalności, co wskazuje na to że są to najprawdopodobniej zmienne sztuczne. Ich obecność w bazie świadczy więc o tym, że jest to zadanie sprzeczne.

c) Rozwiązując zadanie PL metodą simpleks, otrzymano tablicę 5A.3.

Tablica 5A.3

cx-->max		-300,00	0,00	0,00	-300,00	
Baza	c_B	x_4	x_6	x_7	x_8	b
x_1	3,00	0,00	0,60	0,10	-0,10	6,50
x_5	0,00	0,00	0,30	0,55	-0,55	11,00
x_3	0,00	-1,00	1,70	0,45	-0,45	17,00
x_2	2,00	0,00	0,10	-0,15	0,15	2,50
$c_i - z_i$		-300,00	-2,00	0,00	-300,00	

W jaki sposób należy ją zinterpretować?

Rozwiązanie

Kryterium optymalności.
Rozwiązanie, przedstawione w tablicy (zadanie maksymalizacji) jest optymalne, gdyż wszystkie wskaźniki optymalności są niedodatnie. Ponieważ wśród wskaźników optymalności znajduje się wskaźnik o wartości równej zero dla zmiennej niebazowej, istnieją bazowe rozwiązania alternatywne. .

Kryterium wejścia
Aby przejść do tablicy simpleksowej, przedstawiającej rozwiązanie alternatywne, wykonujemy jeden krok algorytmu simpleks. Zmienną wprowadzaną do bazy jest x_7.

Kryterium wyjścia
Wyrazy wolne dzielimy przez odpowiadające im składowe dla zmiennej wprowadzanej do bazy, czyli x_6. mamy:
dla zmiennej x_1: 6,5 : 0,10 = 65,00
dla zmiennej x_5: 11,00 : 0,55 = 20,00
dla zmiennej x_3: 17,00 : 0,45 = 37,78
dla zmiennej x_2: 2,5 : (-0,15) = – (wartości ujemnych nie uwzględniamy)

Najmniejszy z ilorazów odpowiada zmiennej x_5 i tę też zmienną usuwamy z bazy.

Bazowe rozwiązanie alternatywne przedstawia tablica 5A.4.

Tablica 5A.4[6]

cx-->max		-300,00	0,00	0,00	-300,00	
Baza	c_B	x_4	x_5	x_6	x_8	b
x_1	3,00	0,00	-0,18	0,55	0,00	4,50
x_7	0,00	0,00	1,82	0,55	-1,00	20,00
x_3	0,00	-1,00	-0,82	1,45	0,00	8,00
x_2	2,00	0,00	0,27	0,18	0,00	5,50
$c_i - z_i$		-300,00	0,00	**-2,00**	-300,00	

Zadanie 6A

Rozwiązanie optymalne rozpatrywanego zadania PL przedstawiono w tablicy 6A.1.

Tablica 6A.1

cx-->max		2,00	3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-300,00	
Baza	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	0,00	1,00	0,00	0,27	0,18	0,00	0,00	5,5
x_6	0	0,00	0,00	0,00	1,82	0,55	1,00	-1,00	20
x_3	0	0,00	0,00	1,00	-0,82	1,45	0,00	0,00	8
x_1	2	1,00	0,00	0,00	-0,18	0,55	0,00	0,00	4,5
$c_j - z_j$		0,00	0,00	0,00	-0,45	-1,64	0,00	-300,00	25,5

Przeprowadzić analizę wrażliwości dla współczynnika c_1 oraz c_2.

Rozwiązanie

Współczynnik c_1

Obliczamy współczynniki optymalności dla zmiennych niebazowych:

$c_4 - z_4 = 0,00 - (3 \cdot 0,27 - c_1 \cdot 0,18) = 0,18\, c_1 - 0,81$

$c_5 - z_5 = 0,00 - (3 \cdot 0,18 + c_1 \cdot 0,55) = -0,55\, c_1 - 0,54$

$c_7 - z_7 = -300,00$

Tablica simpleksowa ma wówczas postać (tablica 6A.2):

Tablica 6A.2

cx-->max		c_1	3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-300,00	
Baza	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3,00	0,00	1,00	0,00	0,27	0,18	0,00	0,00	5,5
x_6	0,00	0,00	0,00	0,00	1,82	0,55	1,00	-1,00	20

[6] Jeżeli obliczymy wskaźniki optymalności dla zmiennej x_6 posługując się liczbami zamieszczonymi w tablicy simpleksowej, otrzymamy: $c_6 - z_6 = -2,01$. Pojawiająca się różnica w stosunku do wartości zamieszczonej w tablicy ponownie wynika z błędów zaokrągleń.

x_3	0.00	0,00	0,00	1,00	-0,82	1,45	0,00	0,00	8
x_1	c_1	1,00	0,00	0,00	-0,18	0,55	0,00	0,00	4,5
$c_j - z_j$		0,00	0,00	0,00	$0{,}18c_1 - 0{,}81$	$-0{,}55c_1 - 0{,}54$	0,00	-300,00	

Rozwiązując układ nierówności:

$$0{,}18\, c_1 - 0{,}81 \le 0{,}00$$

$$-0{,}55\, c_1 - 0{,}54 \le 0{,}00$$

otrzymujemy $-0{,}98 \le c_1 \le 4{,}50$.

Współczynnik c_2

Obliczamy współczynniki optymalności dla zmiennych niebazowych:

$c_4 - z_4 = 0{,}00 - [c_2 \cdot 0{,}27 + 2 \cdot (-0{,}18)] = -0{,}27c_2 + 0{,}36$

$c_5 - z_5 = 0{,}00 - (c_2 \cdot 0{,}18 + 2{,}00 \cdot 0{,}55) = -0{,}18c_2 + 1{,}10$

$c_7 - z_7 = -\ 300{,}00$

Tablica simpleksowa ma wówczas postać (tablica 6A.3):

Tablica 6A.3

cx-->max		2,00	c_2	0,00	0,00	0,00	0,00	-300,00	
Baza	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	c_2	0,00	1,00	0,00	0,27	0,18	0,00	0,00	5,50
x_6	0,00	0,00	0,00	0,00	1,82	0,55	1,00	-1,00	20,00
x_3	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,82	1,45	0,00	0,00	8,00
x_1	2,00	1,00	0,00	0,00	-0,18	0,55	0,00	0,00	4,50
$c_j - z_j$		0,00	0,00	0,00			0,00		

Rozwiązując układ nierówności:

$c_4 - z_4 = 0{,}00 - [c_2 \cdot 0{,}27 + 2 \cdot (-0{,}18)] = -0{,}27c_2 + 0{,}36 \le 0$

$c_5 - z_5 = 0{,}00 - [c_2 \cdot 0{,}18 + 2{,}00 \cdot 0{,}55] = -0{,}18c_2 - 1{,}10 \le 0$

otrzymujemy $1{,}33 \le c_2$.

Zadanie 7A

Dane są tablice simpleksowe: pierwsza (tablica 7A.1) i ostatnia (tablica 7A.2).

Tablica 7A.1

cx--> max		2	3	0	0	0	0	-300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	-3	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	-1	3	0	1	0	0	0	12
x_5	0	1½	1	0	0	1	0	0	12¼
x_7	-300	-1	6	0	0	0	-1	1	8 ½
$c_j - z_j$		-298	1803	0	0	0	-300	0	

Tablica 7A.2

cx--> max		2	3	0	0	0	0	-300	
Baza	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_2	3	0	1	0	$^3/_{11}$	$^2/_{11}$	0	0	5½
x_6	0	0	0	0	$^{20}/_{11}$	$^6/_{11}$	1	–1	20
x_3	0	0	0	1	$-^9/_{11}$	$^{16}/_{11}$	0	0	8
x_1	2	1	0	0	$-^2/_{11}$	$^6/_{11}$	0	0	4½
$c_j - z_j$		0	0	0	$-^5/_{11}$	$-^{18}/_{11}$	0	–300	25½

Przeprowadzić analizę wrażliwości dla współczynników b_1, b_2, b_3 i b_4.

Rozwiązanie

Współczynnik b_1

W pierwszym rozwiązaniu bazowym zmiennymi bazowymi były zmienne: x_3, x_4, x_5 oraz x_7. Z ostatniej tablicy simpleksowej wybieramy więc kolumny o numerach odpowiadających tym zmiennym i rozwiązujemy nierówność w postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & ^3/_{11} & ^2/_{11} & 0 \\ 0 & ^{20}/_{11} & ^6/_{11} & -1 \\ 1 & -^9/_{11} & ^{16}/_{11} & 0 \\ 0 & -^2/_{11} & ^6/_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 12 \\ 12^1/_4 \\ 8^1/_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy układ nierówności:

$$^3/_{11} \cdot 12 + {}^2/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$
$$^{20}/_{11} \cdot 12 + {}^6/_{11} \cdot 12¼ - 1 \cdot 8½ \geq 0$$
$$b_1 - {}^9/_{11} \cdot 12 + {}^{16}/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$
$$-{}^2/_{11} \cdot 12 + {}^6/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$

Nierówności pierwsza, druga i czwarta są zawsze spełnione w tym układzie. Jego rozwiązanie jest następujące: $b_1 \geq -8$, co po uwzględnieniu warunków nieujemności współczynnika b_1 otrzymujemy: $b_1 \geq 0$.

Współczynnik b_2

Rozwiązujemy nierówność w postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & ^3/_{11} & ^2/_{11} & 0 \\ 0 & ^{20}/_{11} & ^6/_{11} & -1 \\ 1 & -^9/_{11} & ^{16}/_{11} & 0 \\ 0 & -^2/_{11} & ^6/_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 12^1/_4 \\ 8^1/_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy układ nierówności:

$$^3/_{11} \cdot b_2 + {}^2/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$
$$^{20}/_{11} \cdot b_2 + {}^6/_{11} \cdot 12¼ - 1 \cdot 8½ \geq 0$$
$$-{}^9/_{11} \cdot b_2 + {}^{16}/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$
$$-{}^2/_{11} \cdot b_2 + {}^6/_{11} \cdot 12¼ \geq 0$$

i po przekształceniu:

$$b_2 \geq -{}^2/_3 \cdot 12¼ = -49/6 \approx -8{,}17$$
$$b_2 \geq -{}^6/_{20} \cdot 12¼ + {}^{11}/_{20} \cdot 8½ = 1$$
$$b_2 \leq {}^{16}/_9 \cdot 12¼ = {}^{196}/_9 = 21^7/_9$$
$$b_2 \leq 3 \cdot 12¼ = 36¾$$

Jego rozwiązanie jest następujące: $1 \leq b_2 \leq 21^7/_9$.

Współczynnik b_3

Rozwiązujemy nierówność w postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & {}^{3}/_{11} & {}^{2}/_{11} & 0 \\ 0 & {}^{20}/_{11} & {}^{6}/_{11} & -1 \\ 1 & -{}^{9}/_{11} & {}^{16}/_{11} & 0 \\ 0 & -{}^{2}/_{11} & {}^{6}/_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ b_3 \\ 8{}^{1}/_{2} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy układ nierówności:

$${}^{3}/_{11} \cdot 12 + {}^{2}/_{11} \cdot b_3 \geq 0$$
$${}^{20}/_{11} \cdot 12 + {}^{6}/_{11} \cdot b_3 - 1 \cdot 8\frac{1}{2} \geq 0$$
$$-{}^{9}/_{11} \cdot 12 + {}^{16}/_{11} \cdot b_3 \geq 0$$
$$-{}^{2}/_{11} \cdot 12 + {}^{6}/_{11} \cdot b_3 \geq 0$$

i po przekształceniu:

$$b_3 \geq -{}^{3}/_{2} \cdot 12 = -18$$
$$b_3 \geq -{}^{20}/_{6} \cdot 12 + {}^{11}/_{6} \cdot 8\frac{1}{2} = -24{}^{5}/_{12}$$
$$b_3 \geq {}^{9}/_{16} \cdot 12 = 6{}^{3}/_{4}$$
$$b_3 \geq 4$$

Jego rozwiązanie jest następujące: $b_3 \geq 6{}^{3}/_{4}$.

Współczynnik b_4

Rozwiązujemy nierówność w postaci wektorowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & {}^{3}/_{11} & {}^{2}/_{11} & 0 \\ 0 & {}^{20}/_{11} & {}^{6}/_{11} & -1 \\ 1 & -{}^{9}/_{11} & {}^{16}/_{11} & 0 \\ 0 & -{}^{2}/_{11} & {}^{6}/_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12{}^{1}/_{4} \\ b_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy układ nierówności:

$${}^{3}/_{11} \cdot 12 + {}^{2}/_{11} \cdot 12\frac{1}{4} \geq 0$$
$${}^{20}/_{11} \cdot 12 + 6/11 \cdot 12\frac{1}{4} - 1 \cdot b_4 \geq 0$$
$${}^{9}/_{11} \cdot 12 + {}^{16}/_{11} \cdot 12\frac{1}{4} \geq 0$$
$$-{}^{2}/_{11} \cdot 12 + {}^{6}/_{11} \cdot 12\frac{1}{4} \geq 0$$

W tym układzie nierówności pierwsza, trzecia i czwarta są zawsze spełnione, niezależnie od wartości b_4. Jego rozwiązanie jest następujące: $b_4 \leq 28\frac{1}{2}$, a po uwzględnieniu warunku nieujemności współczynnika b_4 otrzymujemy ostatecznie: $0 \leq b_4 \leq 28\frac{1}{2}$.

Zadanie 8A.

a) Zapisać zadanie dualne do problemu PL:

$$2x_1 + 3x_2 \dashrightarrow \max$$
$$3x_1 - x_2 \geq 0$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$1\frac{1}{2}\, x_1 + x_2 \leq 12\frac{1}{4}$$
$$-x_1 + 6x_2 \geq 8\frac{1}{2}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Rozwiązanie

Przekształcamy zadanie wyjściowe do postaci klasycznej, mnożąc pierwszy i czwarty warunek ograniczający przez (–1). Otrzymujemy zadanie prymalne, do którego możemy zapisać symetryczne zadanie dualne.

Zadanie prymalne	Zadanie dualne
$2x_1 + 3x_2$ ---> max	$12 \cdot y_2 + 12\ ¼y_3 – 8½y_4$ ---> min
$–3x_1 + x_2 \leq 0$	$–3y_1 – y_2 + 1½\ y_3 + y_4 \geq 2$
$– x_1 + 3x_2 \leq 12$	$y_1 + 3y_2 + y_3 – 6\ y_4 \geq 3$
$1½x_1 + x_2 \leq 12¼$	$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
$x_1 –6x_2 \leq – 8½$	
$x_1, x_2 \geq 0$	

b) Wiemy (z zadania 1.1A), że w rozwiązanie zadania prymalnego jest następujące: $x_1 = 4½$, $x_2 = 5½$, natomiast optymalna wartość funkcji celu zadania prymalnego jest równa 25½ . Korzystając z twierdzeń o komplementarności znaleźć rozwiązanie zadania dualnego oraz obliczyć optymalną wartość funkcji celu zadania dualnego

Rozwiązanie

W rozwiązaniu zadania prymalnego mamy $x_1 > 0$ oraz $x_2 > 0$, stąd też na podstawie twierdzeń o komplementarności warunki ograniczające zadania dualnego spełnione są jako równania, czyli:

$$–3y_1 – y_2 + 1½\ y_3 + y_4 = 2$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 – 6\ y_4 = 3$$

Podstawiając wartości składowych rozwiązania optymalnego do kolejnych warunków ograniczających zadania prymalnego, otrzymujemy:

Ograniczenie 1: $(-3) \cdot 4½ + 5½ = - 8½ < 0$

Ograniczenie 2: $- 4½ + 3 \cdot 5½ = 12$

Ograniczenie 3: $1½ \cdot 4½ + 5½ = 12¼$

Ograniczenie 4: $4½ - 6 \cdot 5½ = – 28½ < 8½$

Na podstawie twierdzeń o komplementarności wynika stąd, że zmienne y_1 oraz y_4 są równe zeru, stąd też mamy od rozwiązania układ dwóch równań o dwóch niewiadomych:

$$– y_2 + 1½\ y_3 = 2$$
$$3y_2 + \quad y_3 = 3$$

Z równania 1 wyliczamy wartość y_2:

$$y_2 = –2 + 1½y_3$$

i podstawiamy ją do równania drugiego, otrzymując:

$$3 \cdot (–2 + 1½y_3) + y_3 = 3.$$

W ten sposób obliczamy wartość y_3, która jest równa $^{18}/_{11}$.

Podstawiając obliczoną wartość do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$y_2 = -2 + 1½ \cdot {}^{18}/_{11} = {}^{5}/_{11}$$

Optymalna wartość funkcji celu zadania dualnego wynosi:

$$12 \cdot y_2 + 12\ ¼ y_3 - 8½ \cdot y_4 = 12 \cdot {}^{5}/_{11} + 12¼ \cdot {}^{18}/_{11} =$$
$${}^{120}/_{22} + {}^{441}/_{22} = {}^{561}/_{22} = 25\ ½$$

i jest oczywiście równa optymalnej

Zadanie 9A

Rozwiązać zadanie PL:

$$12\ y_2 - 17\ y_3 \dashrightarrow \min$$
$$-3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq -3$$
$$y_1 + 3y_2 - 12y_3 \geq 2$$
$$y_1, \ldots y_4 \geq 0.$$

wykorzystując metodę geometryczną.

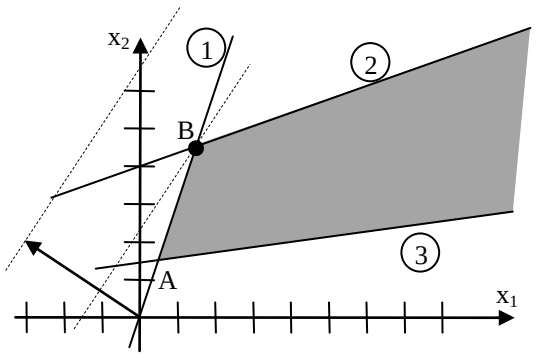
Rozwiązanie

Powyższe zadanie traktujemy jako zadanie dualne i zapisujemy zadanie prymalne do niego. Ma ono postać:

$$-3x_1 + 2x_2 \dashrightarrow \max$$
$$-3x_1 + x_2 \leq 0$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$2x_1 - 12\ x_2 \leq -17$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

W zadaniu prymalnym mamy dwie zmienne i możemy tu zastosować metodę geometryczną.

Wyznaczamy zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Został on przedstawiony na rysunku 9A.1.



Rysunek 9A.1.

Na rys. 1 znajduje się również (narysowany linią przerywaną) gradient funkcji celu i warstwica prostopadła do gradientu. Wierzchołkiem dopuszczalnym, w którym funkcja celu przyjmuje największa wartość jest B. Leży on na przecięciu prostych:

$$-3x_1 + x_2 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 = 12$$

Jego współrzędne są następujące: B(1½ ; 4½). Mamy więc rozwiązanie zadania prymalnego: $x_1 = 1½$, $x_2 = 4½$. Optymalna wartość funkcji celu zadania prymalnego wynosi

$$-3 \cdot 1½ + 2 \cdot 4½ = 4½.$$

Korzystając z twierdzeń o komplementarności znajdziemy teraz rozwiązanie zadania dualnego. Podstawiając otrzymane rozwiązanie do kolejnych warunków ograniczających zadania prymalnego stwierdzamy, że pierwsze dwa ograniczenia spełnione są jako równości, natomiast ograniczenie trzecie – jako silne nierówności. Wynika stąd, że zmienna y_3 w zadaniu dualnym jest równe zeru. Z kolei, ponieważ zmienne x_1 i x_2 są dodatnie, obydwa ograniczenia w zadaniu dualnym są równościami. W ten sposób otrzymujemy układ równań:

$$-3y_1 - y_2 = -3$$

$$y_1 + 3y_2 = 2$$

Rozwiązując ten układ dwóch równań o dwóch niewiadomych, otrzymujemy rozwiązani: $y_1 = {}^7/_8$, $y_2 = {}^3/_8$. Tak więc pełne rozwiązanie zadania wyjściowego przedstawia się następująco:

$$y_1 = {}^7/_8$$

$$y_2 = {}^3/_8$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = 0.$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa $12 \cdot {}^3/_8$, czyli 4½ .