Programowanie liniowe

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Model matematyczny**
- **Cel, środki, ograniczenia**
- **Funkcja celu – funkcja kryterium**
- **Zmienne decyzyjne**
- **Model optymalizacyjny**
- **Układ warunków ograniczających**
- **Decyzje dopuszczalne**
- **Decyzje optymalna**
- **Zadanie programowania liniowego**

Słowa kluczowe (c.d.)

- **Metoda geometryczna**
- **Metoda simpleks**
- **Zmienne bilansujące**
- **Postać bazowa**
- **Zmienne bazowe**
- **Zmienne niebazowe**
- **Kryterium optymalności**
- **Kryterium wejścia**
- **Kryterium wyjścia**
- **Zmienna sztuczna**
- **Analiza wrażliwości**

Słowa kluczowe (c.d.)

- **Zadanie prymalne**
- **Zadanie dualne**
- **Prymalna metoda simpleks**
- **Dualna metoda simpleks**
- **Parametryczne programowanie liniowe**
- **Wektor funkcji celu zależny od parametru**
- **Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru**

1.2.1. Model matematyczny (1/2)

Przykład 1.1

Zadanie programowania produkcji

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Należy zaplanować produkcję zakładu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny.

1.2.1. Model matematyczny (2/2)

Składowe modelu

Zmienne decyzyjne

x_1 - planowany rozmiar produkcji produktu P_1,

x_2 - planowany rozmiar produkcji produktu P_2.

Funkcja celu

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

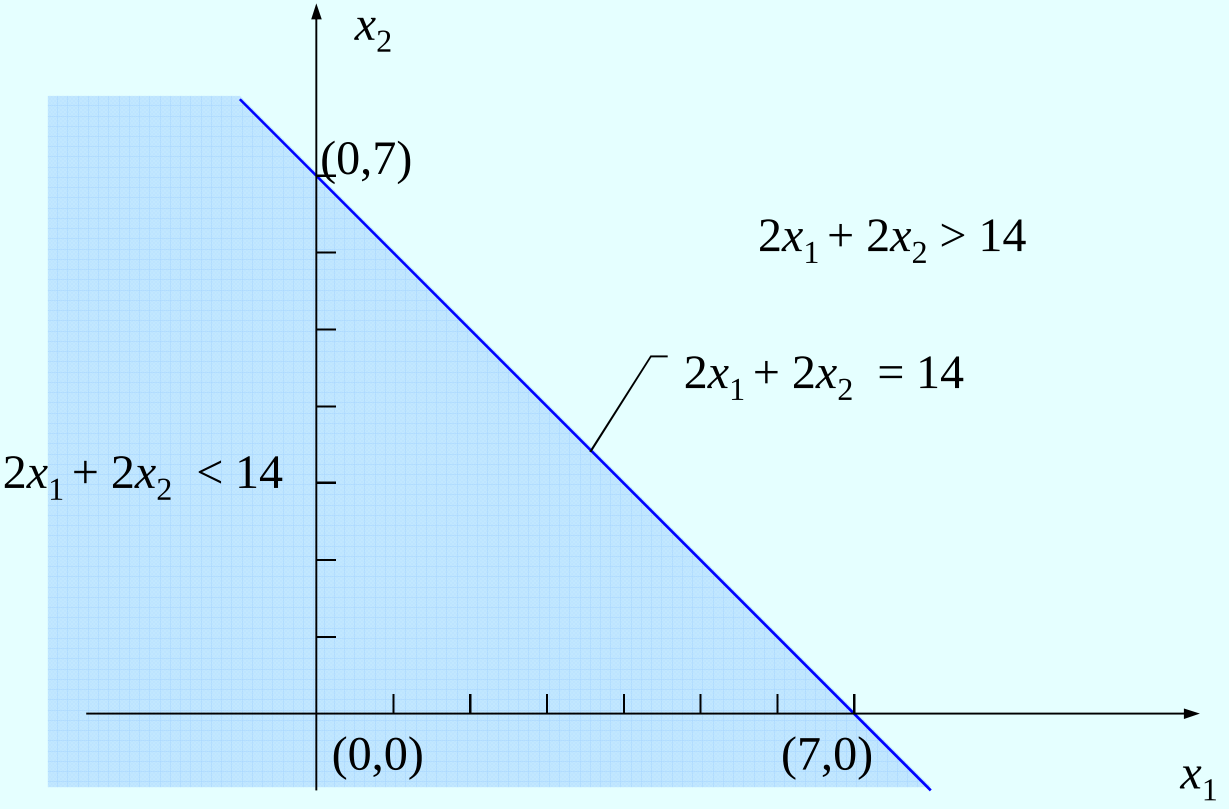
Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad &\le 16 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (1/6)

Pierwszy warunek ograniczający

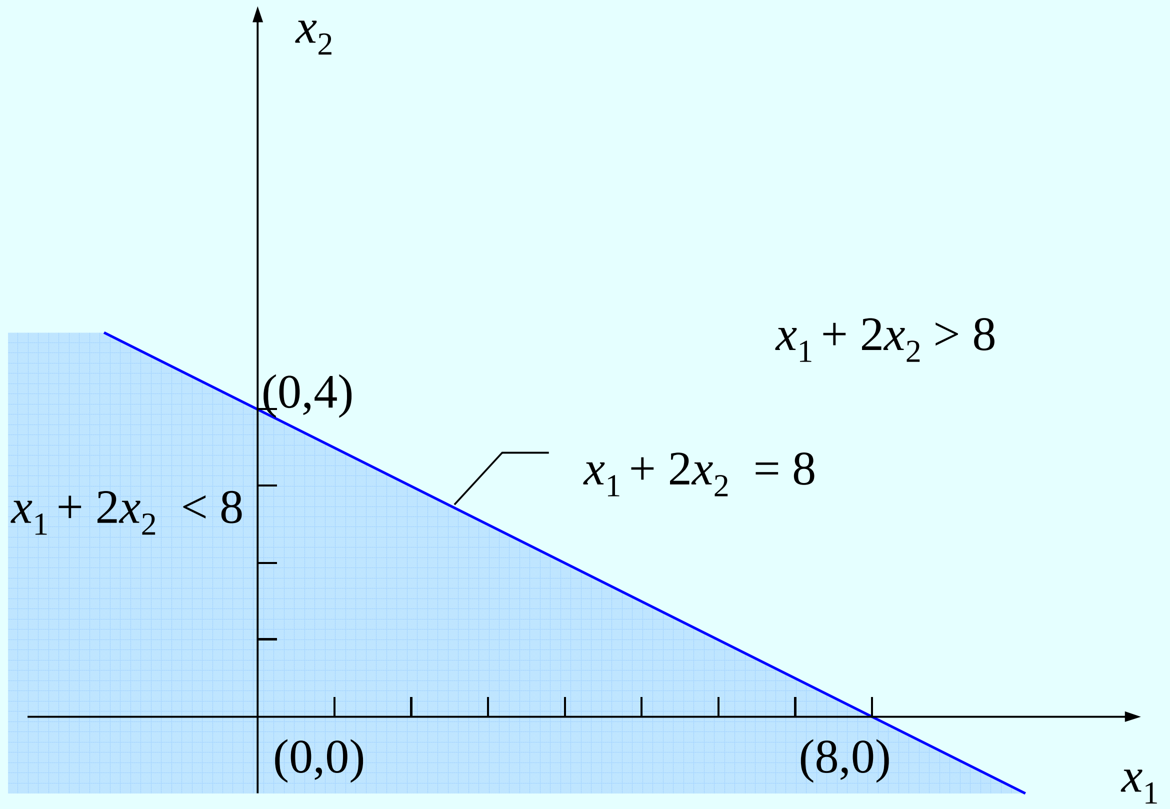
$$\mathbf{2x_1 + 2x_2 \le 14}$$



1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (2/6)

Drugi warunek ograniczający

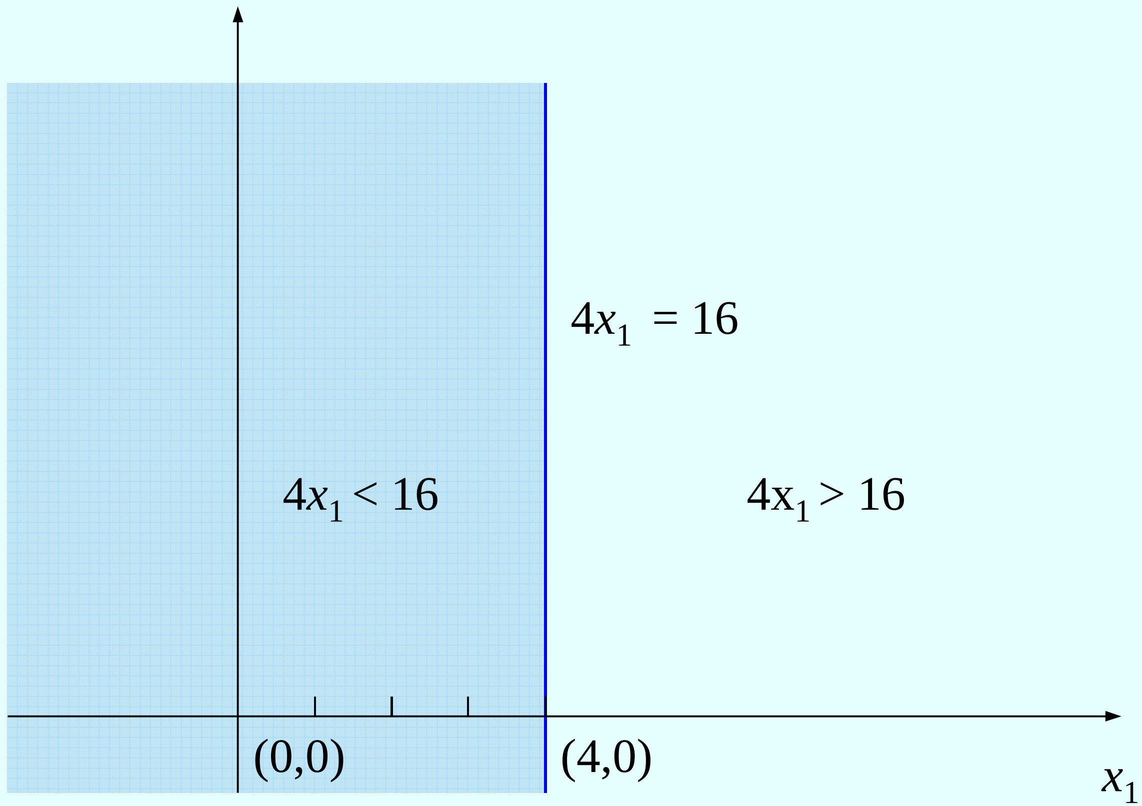
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$



1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (3/6)

Trzeci warunek ograniczający

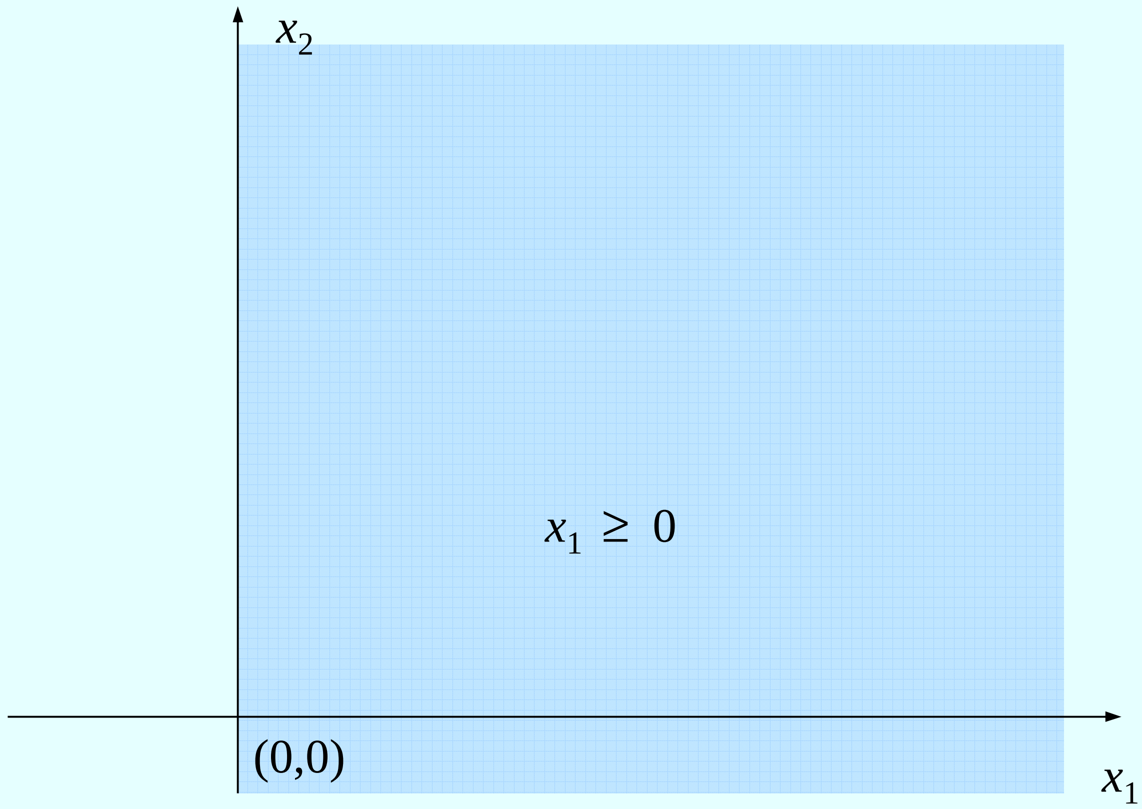
$$4x_1 \leq 16$$



1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (4/6)

Warunki nieujemności

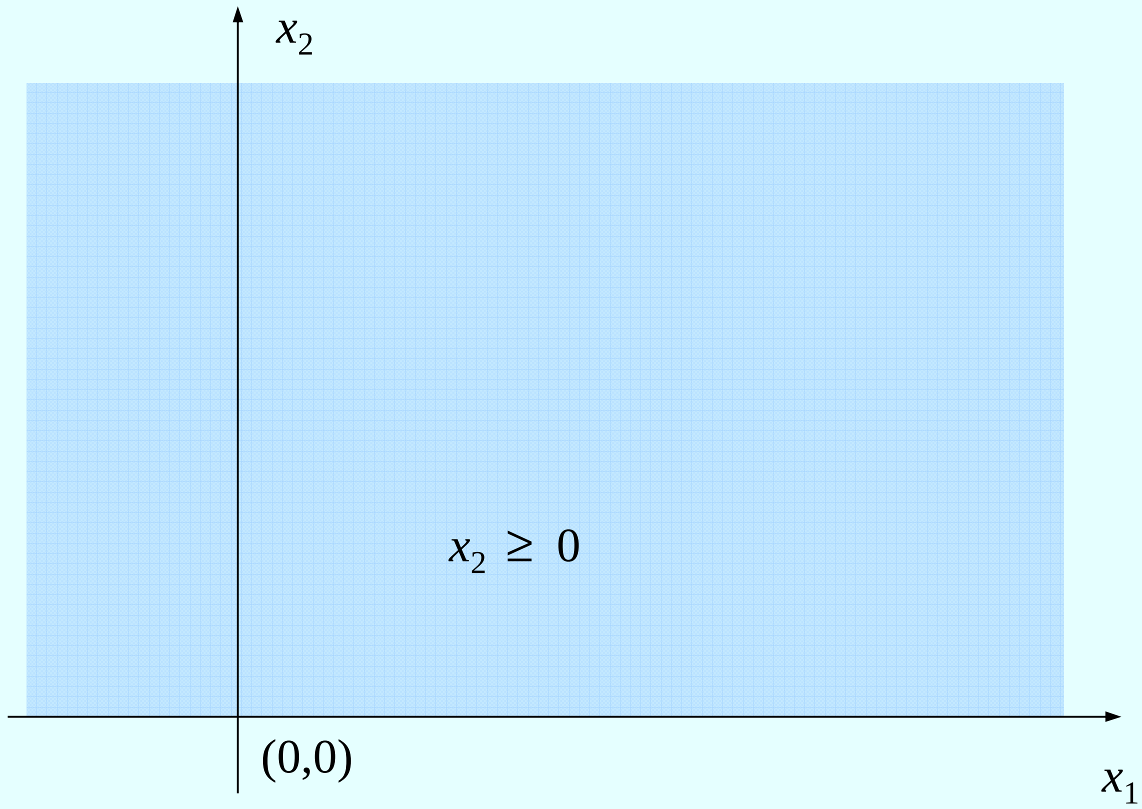
$$\boldsymbol{x_1 \geq 0}$$



1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (5/6)

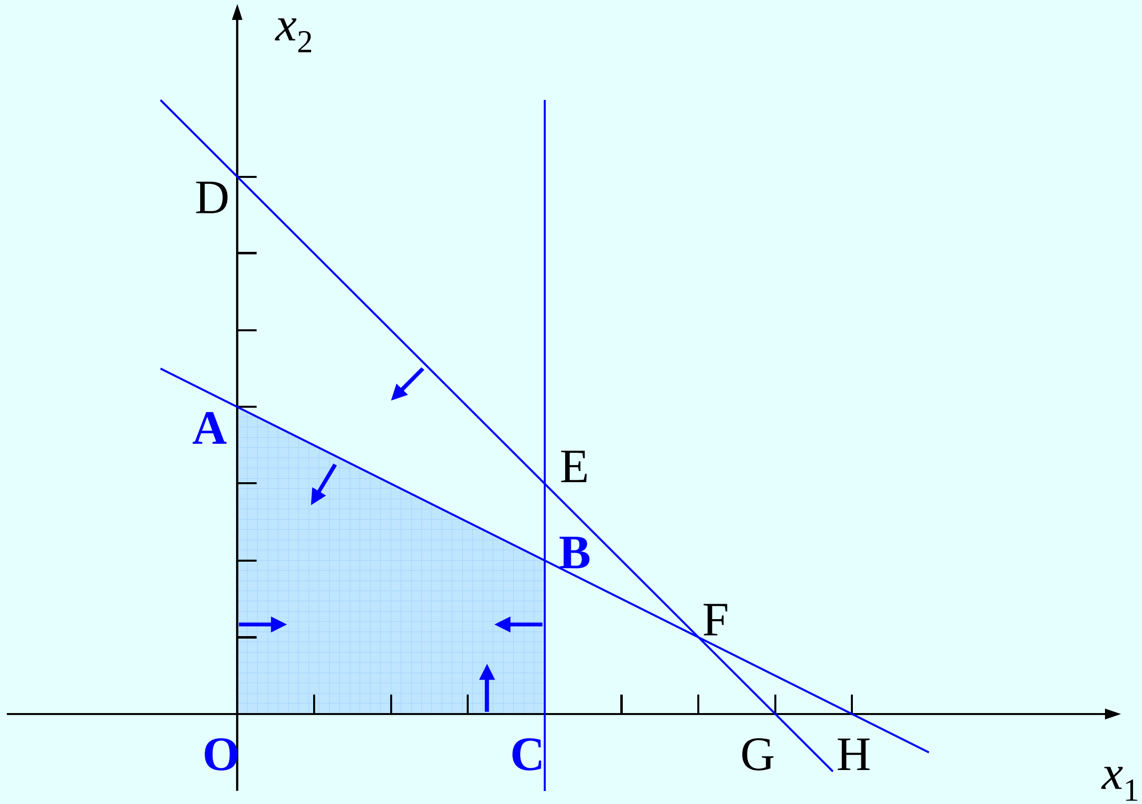
Warunki nieujemności (c.d.)

$$\boldsymbol{x_2 \geq 0}$$



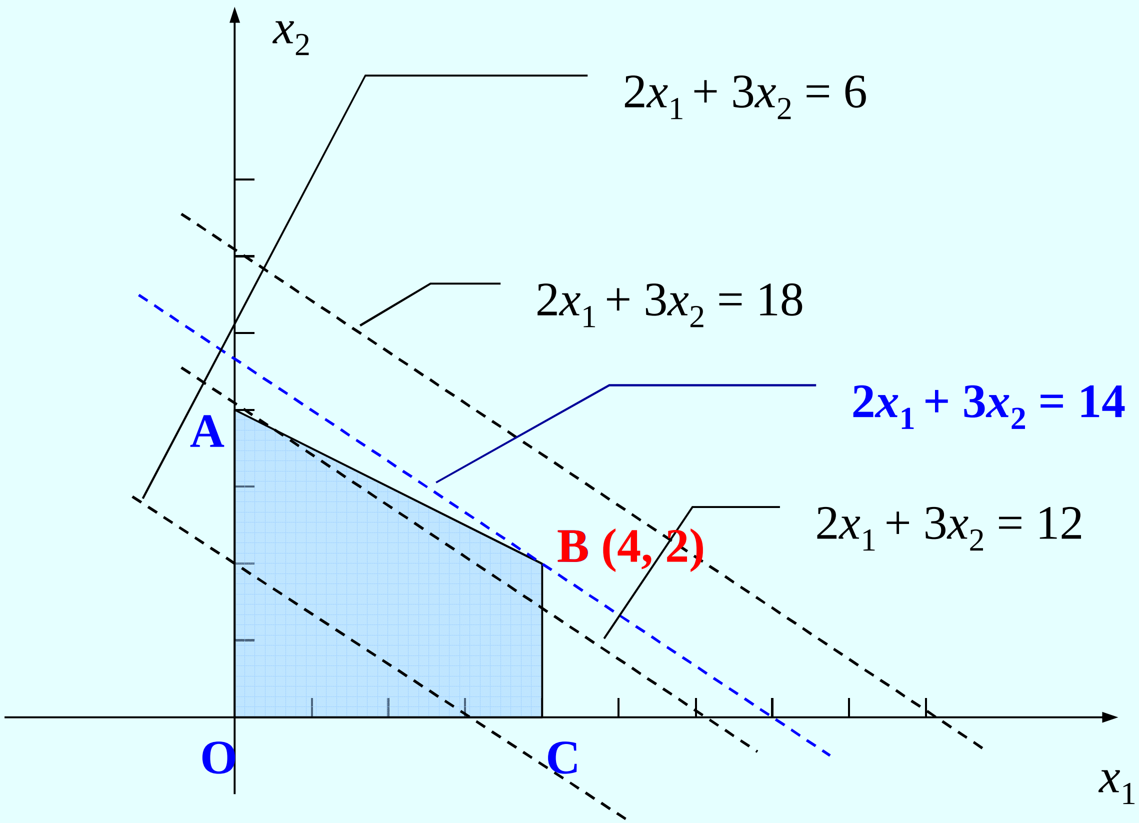
1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (6/6)

Część wspólna



1.2.3. Warstwice funkcji celu (1/1)

Rozwiązanie optymalne



Rozwiązanie optymalne:

$x_1 = 4$ planujemy wytworzenie 4 jednostek produktu P_1

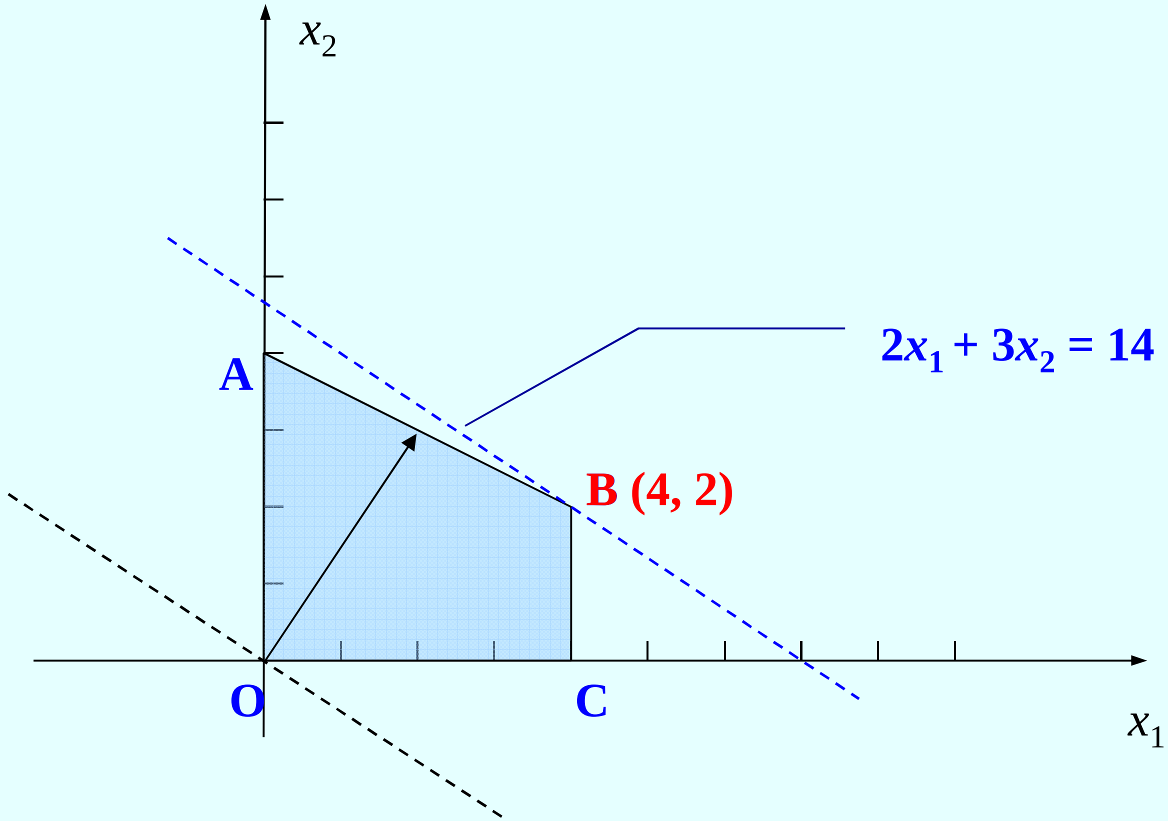
$x_2 = 2$ planujemy wytworzenie 2 jednostek produktu P_2

$f(4,2) = 14$

1.2.4. Gradient funkcji celu (1/1)

Rozwiązanie optymalne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3$$



1.3.1. Postać bazowa (1/7)

Zmienne bilansujące

Środek S_1

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_3 = 14 - 2x_1 - 2x_2 \geq 0$$

x_3 - niewykorzystana ilość środka S_1

1.3.1. Postać bazowa (2/7)

Zmienne bilansujące (c.d.)

Środek S_2

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

x_4 - niewykorzystana ilość środka S_2

1.3.1. Postać bazowa (3/7)

Zmienne bilansujące (c.d.)

Środek S_3

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_5 = 16 - 4x_1 \geq 0$$

x_5 - niewykorzystana ilość środka S_3

1.3.1. Postać bazowa (4/7)

Postać standardowa

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \to \max}$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4 + x_5} &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 8 \\
4x_1 \phantom{{}+ 2x_2 + x_3 + x_4} + x_5 &= 16
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

1.3.1. Postać bazowa (5/7)

Postać macierzowa

c - wektor funkcji celu,

A - macierz współczynników,

b - wektor warunków ograniczających,

x - wektor zmiennych.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 8 \\ 4x_1 \quad\quad\quad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

$$\boldsymbol{cx} \rightarrow \max$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

$$\boldsymbol{c} = [2\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

1.3.1. Postać bazowa (6/7)

Postać bazowa

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

x_3, x_4, x_5 - zmienne bazowe

x_1, x_2 - zmienne niebazowe

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Bazowe rozwiązanie dopuszczalne

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 16$$

1.3.1. Postać bazowa (7/7)

Tablica simpleksowa

$$\boldsymbol{cx} \rightarrow \max$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (1/7)

Jeden krok algorytmu metody simpleks

Należy:

- stwierdzić, czy rozpatrywane rozwiązanie bazowe jest optymalne, czy też nie,
- w przypadku, gdy nie jest optymalne, wyznaczyć nową bazę sąsiednią,
- przekształcić za pomocą przekształceń elementarnych macierz warunków ograniczających do postaci bazowej względem bazy sąsiedniej,
- jeżeli rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne, zakończyć postępowanie.

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (2/7)

Pierwszy warunek ograniczający

$\mathbf{x_1: 0 \rightarrow 1}$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$2 + x_3 = 14$$

stąd

$$x_3 = 12$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_3 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{11} = 2$.

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (3/7)

Drugi warunek ograniczający

$\boldsymbol{x_1}$**: 0 → 1**

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$1 + x_4 = 8$$

stąd

$$x_4 = 7$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_4 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{21} = 1$.

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (4/7)

Trzeci warunek ograniczający

$\mathbf{x_1: 0 \rightarrow 1}$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$4 + x_5 = 16$$

stąd

$$x_5 = 12$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_5 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{31} = 4$.

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (5/7)

Zmiany wartości funkcji celu

Wzrost wartości funkcji celu

$$c_1 = 2$$

Spadek wartości funkcji celu związany z obniżeniem dotychczasowych wartości przez zmienne bazowe

zmienna x_3: $c_3 \cdot a_{11} = 0 \cdot 2 = 0$

zmienna x_4: $c_4 \cdot a_{21} = 0 \cdot 1 = 0$

zmienna x_5: $c_5 \cdot a_{31} = 0 \cdot 4 = 0$

czyli $z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$

Zmiana netto:

$$c_1 - z_1 = 2 - 0 = 2$$

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (6/7)

Wskaźniki optymalności

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

1.3.2. Badanie optymalności rozwiązania (7/7)

Kryterium optymalności

Jeżeli w zadaniu maksymalizacji wartości wszystkich wskaźników optymalności są niedodatnie, wtedy rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne.

Jeżeli choć jeden ze wskaźników optymalności jest dodatni, wtedy istnieje możliwość poprawy tego rozwiązania.

1.3.3. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy (1/1)

Kryterium wejścia

Wybieramy największą wartość wskaźnika optymalności. Odpowiadającą mu zmienną wprowadzamy do nowej bazy.

Jeżeli największej wartości wskaźnika optymalności odpowiada więcej niż jedna zmienna, do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najniższym numerze.

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (1/5)

Pierwszy warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$2x_2 + x_3 = 14$$

Kiedy zmienna x_3 przyjmuje wartość 0?

$$2x_2 = 14, \text{ czyli } x_2 = 7 \quad (b_1 : a_{21} = 7)$$

Największa dopuszczalna wartość zmiennej x_2 dla pierwszego warunku ograniczającego jest równa 7.

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (2/5)

Drugi warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$2x_2 + x_4 = 8$$

Kiedy zmienna x_4 przyjmuje wartość 0?

$$2x_2 = 8, \text{ czyli } x_2 = 4 \qquad (b_2 : a_{22} = 4)$$

Największa dopuszczalna wartość zmiennej x_2 dla drugiego warunku ograniczającego jest równa 4.

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (3/5)

Trzeci warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$4x_1 + 0x_2 + x_5 = 16$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$0x_2 + x_5 = 16$$

Kiedy zmienna x_5 przyjmuje wartość 0?

Ponieważ współczynnik przy x_2 jest równy 0 zmiennej x_5 nie można wyprowadzić z bazy przez wprowadzenie do bazy zmiennej x_2.

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (4/5)

Kryterium wyjścia

Obliczamy ilorazy kolejnych wyrazów wolnych przez odpowiadające im elementy kolumny wchodzącej do bazy dla tych elementów kolumny wprowadzanej do bazy, które są dodatnie.

Bazę opuszcza zmienna, dla której odpowiadający iloraz jest najmniejszy.

Jeżeli minimum jest przyjmowane więcej niż jeden raz, wtedy jako zmienną opuszczającą bazę wybieramy zmienną o najniższym numerze.

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (5/5)

Zastosowanie kryterium wyjścia

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	2	2	1	0	0	14	7
x_4	0	1	2	0	1	0	8	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16	-
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0	

Z bazy usuwamy zmienną x_4

1.3.5. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (1/2)

Przekształcenia elementarne

1. Podzielenie obydwu stron dowolnie wybranego warunku ograniczającego przez dowolną liczbę różną od zera.

2. Dodanie stronami do dowolnie wybranego warunku ograniczającego pomnożonego przez dowolną liczbę różną od zera innego warunku pomnożonego przez dowolną liczbę różną od zera.

Przekształcenia elementarne stosujemy dla warunków ograniczających w postaci równości.

1.3.5. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (2/2)

Tablice simpleksowe

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	–1	0	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$							12

1.3.6. Kolejne iteracje (1/2)

Iteracja 2

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	–1	0	6	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0,5	0	0	–1,5	0	12	

1.3.6. Kolejne iteracje (2/2)

Iteracja 3

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

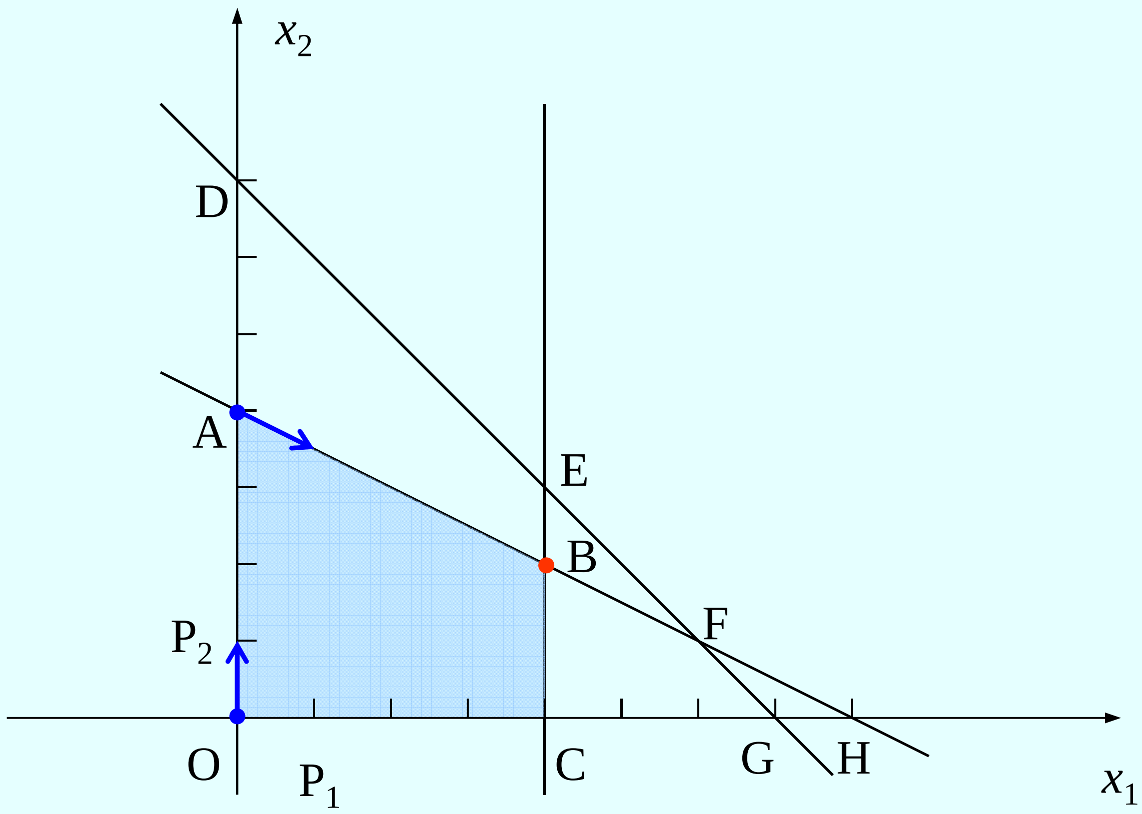
Ponieważ wszystkie wskaźniki optymalności są niedodatnie, zgodnie z kryterium optymalności rozwiązanie:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0$$

jest optymalne.

1.3.7. Interpretacja geometryczna (1/1)

Kolejne iteracje



1.3.8. Macierz odwrotna do postaci bazowej (1/2)

Tablice simpleksowe w pierwszej i drugiej iteracji

$$\mathbf{x_B = A_B^{-1} \cdot b}$$

Pierwsza iteracja

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	2	1	0	0	14
x_4	1	2	0	1	0	8
x_5	4	0	0	0	1	16

Druga iteracja

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	1	0	1	-1	0	6
x_2	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	4	0	0	0	1	16

1.3.8. Macierz odwrotna do postaci bazowej (2/2)

Rozwiązanie bazowe w drugiej iteracji

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_B A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (1/5)

Przykład 1.2

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji łączny rozmiar produkcji ma być nie mniejszy niż 3 jednostki

Model matematyczny:

Funkcja celu

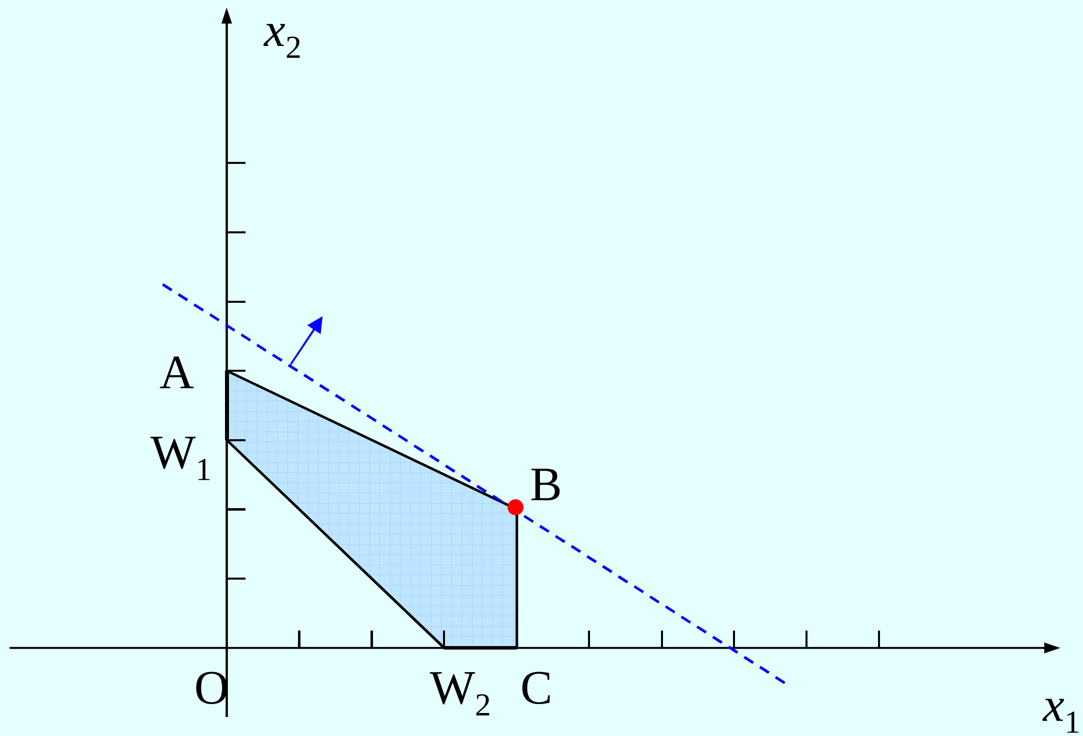
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + \quad x_2 &\ge 3 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (2/5)

Metoda geometryczna



1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (3/5)

Zmienne bilansujące

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 8 \\
4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 16 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\quad - x_6 &= 3
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0,$$

Rozwiązanie bazowe:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 14$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$, $x_6 = -3$

1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (4/5)

Zmienna sztuczna

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \to \max$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\
4x_1 + x_5 &= 16 \\
x_1 + x_2 - x_6 + x_7 &= 3
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0,$$

1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (5/5)

Tablice simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	–300	1	1	0	0	0	–1	1	3
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	–300	0	– 900

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0,5	0,125	1	–1	3
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	0	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	0	–303	14

1.4.1. Zadanie sprzeczne (1/4)

Przykład 1.3

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1. zadaniu programowania produkcji łączny rozmiar produkcji ma być nie mniejszy niż 8 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

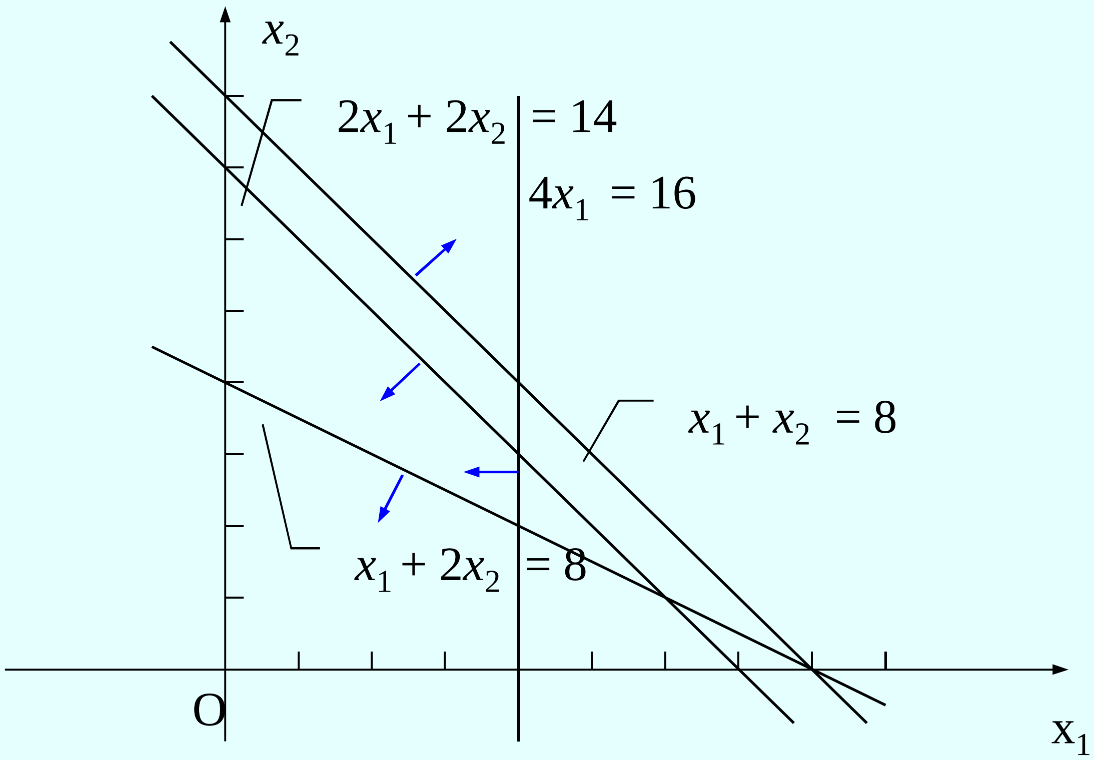
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + \ \ x_2 &\ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

1.4.1. Zadanie sprzeczne (2/4)

Metoda geometryczna



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty

1.4.1. Zadanie sprzeczne (3/4)

Pierwsza dopuszczalna postać bazowa

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \rightarrow max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 8 \\
4x_1 \quad + x_5 \quad &= 16 \\
x_1 + x_2 \quad - x_6 + x_7 &= 8
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

1.4.1. Zadanie sprzeczne (4/4)

Tablice simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	– 300	1	1	0	0	0	–1	1	8
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	–300	0	–2400

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	– 0,25	0	0	2
x_2	3	0	1	0	0,5	0,125	0	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	–300	0	0	0	– 0,5	–0,125	–1	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–151,5	–37,625	–300	0	–586

1.4.2. Alternatywne rozwiązania optymalne (1/4)

Przykład 1.4

W rozpatrywanym przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk jednostkowy dla produktu P_2 zwiększa się z 3 do 4 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

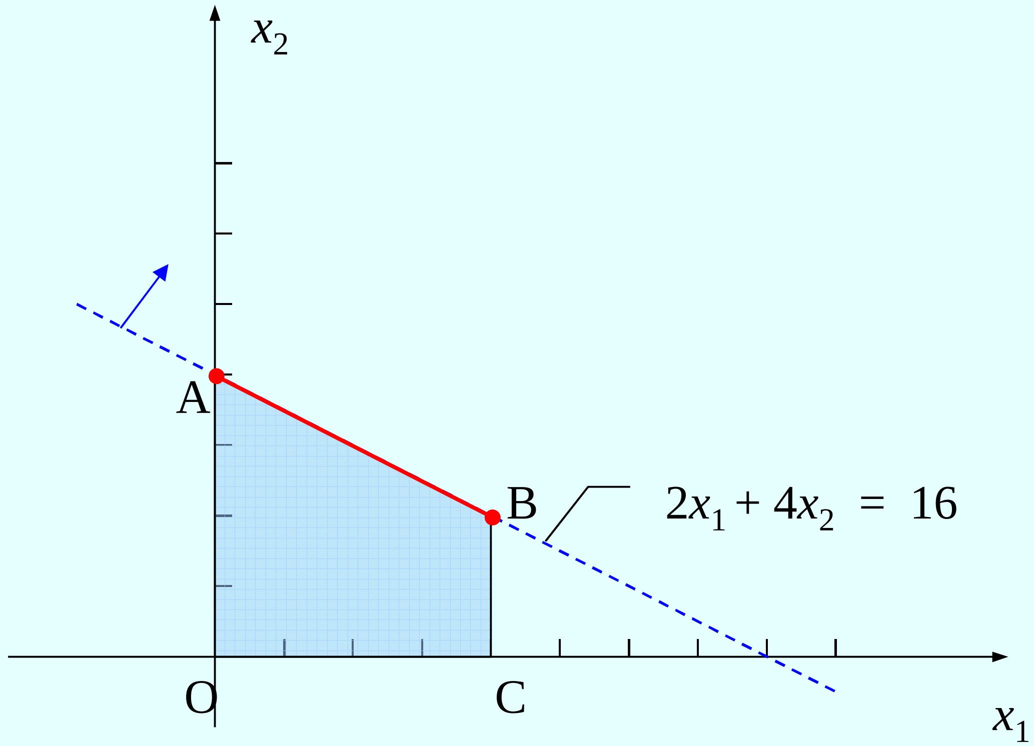
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.4.2. Alternatywne rozwiązania optymalne (2/4)

Metoda geometryczna



1.4.2. Alternatywne rozwiązania optymalne (3/4)

Pierwsza dopuszczalna postać bazowa

Funkcja celu:

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ 4x_1 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Pierwsza tablica simpleksowa:

$cx \rightarrow max$		2	4	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c - z$		2	4	0	0	0	0

1.4.2. Alternatywne rozwiązania optymalne (4/4)

Tablice simpleksowe

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	4	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	–1	0	6	6
x_2	4	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–2	0	16	

Rozwiązanie alternatywne

$cx \to max$		2	4	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	4	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–2	0	16

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (1/10)

Przykład 1.5

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji występują jedynie ograniczenia dotyczące środka S_3. Całkowity rozmiar produkcji nie może być mniejszy niż 3 jednostki.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

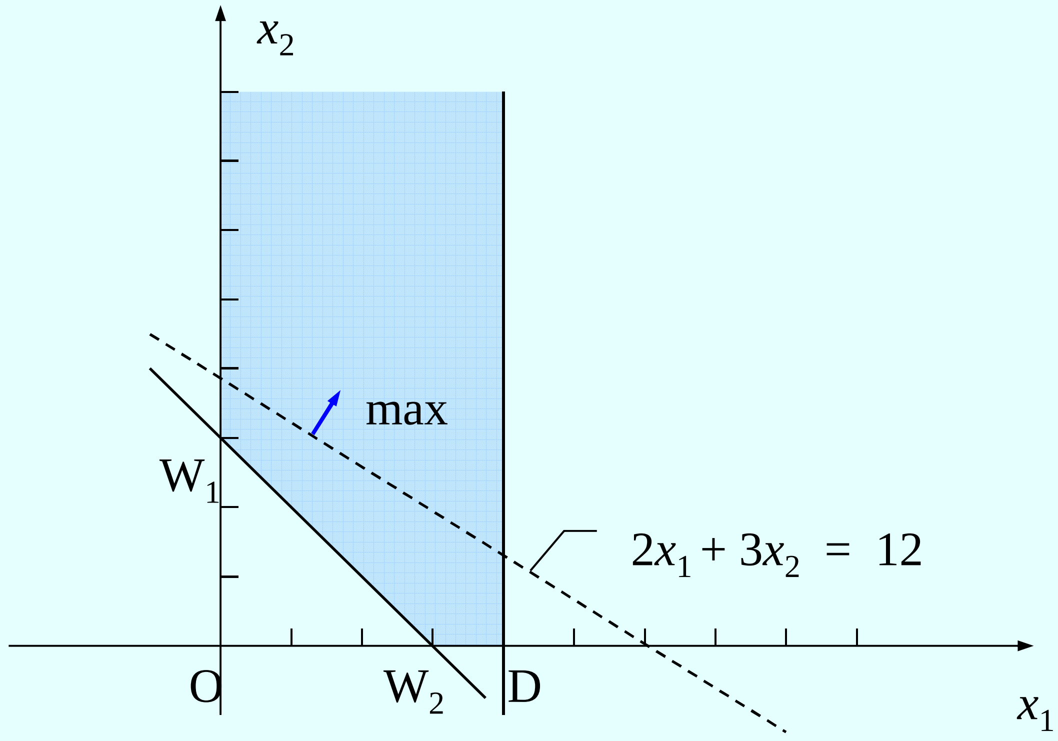
$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (2/10)

Metoda geometryczna



1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (3/10)

Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad\quad\quad + x_3 \quad\quad &= 16 \\ x_1 + x_2 \quad\quad\quad - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

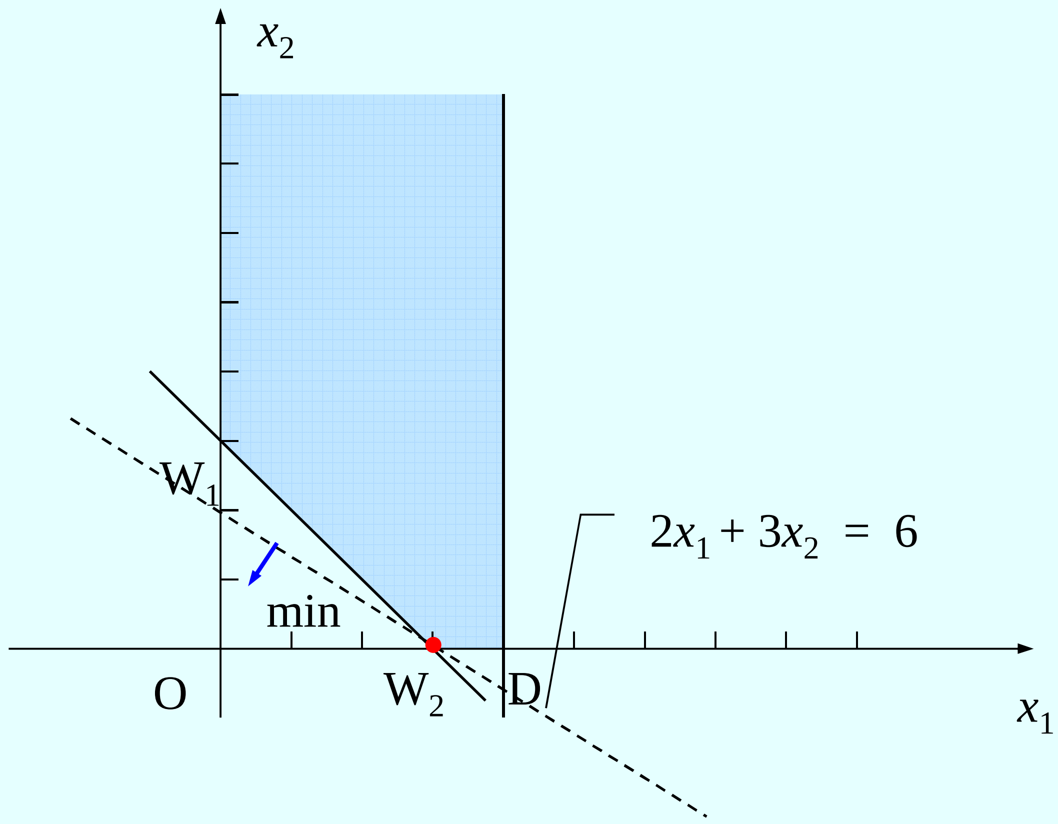
1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (4/10)

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	– 1	3
$c - z$		– 1	0	0	3	9

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (5/10)

Zadanie minimalizacji



1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (6/10)

Przykład 1.6

Zużycie środka S_3 nie może przekraczać 16 jednostek, łączna wielkość produkcji nie może być mniejsza od 3 jednostek. Koszty jednostkowe, związane z wytwarzanie zarówno produktu P_1, jak i P_2 wynoszą 2.

Znaleźć plan produkcji, minimalizujący koszty.

$$2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

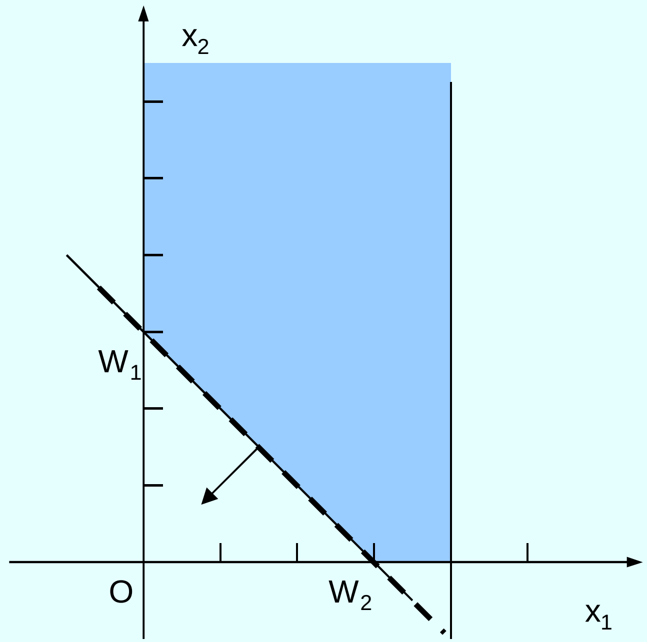
$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0$$

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (7/10)

Metoda geometryczna



W_1 i W_2 - Alternatywne bazowe rozwiązania optymalne

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (8/10)

Postać bazowa i tablica simpleksowa

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\rightarrow \min \\ 4x_1 \qquad + x_3 \qquad &\leq 16 \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 &\geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$cx \rightarrow max$		2	2	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	4	0	1	0	16
x_2	2	1	1	0	– 1	3
$c - z$		0	0	0	2	6

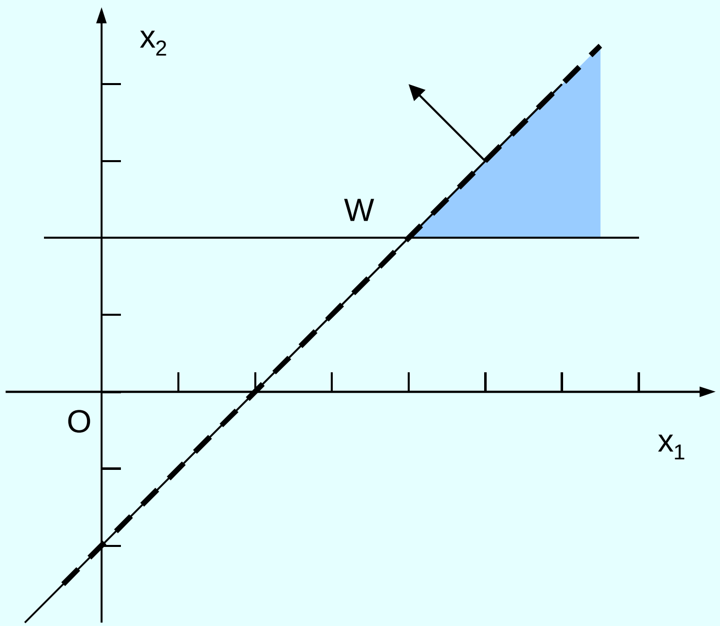
W_1 (wiersze x_3, x_2)

Wprowadzając do bazy x_1 otrzymamy W_2

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (9/10)

Przykład 1.7

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\to \max \\
x_1 - x_2 &\geq 2 \\
x_2 &\geq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



Nieograniczona krawędź optymalna

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (10/10)

Postać bazowa i tablica simpleksowa

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \quad &= 2 \\ x_2 \quad - x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dodając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 \quad - x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$cx \to max$		1	– 1	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	0	– 1	– 1	4
x_2	– 1	0	1	0	– 1	2
$c - z$		0	0	1	0	2

1.4.4. Reguły postępowania w metodzie simpleks (1/1)

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego.
2. Ocena optymalności rozwiązania.
3. Badanie niesprzeczności zadania.
4. Identyfikacja rozwiązań alternatywnych.
5. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy.
6. Badanie nieograniczoności funkcji celu i istnienia krawędzi sprawnej.
7. Wybór zmiennej usuwanej z bazy.
8. Sprowadzenie warunków ograniczających do postaci bazowej względem nowej bazy.

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (1/4)

Przykład 1.8

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk z wytworzenia jednostki P_1 wynosi c_1.

Model matematyczny:

Funkcja celu:

$$c_1 x_1 + 3x_2 \to \max$$

Warunki ograniczające:

$$2x_1 + 2x_2 \le 14$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \le 16$$

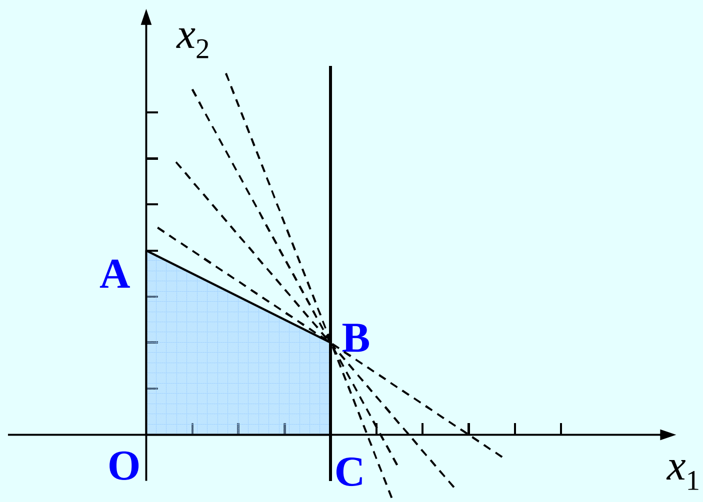
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (2/4)

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		c_1	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	–1,5	$-0{,}25c_1 + 0{,}375$	$4c_1+6$

$$-0{,}25c_1 + 0{,}375 \le 0 \quad \text{czyli} \quad c_1 \ge 1{,}5$$



1.5.1. Współczynniki funkcji celu (3/4)

Przykład 1.9

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk z wytworzenia jednostki P_2 wynosi c_2.

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	c_2	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0{,}5c_2$	$0{,}125c_2 - 0{,}5$	$8 + 3c_2$

$$-0{,}5c_2 \le 0 \qquad \text{i} \qquad 0{,}125c_2 - 0{,}5 \le 0$$

$$c_2 \in [0,\ 4]$$

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (4/4)

Przykład 1.10

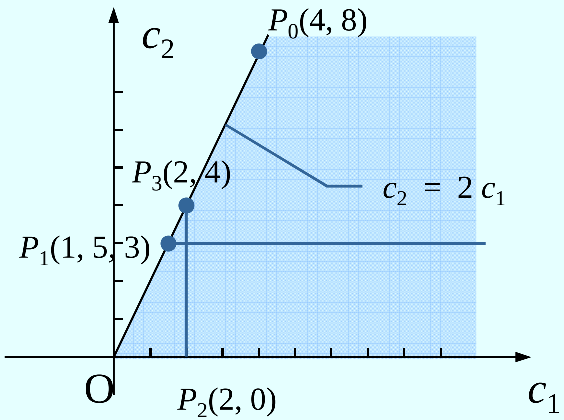
Łączna analiza wrażliwości dla produktów P_1 i P_2.

$cx \rightarrow max$		c_1	c_2	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0{,}5c_2$	$0{,}125c_2 - 0{,}25c_1$	$8 + 3c_2$

$$-0{,}5c_2 \leq 0$$

$$0{,}125c_2 - 0{,}25c_1 \leq 0$$

$$c_2 \geq 0, \text{ i } c_2 \geq 2c_1$$



1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (1/4)

Przykład 1.11

Po znalezieniu rozwiązania optymalnego zadania z przykładu 1.1 okazało się, że dostępna ilość jednego ze środków uległa zmianie.
W jakim przedziale powinna się znajdować ta wartość, by znaleziona uprzednio baza optymalna generowała rozwiązanie dopuszczalne?

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (2/4)

Środek S1

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$x_B = A_B^{-1}\,\overline{b} \geq 0$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A_B^{-1}\,\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 - 8 - 4 \geq 0, \text{ czyli } b_1 \geq 12.$$

Wymagana ilość środka S1 jest z przedziału $[12, \infty)$

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (3/4)

Środek S2

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \qquad x_B = A_B^{-1}\,\bar{b} \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ b_2 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1}\,\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ b_2 \\ 16 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd

$$14 - b_2 - 4 \geq 0, \text{ czyli } b_2 \leq 10$$
$$0{,}5b_2 - 2 \geq 0, \text{ czyli } b_2 \geq 4$$

$$4 \leq b_2 \leq 10.$$

Wymagana ilość środka S2 jest z przedziału [4, 10].

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (4/4)

Środek S3

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \qquad x_B = A_B^{-1}\,\overline{b} \geq 0$$

$$\overline{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1}\,\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd

$$14 - 8 - 0{,}25 b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \leq 24$$

$$4 - 0{,}125 b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \leq 32$$

$$0{,}25 b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \geq 0$$

$$0 \leq b_3 \leq 24$$

Wymagana ilość środka S3 jest z przedziału [0, 24].

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (1/10)

Przykład 1.12

Środki produkcji	**Produkty**		**Zasoby**
	P_1	**P_2**	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Zminimalizować wartość posiadanych zasobów środków, przy czym wartość środków potrzebnych na wytworzenie jednostki każdego z produktów jest nie mniejsza od zysku jednostkowego dla tego produktu.

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (2/10)

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

y_1 - cena środka S_1
y_2 - cena środka S_2
y_3 - cena środka S_3

Funkcja celu

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (3/10)

Związki między zadaniem prymalnym i dualnym

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \qquad &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = [2, 3] \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{cx} &\rightarrow \max \\ \boldsymbol{Ax} &\le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{yb} &\rightarrow \min \\ \boldsymbol{yA} &\ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (4/10)

Związki między zadaniem prymalnym i dualnym (c.d.)

1. Każdemu warunkowi ograniczającemu jednego z problemów odpowiada zmienna decyzyjna drugiego. Zmienną tę nazwiemy **zmienną komplementarną** do danego warunku ograniczającego.
2. Każdej nieujemnej zmiennej decyzyjnej jednego z problemów odpowiada warunek ograniczający drugiego. Warunek ten nazwiemy **warunkiem komplementarnym** do danej zmiennej decyzyjnej.
3. **Wektor współczynników funkcji celu** w jednym zadaniu staje się **wektorem wyrazów wolnych** w drugim i odwrotnie, wektor wyrazów wolnych w jednym zadaniu jest wektorem współczynników funkcji celu w drugim z nich.
4. **Kierunki optymalizacji** dla zadań: prymalnego i dualnego są przeciwne. O ile zadanie prymalne jest zadaniem maksymalizacji, to w zadaniu dualnym funkcję celu minimalizujemy.
5. **Zwroty nierówności** w warunkach ograniczających zadania prymalnego są przeciwne do zwrotów nierówności warunków ograniczających zadania dualnego.

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (5/10)

Twierdzenia o dualności

Twierdzenie 1

Jeżeli $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ są dowolnymi rozwiązaniami dopuszczalnymi odpowiednio zadania prymalnego i dualnego, to wartości funkcji celu w tych zadaniach spełniają związek:

$$\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{yb}$$

Twierdzenie 2 (*o komplementarności*)

Jeżeli $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ są rozwiązaniami optymalnymi odpowiednio zadania prymalnego i dualnego, wówczas zachodzą związki:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}) = 0$$
$$(\boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c})\boldsymbol{x} = 0$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (6/10)

Twierdzenia o dualności (c.d.)

Twierdzenie 3

Dla rozwiązań optymalnych x, y odpowiednio zadania prymalnego i dualnego zachodzi związek:

$$cx = yb$$

Twierdzenie 4

Optymalne rozwiązanie zadania dualnego otrzymujemy ze wzoru:

$$y = c_B A_B^{-1}$$

gdzie

A_B^{-1} - macierz odwrotna do macierzy bazowej A_B dla rozwiązania optymalnego zadania prymalnego,

c_B - wektor współczynników funkcji celu zadania prymalnego stojących przy zmiennych bazowych w bazie A_B .

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (7/10)

Zastosowanie twierdzenia o komplementarności

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = [y_1, y_2, y_3]\left(\begin{bmatrix}14\\8\\16\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 2\\4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix}14 & -2x_1 & -2x_2\\8 & -\ x_1 & -2x_2\\16 & -4x_1 & \end{bmatrix} =$$

$$= y_1(14-2x_1-2x_2)+y_2(8-x_1-2x_2)+y_3(16-4x_1)=0$$

$$y_1\,(14-2x_1-2x_2)=0$$
$$y_2\,(\ 8-\ x_1-2x_2)=0$$
$$y_3\,(16-4x_1\qquad)=0$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (8/10)

Zastosowanie twierdzenia o komplementarności (c.d.)

$$(\mathbf{yA} - \mathbf{c})\mathbf{x} = \left([y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - [2 \quad 3] \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= [2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2 \quad 2y_1 + 2y_2 - 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 + (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0$$

$$(2y_1 + \quad y_2 - 4y_3 - 2)x_1 = 0$$

$$(2y_1 + 2y_2 \qquad - 3)x_2 = 0$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (9/10)

Przykład 1.13

Dane jest rozwiązanie optymalne zadania prymalnego x_1=4, x_2=2. Znaleźć rozwiązanie optymalne zadania dualnego.

Warunki ograniczające zadania prymalnego

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 &< 14 \;\Rightarrow y_1 = 0 \\
1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 &= 8 \\
4 \cdot 4 &= 16
\end{aligned}
$$

Warunki ograniczające zadania dualnego

$$
\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + 4y_3 &= 2 \\
2y_1 + 2y_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 + 4y_3 &= 2 \\
2y_2 &= 3
\end{aligned}
$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = 1.5,\ y_3 = 0.125$$

1.6.1. Zadanie dualne i jego własności (10/10)

Przykład 1.14

Zadanie prymalne

$$
\begin{array}{l}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max \\
\quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\
\quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 18 \\
-2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 - \text{dowolne}
\end{array}
$$

Zadanie dualne

$$
\begin{array}{l}
15y_1 + 18y_2 + 5y_3 \to \min \\
\quad 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 3 \\
-2y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 2 \\
\quad 3y_1 + 3y_2 + y_3 = 4 \\
y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 - \text{dowolne}
\end{array}
$$

Przykład 1.15

Zaistniały możliwości zwiększenia dostępności jednego ze środków produkcji: S_1, S_2 lub S_3. Która z nich jest najkorzystniejsza przy założeniu, że będziemy wytwarzać zarówno produkt P_1, jak i P_2?

Dla rozwiązania bazowego o zmiennych bazowych x_1, x_2 i $x_3$zwiększenie limitu środka S_1 nie wpływa na wielkość zysku.

Maksymalne możliwe, wynikające z analizy wrażliwości zwiększenie limitu środka S_2 lub S_3 pozwoli na zwiększenie zysku odpowiednio o 3 jednostki lub 1 jednostkę.

Korzystniejsze jest zwiększenie limitu środka S_2 do poziomu 10 jednostek.

Przykład 1.16

Mamy $c_2 = 4$. Zaistniała ponownie możliwość zwiększenia dostępności jednego ze środków produkcji S_1, S_2 lub S_3. Którą z nich wybrać, jeżeli chcemy wytwarzać zarówno produkt P_1, jak i P_2?

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jedynie zwiększenie limitu środka S_2 pozwala na zwiększenie zysku. Maksymalne zwiększenie wykorzystania środka S_2 pozwala na uzyskanie zysku na poziomie 16 + 4 = 20 jednostek.

Przykład 1.17

$$
\begin{aligned}
14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\to \min \\
2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\
2y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\to \min \\
2y_1 + y_2 + 4y_3 - y_4 &= 2 \\
2y_1 + 2y_2 - y_5 &= 3 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\to \min \\
-2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_4 &= -2 \\
-2y_1 - 2y_2 + y_5 &= -3 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Baza	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–2	–1	–4	1	0	–2
y_5	0	–2	–2	0	0	1	–3
$c - z$		14	8	16	0	0	0

1.7.1. Przebieg obliczeń (1/8)

Kryterium dopuszczalności

Jeżeli wartości wszystkich wyrazów wolnych są nieujemne, wtedy rozpatrywane rozwiązanie jest dopuszczalne.

1.7.1. Przebieg obliczeń (2/8)

Kryterium wyjścia

Ze wszystkich wyrazów wolnych wybieramy najmniejszy. Odpowiadająca mu zmienna jest zmienną opuszczającą bazę.

Jeżeli jest więcej niż jedna najmniejsza wartość, wtedy wybieramy zmienną o najniższym numerze.

1.7.1. Przebieg obliczeń (3/8)

Kryterium wejścia

Obliczamy ilorazy wartości wskaźników optymalności przez odpowiadające im elementy wiersza dla zmiennej opuszczającej bazę $((c_j - z_j) : a_{ij})$ dla tych elementów rozpatrywanego wiersza, które są ujemne.

Do bazy wchodzi ta zmienna, dla której wartość bezwzględna odpowiadającego jej ilorazu jest najmniejsza.

Jeżeli jest więcej niż jedna najmniejsza wartość tego ilorazu, wtedy wybieramy zmienną o najniższym numerze.

1.7.1. Przebieg obliczeń (4/8)

Iteracja 1

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Baza	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–2	–1	–4	1	0	–2
y_5	0	–2	–2	0	0	1	–3
$c - z$		14	8	16	0	0	

Kryterium wyjścia y_5

Kryterium wejścia

dla zmiennej y_1 $|14 : (-2)| = 7$

dla zmiennej y_2 $|8 : (-2)| = 4$ ⟵ **min**

1.7.1. Przebieg obliczeń (5/8)

Iteracja 2

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Baza	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–1	0	–4	1	–0,5	–0,5
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c - z$		6	0	16	0	4	12

Kryterium wyjścia y_4

Kryterium wejścia

dla zmiennej y_1 $|6 : (–1)| = 6$

dla zmiennej y_3 $|16 : (–4)| = 4$ ← **min**

dla zmiennej y_5 $|4 : (–0,5)| = 8$

1.7.1. Przebieg obliczeń (6/8)

Iteracja 3

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Baza	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	16	0	0	1	–0,25	0,125	0,125
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c - z$		2	0	0	4	2	14

Rozwiązanie optymalne

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1{,}5 \quad y_3 = 0{,}125 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0$$

1.7.1. Przebieg obliczeń (7/8)

Zmienne komplementarne

ZP - zadanie prymalne

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ZD - zadanie dualne

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} -2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_4 \qquad &= -2 \\ -2y_1 - 2y_2 \qquad\qquad + y_5 &= -3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Pary zmiennych komplementarnych	
x_1	y_4
x_2	y_5
y_1	x_3
y_2	x_4
y_3	x_5

1.7.1. Przebieg obliczeń (8/8)

Zmienne komplementarne (c.d.)

Zadanie prymalne

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

Zadanie dualne

$cx \rightarrow min$		14	8	16	0	0	b
Baza	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	16	0	0	1	–0,25	0,125	0,125
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c_j - z_j$		2	0	0	4	2	14

1.7.2. Pierwsza optymalna postać bazowa (1/5)

Przykład 1.18

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&2x_1 + 2x_2 \le 14 \\
&x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&4x_1 \le 16 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
&4x_1 + x_5 = 16 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

Sztuczne ograniczenie

$$x_1 + x_2 \le 1600 \qquad\qquad x_1 + x_2 + x_6 = 1600$$

1.7.2. Pierwsza optymalna postać bazowa (2/5)

Sztuczne ograniczenie

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_6	0	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0	0

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	–3	4800

1.7.2. Pierwsza optymalna postać bazowa (3/5)

Iteracja 1

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	–3	4800

Kryterium wyjścia x_4

Kryterium wejścia

dla zmiennej x_1 $|(-1):(-1)| = 1$ ← **min**

dla zmiennej x_6 $|(-3):(-2)| = {}^3/_2$

1.7.2. Pierwsza optymalna postać bazowa (4/5)

Iteracja 2

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_1	2	1	0	0	–1	0	2	3192
x_5	0	0	0	0	4	1	–8	–12752
x_2	3	0	1	0	1	0	–1	–1592
$c_j - z_j$		0	0	0	–1	0	–1	1608

Kryterium wyjścia x_5

Kryterium wejścia

dla zmiennej x_6 $|(-1) : (-8)| = 0,125$ **min**

1.7.2. Pierwsza optymalna postać bazowa (5/5)

Iteracja 3

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	4
x_6	0	0	0	0	–0,5	–0,13	1	1594
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,13	0	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,13	0	14

Ponieważ zmienna bilansująca x_6 sztucznego ograniczenia jest zmienną bazową, otrzymane rozwiązanie jest optymalne.

1.7.3. Zadanie sprzeczne (1/2)

Przykład 1.19

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji łączny rozmiar produkcji nie może być mniejszy niż 8 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

Sztuczne ograniczenie

$$x_1 + x_2 \le 1600$$

1.7.3. Zadanie sprzeczne (2/2)

Tablice simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	0	0	0	–2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1592
x_2	3	1	1	0	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	0	–3	4800

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	– 0,25	0	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	0	0	0	0	– 0,5	– 0,13	0	1	1594
x_6	0	0	0	0	0,5	0,13	1	0	–2
x_2	3	0	1	0	0,5	– 0,13	0	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	– 0,13	0	0	14

1.7.4. Nieograniczona funkcja celu (1/1)

Przykład 1.20

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&4x_1 \le 16 \\
&x_1 + x_2 \ge 3 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&2x_1 + 3x_2 \to \max \\
&4x_1 + x_3 = 16 \\
&-x_1 - x_2 + x_4 = -3 \\
&x_1 + x_2 + x_5 = 1600 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	0	1	0	0	16
x_2	3	2	1	0	0	1	1603
x_4	0	2	0	0	1	1	1600
$c_j - z_j$		–4	0	0	0	–3	4809

W bazie dopuszczalnej nie ma zmiennej x_5 dlatego funkcja celu jest nieograniczona.

1.7.5. Reguły postępowania w dualnej metodzie simpleks (1/1)

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego.
2. Badanie dopuszczalności rozwiązania.
3. Badanie nieograniczoności funkcji celu.
4. Identyfikacja rozwiązań alternatywnych.
5. Wybór zmiennej usuwanej z bazy.
6. Badanie niesprzeczności zadania.
7. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy.
8. Sprowadzenie warunków ograniczających do postaci bazowej względem nowej bazy.

Sformułowanie zadania

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x} \rightarrow \max$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{t})$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Wektor funkcji celu zależny od parametru

$$(\boldsymbol{c} + \Delta\boldsymbol{c}\boldsymbol{t})\boldsymbol{x} \rightarrow \max$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \rightarrow \max$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (1/7)

Przykład 1.21

Sprawdzić w jaki sposób wartość parametru t wpływa na rozwiązanie optymalne zadania:

$$(2 + 3t)x_1 + (3 - t)x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{t_0 = 0}$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (2/7)

Przebieg obliczeń

$t_0 = 0$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	$3 - t$	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	$2 + 3t$	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	$-1{,}5 + 0{,}5t$	$-0{,}125 - 0{,}875t$	$14 + 10t$

$$-1{,}5 + 0{,}5t \le 0$$

$$-0{,}125 - 0{,}875t \le 0$$

Dla $-0{,}143 \le t \le 3$ zmiennymi bazowymi są: x_3, x_2, x_1

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (3/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$t = 3$

$cx \to max$		11	0	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	0	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	11	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	0	– 2,75	44

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	2	1	0	–0,5	6
x_4	0	0	2	0	1	–0,25	4
x_1	$2 + 3t$	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	$3 - t$	0	0	$-0,5 - 0,75t$	$8 + 12t$

$$3 - t \leq 0$$
$$-0,5 - 0,75t \leq 0$$

Dla $t \geq 3$ zmiennymi bazowymi są: x_3, x_4, x_1.

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (4/7)

Przebieg obliczeń (c.d.)

$t = -0{,}143$

$cx \to max$		1,5712	3,143	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3,143	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	1,571	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,571	0	12,57

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	–1	0	6
x_2	$3 - t$	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		$0{,}5 + 3{,}5t$	0	0	$-1{,}5 + 0{,}5t$	0	$12 - 4t$

$$0{,}5 + 3{,}5t \le 0$$
$$-1{,}5 + 0{,}5t \le 0$$

Dla $t \le -0{,}143$ zmiennymi bazowymi są x_3, x_2, x_5.

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (5/7)

Podział zbioru parametrów na podzbiory

I. dla $t \leq -0{,}143$ mamy:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0,\ x_5 = 16,$$

II. dla $t = -0{,}143$ rozwiązaniami są punkty leżące na odcinku pomiędzy rozwiązaniami I i III.

III. dla $-0{,}143 \leq t \leq 3$ mamy:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

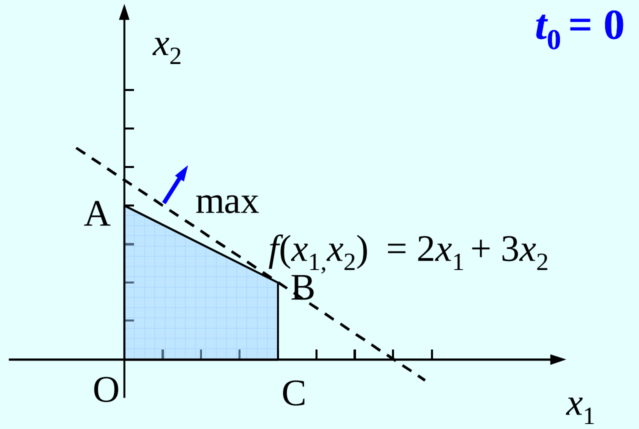
IV. dla $t = 3$ rozwiązaniami są punkty leżące na odcinku pomiędzy rozwiązaniami III a V.

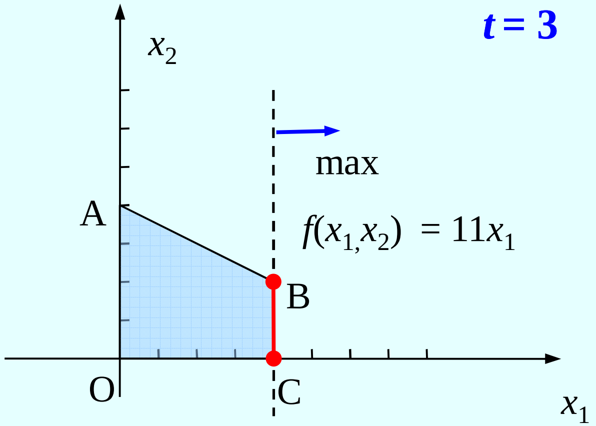
V. dla $t \geq 3$ mamy:

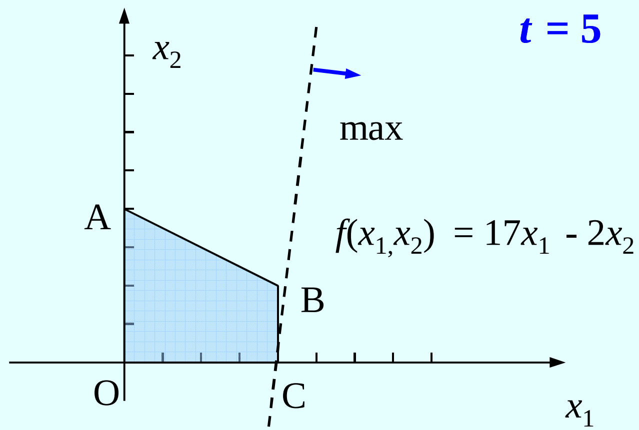
$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 0.$$

1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (6/7)

Ilustracja geometryczna

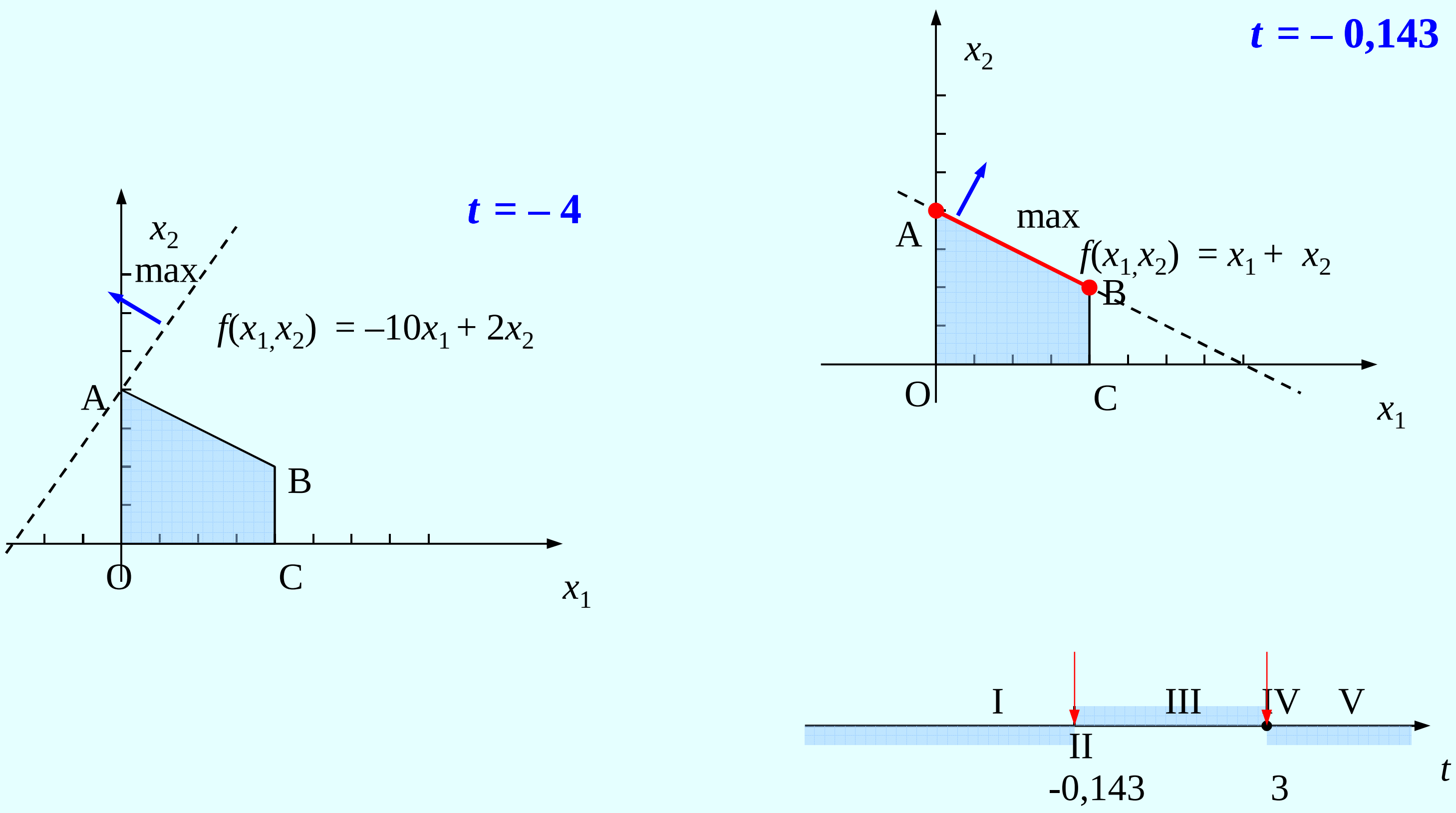






1.8.1. Wektor funkcji celu zależny od parametru (7/7)

Ilustracja geometryczna (c.d.)



1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (1/11)

Przykład 1.22

Sprawdzić w jaki sposób wartość parametru t wpływa na rozwiązanie optymalne zadania:

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 - 9t \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 - 4t \\ 4x_1 \qquad &\le 16 + 8t \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$b + \Delta b(t) = \begin{bmatrix} 14 - 9t \\ 8 - 4t \\ 16 + 8t \end{bmatrix}$$

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (2/11)

Przebieg obliczeń
t = 0

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (3/11)

Przebieg obliczeń (c.d.)
t = 0

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$b(t) = A_B^{-1}\left(b + \Delta b(t)\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14-9t \\ 8-4t \\ 16+8t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-7t \\ 2-3t \\ 4+2t \end{bmatrix}$$

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (4/11)

Przebieg obliczeń (c.d.)
t = 0

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	$2 - 7t$
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	$2 - 3t$
x_1	2	1	0	0	0	0,25	$4 + 2t$
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	$14 - 5t$

$$2 - 7t \geq 0$$
$$2 - 3t \geq 0$$
$$4 + 2t \geq 0$$

Dla $-2 \leq t \leq 0{,}286$ zmiennymi bazowymi są: x_3, x_2, x_1

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (5/11)

Przebieg obliczeń (c.d.)
t = 0,286

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	1,143
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4,571
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	12,57

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	0	–4	4	1	$-8+28t$
x_2	3	0	1	–0,5	1	0	$1+0,5t$
x_1	2	1	0	1	–1	0	$6-5t$
$c_j - z_j$		0	0	–0,5	–1	0	$15-8,5t$

$$-8+28t \geq 0$$
$$1+0,5t \geq 0$$
$$6-5t \geq 0$$

Dla $0,286 \leq t \leq 1,2$ zmiennymi bazowymi są: x_5, x_2, x_1

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (6/11)

Przebieg obliczeń (c.d.)
t = 1,2

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	0	–4	4	1	25,6
x_2	3	0	1	–0,5	1	0	1,6
x_1	2	1	0	0	–1	0	0
$c_j - z_j$		0	0	–0,5	–1	0	4,8

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	4	0	0	0	1	$16 + 8t$
x_2	3	1	1	0,5	0	0	$7 – 4,5t$
x_4	0	–1	0	–1	1	0	$–6 + 5t$
$c_j - z_j$		–1	0	–1,5	0	0	$9 - 3,5t$

$$16 + 8t \geq 0$$
$$7 - 4,5t \geq 0$$
$$-6 + 5t \geq 0$$

Dla $1,2 \leq t \leq 1,556$ zmiennymi bazowymi są: x_5, x_2, x_4

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (7/11)

Przebieg obliczeń (c.d.)
t = 1,556 i t = –2

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	4	0	0	0	1	28,444
x_2	3	1	1	0,5	0	0	0
x_4	0	–1	0	–1	1	0	1,778
$c_j - z_j$		–1	0	–1,5	0	0	0

Dla $t > 1{,}556$ zadanie sprzeczne

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	16
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	8
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	24

Dla $t < -2$ zadanie sprzeczne

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (8/11)

Podział zbioru parametrów na podzbiory

I. dla $t < -2$ zadanie jest sprzeczne.

II. dla $-2 \leq t \leq 0{,}286$ rozwiązanie jest w postaci:

$$x_1 = 4 + 2t,\ x_2 = 2 - 3t,\ x_3 = 2 - 7t,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

III. dla $t = 0{,}286$ mamy:

$$x_1 = 4{,}571,\ x_2 = 1{,}143,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

IV. dla $0{,}286 \leq t \leq 1{,}2$ rozwiązanie jest w postaci:

$$x_1 = 6 - 5t,\ x_2 = 1 + 0{,}5t,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = -8 + 28t,$$

V. dla $t = 1{,}2$ mamy:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1{,}6,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 25{,}6,$$

VI. dla $1{,}2 \leq t \leq 1{,}556$ rozwiązanie jest w postaci:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 7 - 4{,}5t,\ x_3 = 0,\ x_4 = -6 + 5t,\ x_5 = 16 + 8t,$$

VII. dla $t > 1{,}556$ zadanie jest sprzeczne.

1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (9/11)

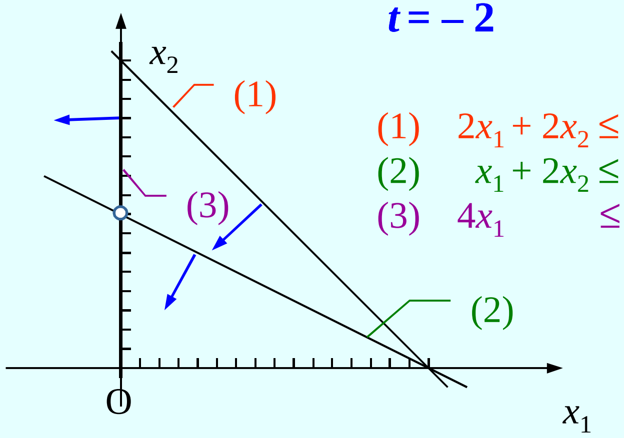
Ilustracja geometryczna

***t* = – 2**

(1) $2x_1 + 2x_2 \le 32$

(2) $x_1 + 2x_2 \le 16$

(3) $4x_1 \le 0$

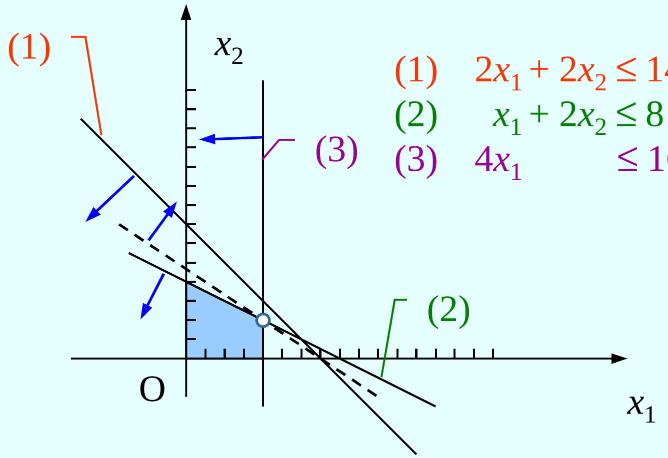


***t* = 0**

(1) $2x_1 + 2x_2 \le 14$

(2) $x_1 + 2x_2 \le 8$

(3) $4x_1 \le 16$

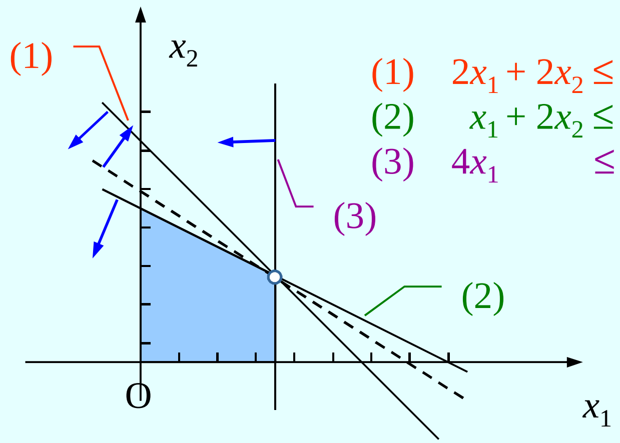


***t* = 0,286**

(1) $2x_1 + 2x_2 \le 11$

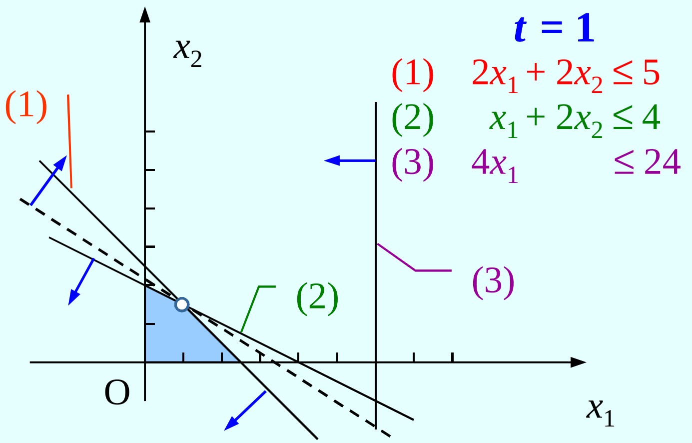
(2) $x_1 + 2x_2 \le 6$

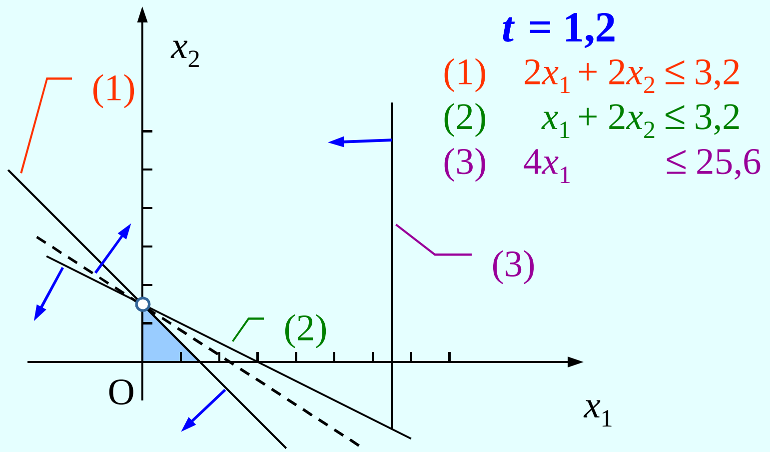
(3) $4x_1 \le 18$



1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (10/11)

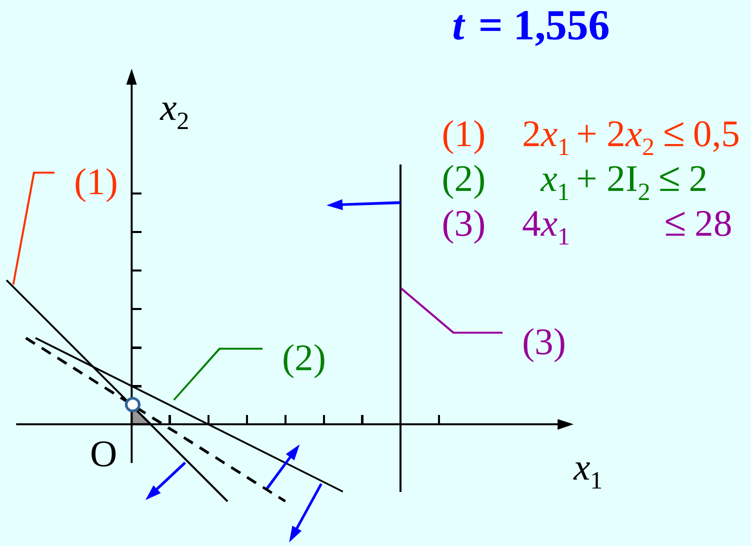
Ilustracja geometryczna (c.d.)

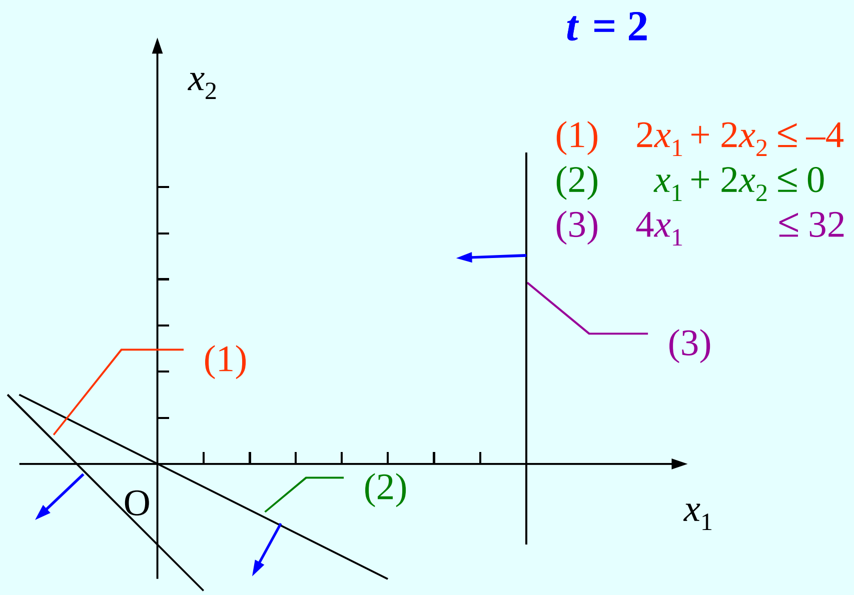


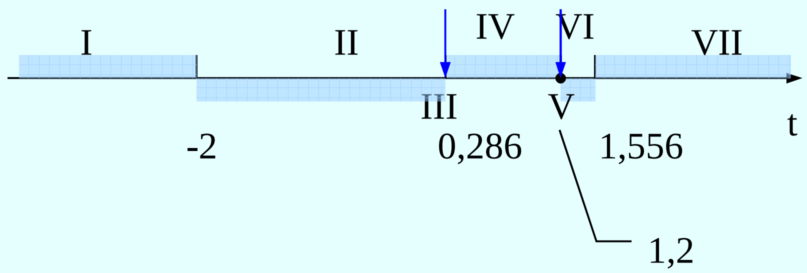


1.8.2. Wektor wyrazów wolnych zależny od parametru (11/11)

Ilustracja geometryczna (c.d.)







1.9.1. Zagadnienie rozkroju (1/3)

Przykład 1.23

Zamówienie - 100 kompletów zbrojeniowych,
Długość kłód - 7,4 m,

Rozpatrywane sposoby rozkroju:

	Sposoby rozkroju	1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba desek	Długich (2,9 m)	1	1	2	0	1	0	0	0
	Średnich (2,1 m)	1	0	0	2	2	1	3	0
	Krótkich (1,5 m)	1	3	1	2	0	3	0	4
	Odpad (w metrach)	0,9	0	0,1	0,2	0,3	0,7	1,1	1,4

W jaki sposób należy rozcinać kłody, by wykonać zamówienie przy minimalnym odpadzie drewna?

1.9.1. Zagadnienie rozkroju (2/3)

Model matematyczny

Cel

Znalezienie takiego sposobu rozkroju, który minimalizuje odpad.

Zmienne decyzyjne

x_1 – liczba kłód pociętych sposobem 1,

x_2 – liczba kłód pociętych sposobem 2,

x_3 – liczba kłód pociętych sposobem 3,

x_4 – liczba kłód pociętych sposobem 4,

x_5 – liczba kłód pociętych sposobem 5,

x_6 – liczba kłód pociętych sposobem 6,

x_7 – liczba kłód pociętych sposobem 7,

x_8 – liczba kłód pociętych sposobem 8,

1.9.1. Zagadnienie rozkroju (3/3)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0{,}9x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}7x_6 + 1{,}1x_7 + 1{,}4x_8 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

kłody długie: $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 100$

kłody średnie: $x_1 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + 3x_7 = 100$

kłody krótkie: $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 + 4x_8 = 100$

warunki nieujemności: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$

Rozwiązanie optymalne

$x_1 = 0$, $x_2 = 30$, $x_3 = 10$, $x_4 = 0$, $x_5 = 50$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$

Optymalne bazowe rozwiązanie alternatywne:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 40$, $x_4 = 30$, $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$

Minimalna wartość funkcji celu = 16

1.9.2. Zagadnienie diety (1/3)

Przykład 1.24

Składnik A - co najmniej 1000 jednostek,
Składnik B - co najmniej 800 jednostek,
Składnik C - co najmniej 1150 jednostek, co najwyżej 1700 jednostek.

Zawartość składników w paszach:

Rodzaj paszy	Składniki			Cena
	A	B	C	
Pasza 1	50	20	10	1800
Pasza 2	20	0	30	2200
Pasza 3	30	20	10	1300
Pasza 4	0	10	20	1500

Paszy 2 dostarczyć nie mniej niż 20 q,
Paszy 1 dostarczyć półtora razy więcej niż paszy 3,
Nie więcej niż 30 q paszy 3.

Jaką ilość pasz zakupić, by zminimalizować koszty wyżywienia 1 sztuki bydła?

1.9.2. Zagadnienie diety (2/3)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja kosztów wyżywienia 1 sztuki bydła rocznie.

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowana ilość zakupionej paszy 1,

x_2 – planowana ilość zakupionej paszy 2,

x_3 – planowana ilość zakupionej paszy 3,

x_4 – planowana ilość zakupionej paszy 4,

1.9.2. Zagadnienie diety (3/3)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1800x_1 + 2200x_2 + 1300x_3 + 1500x_4 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

Składnik A: $50x_1 + 20x_2 + 30x_3 \geq 1000$

Składnik B: $20x_1 + \quad + 20x_3 + 10x_4 \geq 800$

Składnik C: $10x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 20x_4 \geq 1150$

$10x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 1700$

Pasza 2: $x_2 \geq 20$

Pasza 1 i 3: $x_1 = 1{,}5x_3$

Pasza 3: $x_3 \leq 30$

Warunki nieujemności: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 20,\ x_2 = 18{,}33,\ x_3 = 13{,}33,\ x_4 = 13{,}33.$$

Optymalna wartość funkcji celu jest równa 113666,67

1.9.3. Parametryczne planowanie produkcji (1/4)

Przykład 1.25

Środki	Produkty								Zasoby
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
S_1	3	2	5	4	3	5	2	3	500
S_2	2	3	1	4	2	2	1	3	400
S_3	2	1	1	4	3	0	2	4	350
S_3	2	1	2	2	1	2	2	1	450
Zysk jednostkowy	$1 + t$	$2 + t$	$1 + t$	$3 + t$	$4 + t$	$5 + t$	$3 + t$	$2 + t$	

Należy wyznaczyć optymalny plan produkcji oraz maksymalny łączny zysk dla każdej z możliwych wartości $t \in [-5; 5]$

1.9.3. Parametryczne planowanie produkcji (2/4)

Model matematyczny

Cel

Wyznaczenie optymalnego planu produkcji maksymalizującego łączny zysk.

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowane rozmiary produkcji produktu P_1,
x_2 – planowane rozmiary produkcji produktu P_2,
x_3 – planowane rozmiary produkcji produktu P_3,
x_4 – planowane rozmiary produkcji produktu P_4,
x_5 – planowane rozmiary produkcji produktu P_5,
x_6 – planowane rozmiary produkcji produktu P_6,
x_7 – planowane rozmiary produkcji produktu P_7,
x_8 – planowane rozmiary produkcji produktu P_8,

1.9.3. Parametryczne planowanie produkcji (3/4)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, t) = (1 + t)x_1 + (2 + t)x_2 + (1 + t)x_3 + (3 + t)x_4 + (4 + t)x_5 + (5 + t)x_6 + (3 + t)x_7 + (2 + t)x_8 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

Środek S_1: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_7 + 3x_8 \leq 500$

Środek S_2: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 3x_8 \leq 400$

Środek S_3: $2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_7 + 4x_8 \leq 350$

Środek S_4: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 \leq 450$

Warunki nieujemności: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$

1.9.3. Parametryczne planowanie produkcji (4/4)

Rozwiązanie optymalne w zależności od wartości parametru

Δ_1 = [-5; -2,5] Δ_2 = [-2,5: -1] Δ_3 = [-1; 1,67] Δ_4 = [1,67; 5]

Przedział	Wartości optymalne								Wartość funkcji celu
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
Δ_1	0	0	0	0	0	100	0	0	500 + 100t
Δ_2	0	0	0	0	116,7	30	0	0	616,7 + 146,7t
Δ_3	0	0	0	0	0	30	175	0	675 + 205t
Δ_4	0	78,6	0	0	0	14,3	135,7	0	635,7 + 228,6t

Pora na relaks