

Optymalizacja liniowa

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Model matematyczny**
- **Cel, środki, ograniczenia**
- **Funkcja celu – funkcja kryterium**
- **Zmienne decyzyjne**
- **Układ warunków ograniczających**
- **Decyzje dopuszczalne**
- **Decyzja optymalna**
- **Zadanie optymalizacji liniowej**
- **Metoda geometryczna**

Słowa kluczowe (c.d.)

- **Metoda simpleks**
- **Zmienne bilansujące**
- **Postać bazowa**
- **Zmienne bazowe**
- **Zmienne niebazowe**
- **Kryterium optymalności**
- **Kryterium wejścia**
- **Kryterium wyjścia**
- **Zmienna sztuczna**
- **Analiza wrażliwości**
- **Zadanie prymalne i zadanie dualne**

1.2. Metoda geometryczna

1.2.1. Model matematyczny (1/2)

Przykład 1.1

Zadanie programowania produkcji

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P ₁	P ₂	
S ₁	2	2	14
S ₂	1	2	8
S ₃	4	0	16
Zyski	2	3	

Należy zaplanować produkcję zakładu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny.

1.2. Metoda geometryczna

1.2.1. Model matematyczny (2/2)

Składowe modelu

Zmienne decyzyjne

x_1 - planowany rozmiar produkcji produktu P_1 ,

x_2 - planowany rozmiar produkcji produktu P_2 .

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

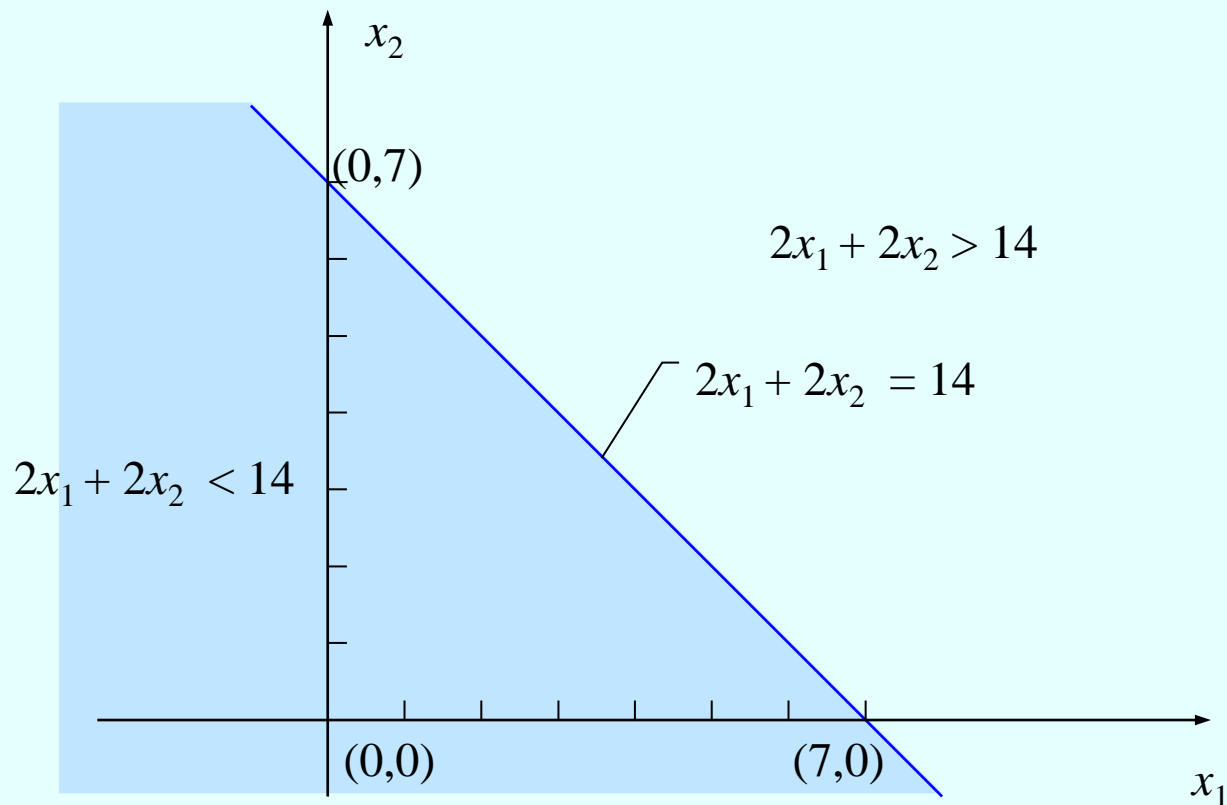
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (1/6)

Pierwszy warunek ograniczający

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

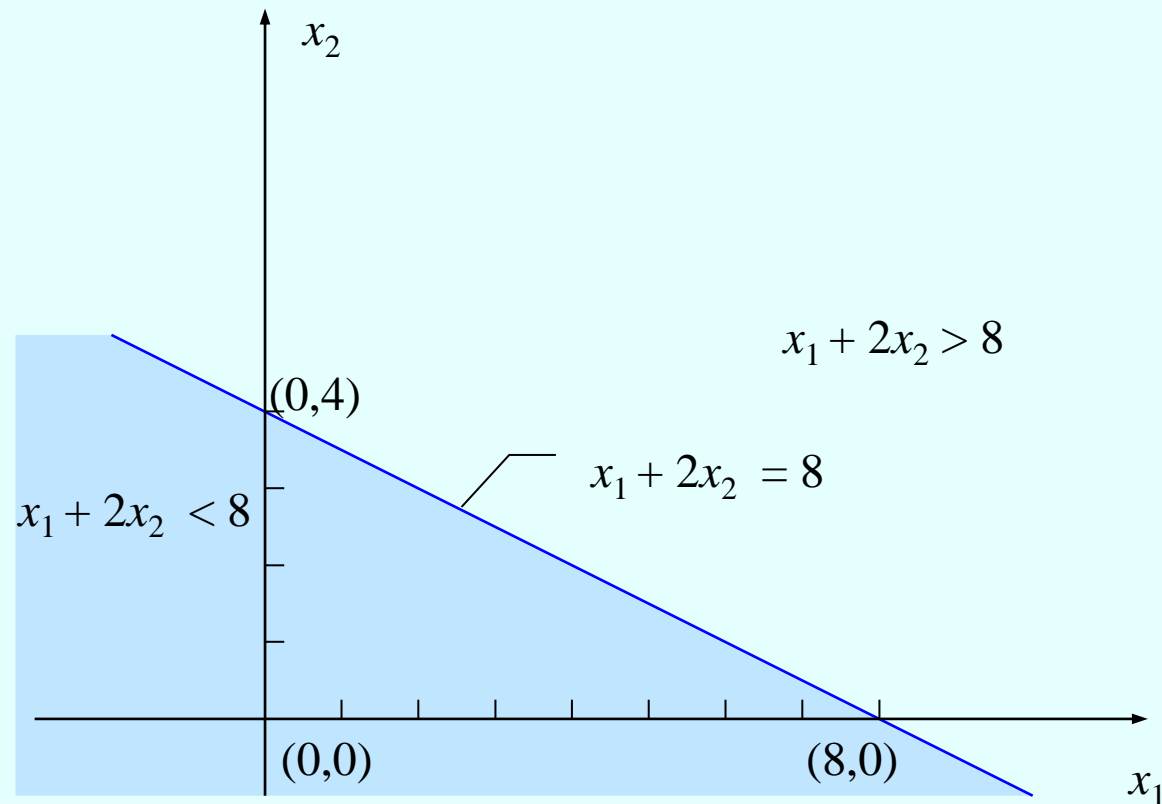


1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (2/6)

Drugi warunek ograniczający

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

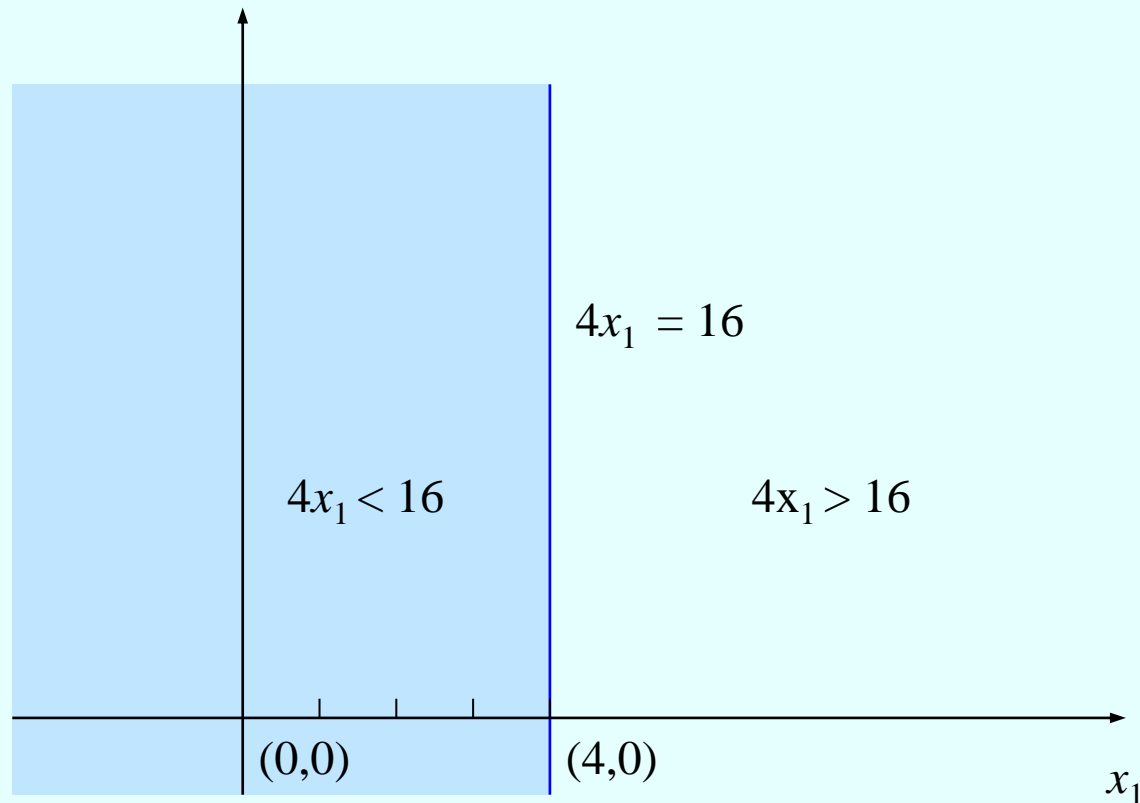


1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (3/6)

Trzeci warunek ograniczający

$$4x_1 \leq 16$$

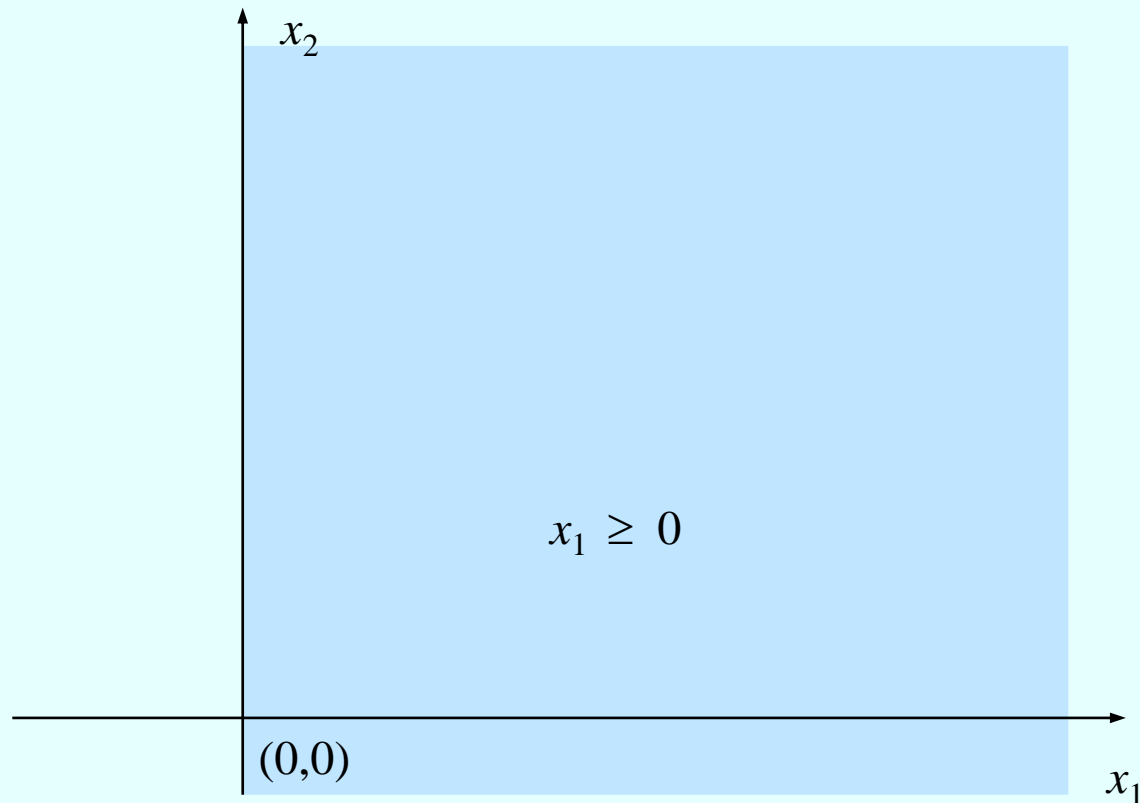


1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (4/6)

Warunki nieujemności

$$x_1 \geq 0$$

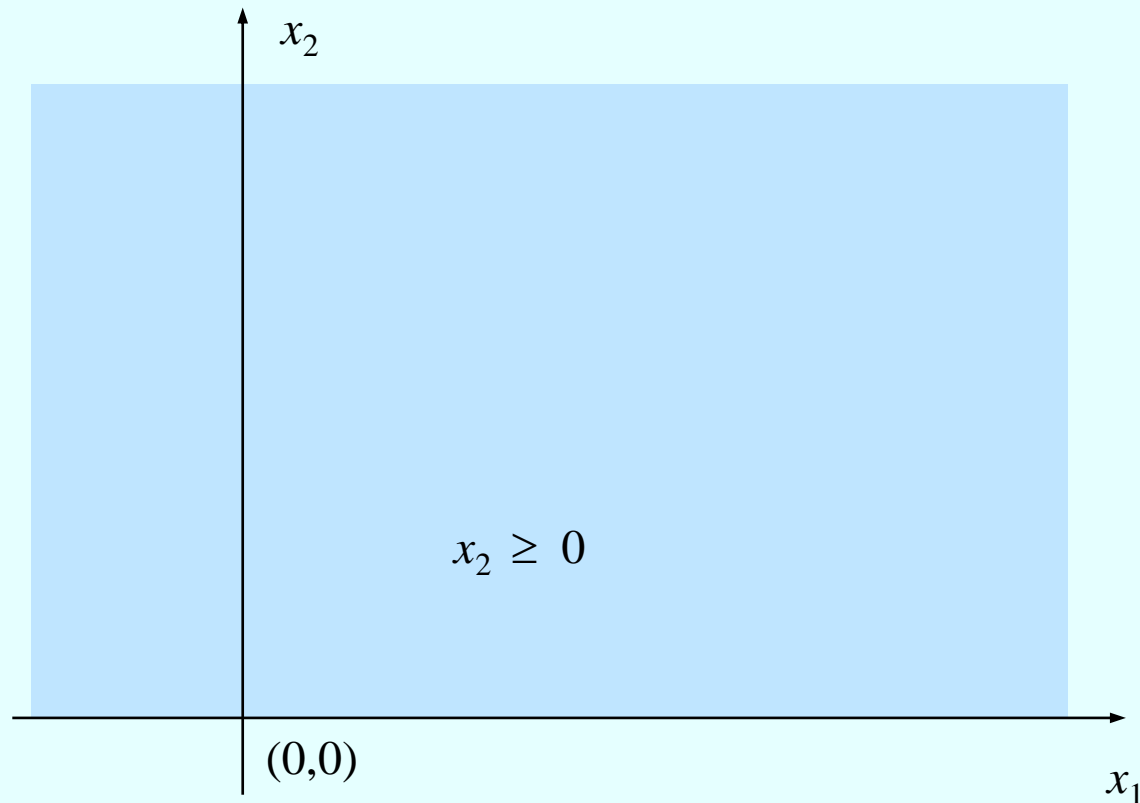


1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (5/6)

Warunki nieujemności (c.d.)

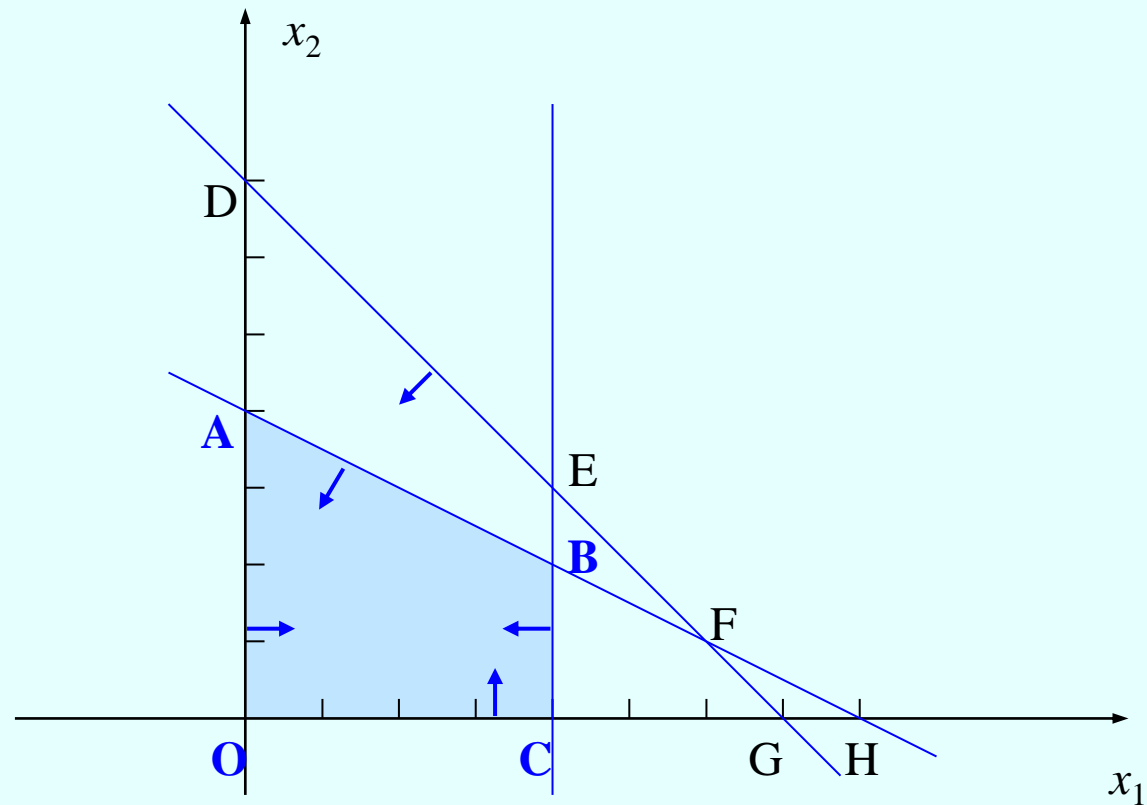
$$x_2 \geq 0$$



1.2. Metoda geometryczna

1.2.2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych (6/6)

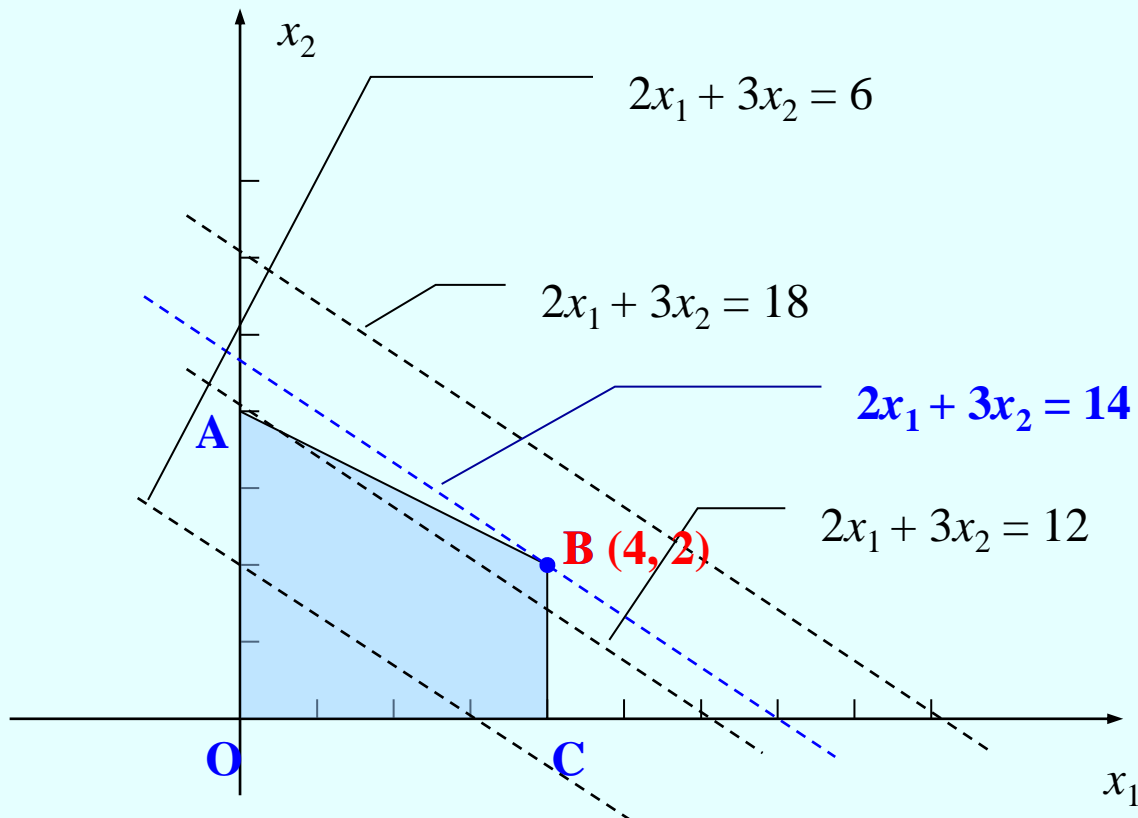
Część wspólna



1.2. Metoda geometryczna

1.2.3. Metoda prób i błędów (1/1)

Rozwiązanie optymalne



Rozwiązanie optymalne:

$x_1 = 4$ planujemy wytworzenie 4 jednostek produktu P_1

$x_2 = 2$ planujemy wytworzenie 2 jednostek produktu P_2

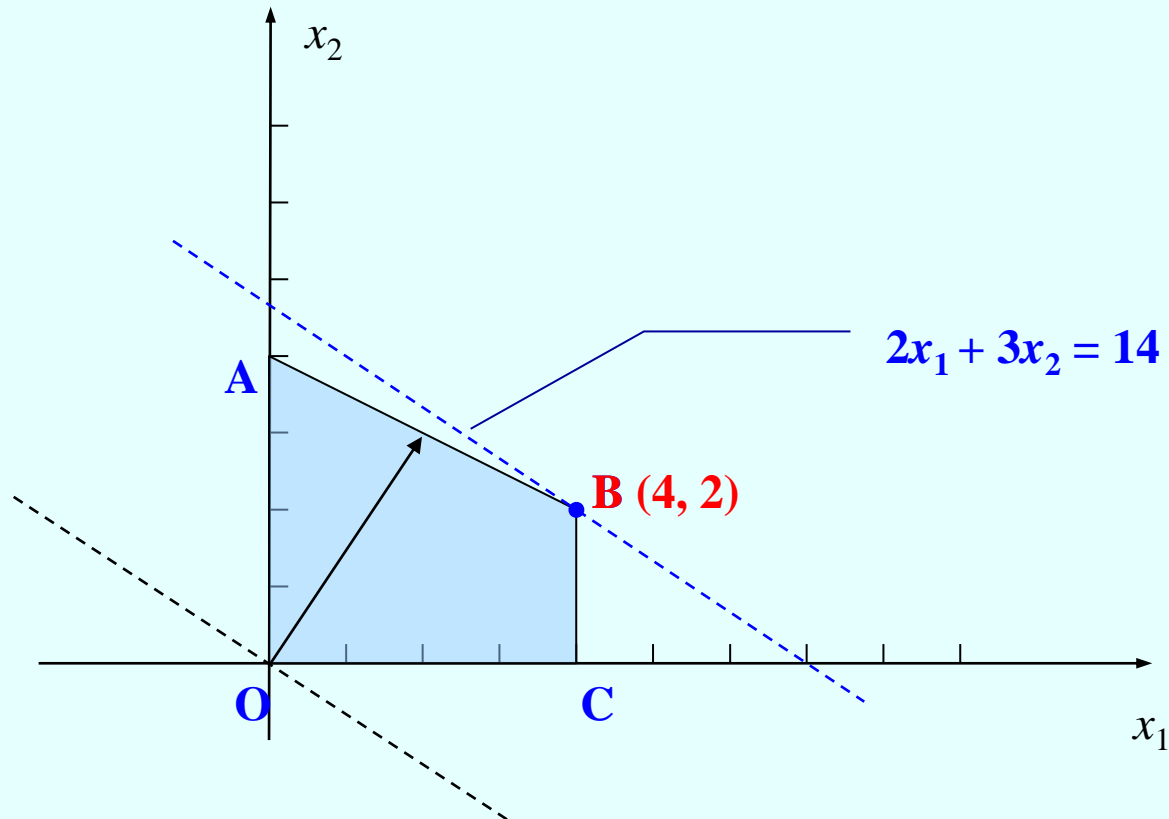
$$f(4,2) = 14$$

1.2. Metoda geometryczna

1.2.4. Wykorzystanie gradientu funkcji celu (1/1)

Rozwiązanie optymalne

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3$$



1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (1/7)

Zmienne bilansujące

Środek S₁

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_3 = 14 - 2x_1 - 2x_2 \geq 0$$

x_3 - niewykorzystana ilość środka S₁

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (2/7)

Zmienne bilansujące (c.d.)

Środek S_2

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

x_4 - niewykorzystana ilość środka S_2

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (3/7)

Zmienne bilansujące (c.d.)

Środek S₃

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_5 = 16 - 4x_1 \geq 0$$

x_5 - niewykorzystana ilość środka S₃

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (4/7)

Postać standardowa

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (5/7)

Postać macierzowa

c - wektor funkcji celu,

A - macierz współczynników,

b - wektor warunków ograniczających,

x - wektor zmiennych.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

$$cx \rightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$c = [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (6/7)

Postać bazowa

$$A = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad | \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

x_3, x_4, x_5 - zmienne bazowe

x_1, x_2 - zmienne niebazowe

$$2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Bazowe rozwiązanie dopuszczalne

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 16$$

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.1. Postać bazowa (7/7)

Tablica simpleksowa

$$cx \rightarrow \max$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (1/7)

Jeden krok algorytmu metody simpleks

Należy:

- stwierdzić, czy rozpatrywane rozwiązanie bazowe jest optymalne, czy też nie,
- w przypadku, gdy nie jest optymalne, wyznaczyć nową bazę sąsiednią,
- przekształcić za pomocą przekształceń elementarnych macierz warunków ograniczających do postaci bazowej względem bazy sąsiedniej,
- jeżeli rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne, zakończyć postępowanie.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (2/7)

Pierwszy warunek ograniczający

$$x_1: 0 \rightarrow 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$2 + x_3 = 14$$

stąd

$$x_3 = 12$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_3 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{11} = 2$.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (3/7)

Drugi warunek ograniczający

$$x_1: 0 \rightarrow 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$1 + x_4 = 8$$

stąd

$$x_4 = 7$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_4 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{21} = 1$.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (4/7)

Trzeci warunek ograniczający

$$x_1: 0 \rightarrow 1$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

Ponieważ $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 0$, mamy:

$$4 + x_5 = 16$$

stąd

$$x_5 = 12$$

Każdej dodanej jednostce zmiennej x_1 odpowiada spadek wartości zmiennej bazowej x_5 i zmianę tą opisuje wartość współczynnika $a_{31} = 4$.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (5/7)

Zmiany wartości funkcji celu

Wzrost wartości funkcji celu

$$c_1 = 2$$

Spadek wartości funkcji celu związany z obniżeniem dotychczasowych wartości przez zmienne bazowe

$$\text{zmienna } x_3: \quad c_3 \cdot a_{11} = 0 \cdot 2 = 0$$

$$\text{zmienna } x_4: \quad c_4 \cdot a_{21} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{zmienna } x_5: \quad c_5 \cdot a_{31} = 0 \cdot 4 = 0$$

czyli
$$z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$$

Zmiana netto:

$$c_1 - z_1 = 2 - 0 = 2$$

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (6/7)

Wskaźniki optymalności

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.2. Wskaźniki optymalności (7/7)

Kryterium optymalności

Jeżeli w zadaniu maksymalizacji wartości wszystkich wskaźników optymalności są niedodatnie, wtedy rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne.

Jeżeli choć jeden ze wskaźników optymalności jest dodatni, wtedy istnieje możliwość poprawy tego rozwiązania.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.3. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy (1/1)

Kryterium wejścia

Wybieramy największą wartość wskaźnika optymalności. Odpowiadającą mu zmienną wprowadzamy do nowej bazy.

Jeżeli największej wartości wskaźnika optymalności odpowiada więcej niż jedna zmienna, do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najniższym numerze.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (1/5)

Pierwszy warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$2x_2 + x_3 = 14$$

Kiedy zmienna x_3 przyjmuje wartość 0?

$$2x_2 = 14, \text{ czyli } x_2 = 7 \quad (b_1: a_{21} = 7)$$

Największa dopuszczalna wartość zmiennej x_2 dla pierwszego warunku ograniczającego jest równa 7.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (2/5)

Drugi warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$2x_2 + x_4 = 8$$

Kiedy zmienna x_4 przyjmuje wartość 0?

$$2x_2 = 8, \text{ czyli } x_2 = 4 \quad (b_2: a_{22} = 4)$$

Największa dopuszczalna wartość zmiennej x_2 dla drugiego warunku ograniczającego jest równa 4.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (3/5)

Trzeci warunek ograniczający

Do nowej bazy wprowadzamy zmienną x_2

$$4x_1 + 0x_2 + x_5 = 16$$

Zmienna x_1 jako niebazowa jest równa 0, czyli:

$$0x_2 + x_5 = 16$$

Kiedy zmienna x_5 przyjmuje wartość 0?

Ponieważ współczynnik przy x_2 jest równy 0 zmiennej x_5 nie można wyprowadzić z bazy przez wprowadzenie do bazy zmiennej x_2 .

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (4/5)

Kryterium wyjścia

Obliczamy ilorazy kolejnych wyrazów wolnych przez odpowiadające im elementy kolumny wchodzącej do bazy dla tych elementów kolumny wprowadzanej do bazy, które są dodatnie.

Bazę opuszcza zmienna, dla której odpowiadający iloraz jest najmniejszy.

Jeżeli minimum jest przyjmowane więcej niż jeden raz, wtedy jako zmienną opuszczającą bazę wybieramy zmienną o najniższym numerze.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.4. Wybór zmiennej opuszczającej bazę (5/5)

Zastosowanie kryterium wyjścia

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	2	2	1	0	0	14	7
x_4	0	1	2	0	1	0	8	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16	-
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0	

Z bazy usuwamy zmienną x_4

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.5. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (1/2)

Przekształcenia elementarne

1. Podzielenie obydwu stron dowolnie wybranego warunku ograniczającego przez dowolną liczbę różną od zera.
2. Dodanie stronami do dowolnie wybranego warunku ograniczającego pomnożonego przez dowolną liczbę różną od zera innego warunku pomnożonego przez dowolną liczbę różną od zera.

Przekształcenia elementarne stosujemy dla warunków ograniczających w postaci równości.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.5. Przejście do rozwiązania bazowego sąsiedniego (2/2)

Tablice simpleksowe

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0
$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	-1	0	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$							12

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.6. Kolejne iteracje (1/2)

Iteracja 2

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	-1	0	6	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0,5	0	0	-1,5	0	12	

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.6. Kolejne iteracje (2/2)

Iteracja 3

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	-1,5	-0,125	14

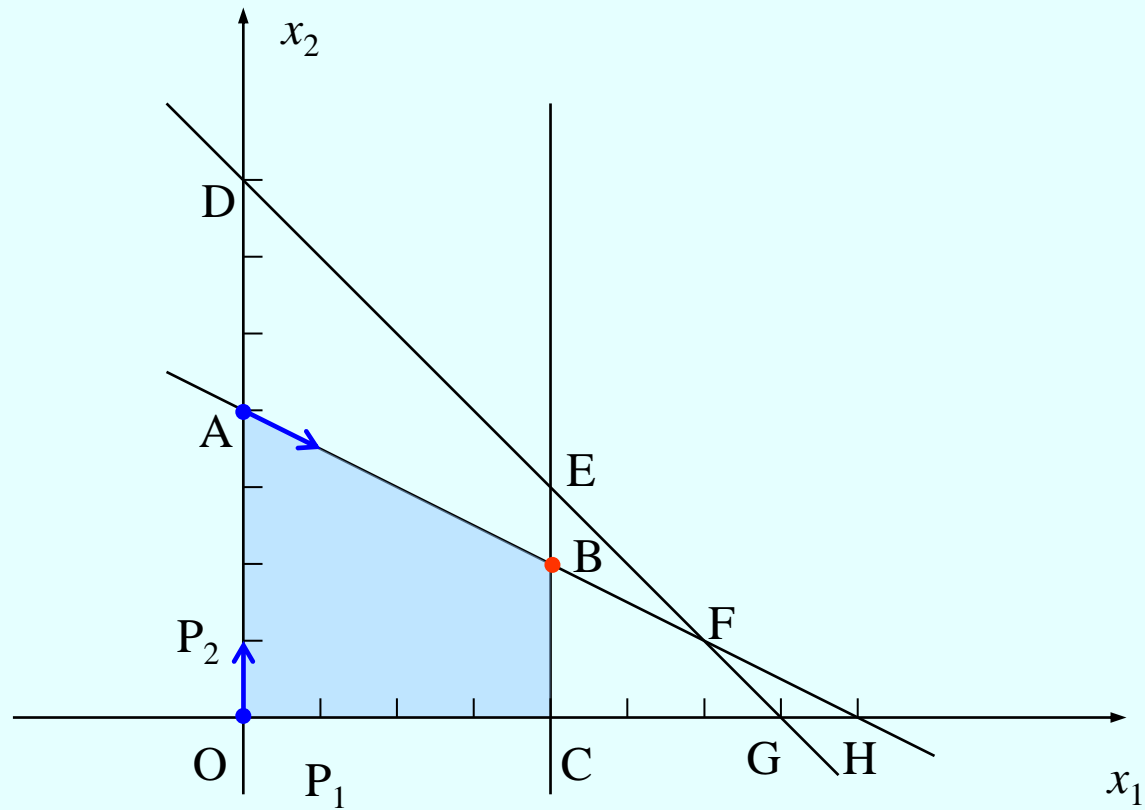
Ponieważ wszystkie wskaźniki optymalności są niedodatnie, zgodnie z kryterium optymalności rozwiązanie:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0$$

jest optymalne.

1.3. Metoda simpleks dla zadania maksymalizacji

1.3.7. Interpretacja geometryczna (1/1)



1.4. Przegląd poszczególnych przypadków

1.4.1. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (1/4)

Przykład 1.2

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji łączne rozmiary produkcji mają być równe 5 jednostkom.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Warunki ograniczające

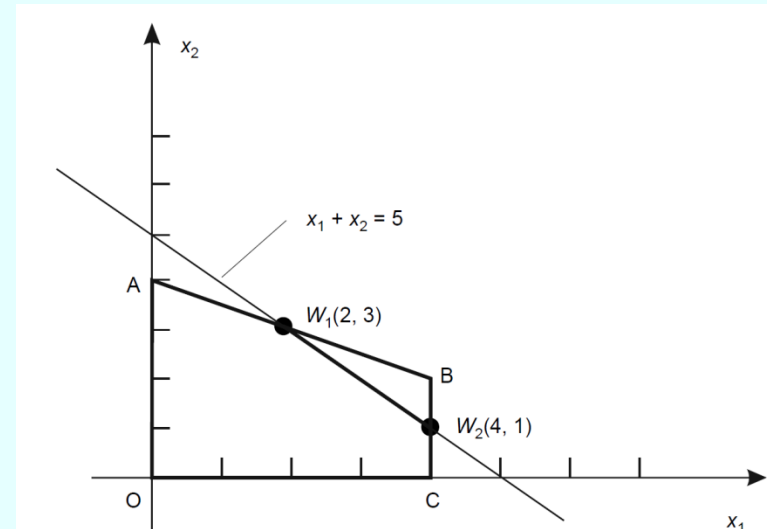
$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

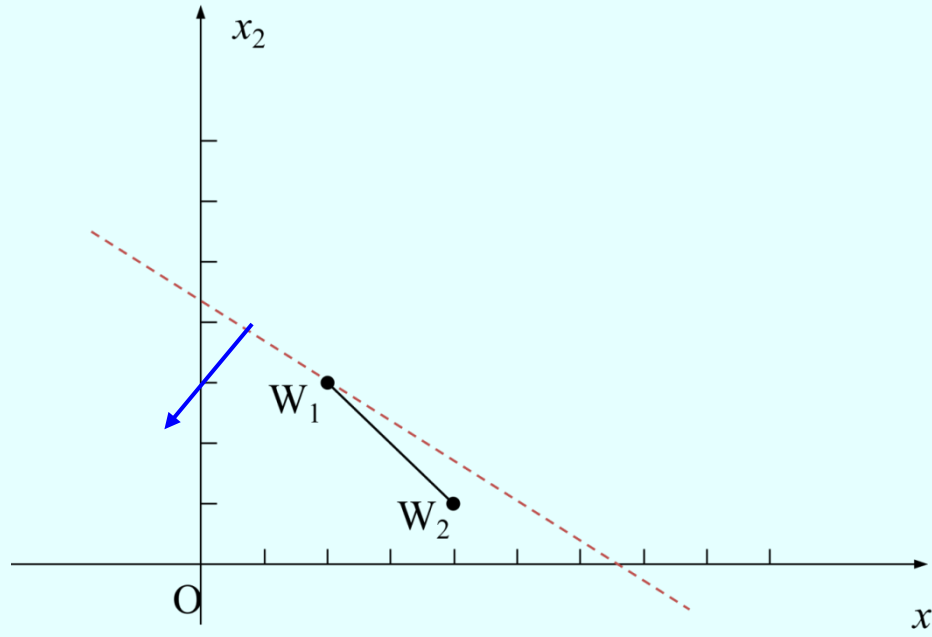
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$



1.4 Przegląd poszczególnych przypadków

1.4.1. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (2/4)

Metoda geometryczna



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych to odcinek o końcach $W_1(2, 3)$ i $W_2(4, 1)$.

$$f(2, 3)=13 \quad f(4, 1)=11$$

Rozwiązanie optymalne w punkcie W_1 .

1.4.Przegląd poszczególnych przypadków

1.4.1. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (3/4)

Zmienna sztuczna

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_6 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1 + x_2 + x_6 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0,$$

1.4. Przegląd poszczególnych przypadków

1.4.1. . Pierwsza dopuszczalna postać bazowa (4/4)

Pierwsza tablica simpleksowa

cx → max		2	3	0	0	0	-300	b
Baza	C _B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	
x ₃	0	2	2	1	0	0	0	14
x ₄	0	1	2	0	1	0	0	8
x ₅	0	4	0	0	0	1	0	16
x ₆	-300	1	1	0	0	0	1	5
C _j - Z _j		302	303	0	0	0	0	-1500

Ostatnia tablica simpleksowa

cx → max		2	3	0	0	0	-300	b
Baza	C _B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	
x ₃	0	0	0	1	0	0	-2	4
x ₅	0	0	0	0	4	1	-8	8
x ₁	2	1	0	0	-1	0	2	2
x ₂	3	0	1	0	0	0	-1	3
C _j - Z _j		0	0	0	-1	0	-301	13

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.2. Zadanie sprzeczne (1/4)

Przykład 1.3

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1. zadaniu programowania produkcji łączny rozmiar produkcji ma być nie mniejszy niż 8 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

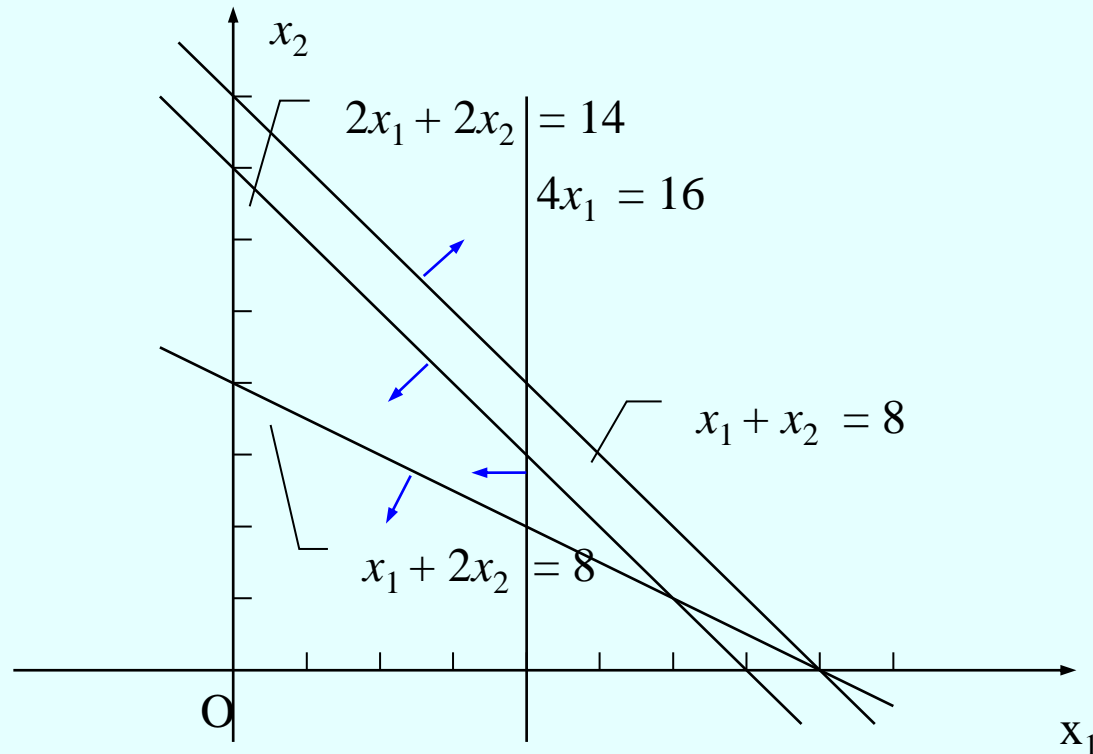
$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.2. Zadanie sprzeczne (2/4)

Metoda geometryczna



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.2. Zadanie sprzeczne (3/4)

Pierwsza dopuszczalna postać bazowa

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \mathbf{x}_7) = 2x_1 + 3x_2 - 300\mathbf{x}_7 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1 + x_2 - x_6 + \mathbf{x}_7 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \mathbf{x}_7 \geq 0$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.2. Zadanie sprzeczne (4/4)

Tablice simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	0	-300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	-300	1	1	0	0	0	-1	1	8
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	-300	0	-2400

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \rightarrow max$		2	3	0	0	0	0	-300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	0	0	2
x_2	3	0	1	0	0,5	0,125	0	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	-300	0	0	0	-0,5	-0,125	-1	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	-151,5	-37,625	-300	0	-586

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.3 Alternatywne rozwiązania optymalne (1/4)

Przykład 1.4

W rozpatrywanym przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk jednostkowy dla produktu P_2 zwiększa się z 3 do 4 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

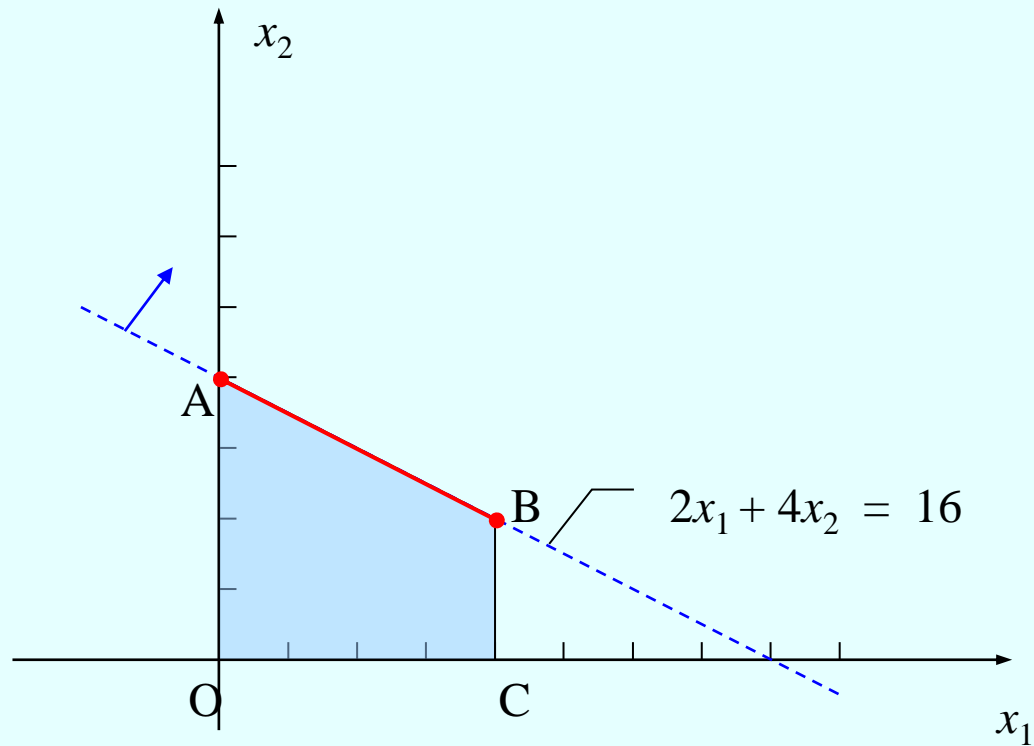
$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.3. Alternatywne rozwiązania optymalne (2/4)

Metoda geometryczna



1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.3. Alternatywne rozwiązania optymalne (3/4)

Pierwsza dopuszczalna postać bazowa

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Pierwsza tablica simpleksowa:

$cx \rightarrow \max$		2	4	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c - z$		2	4	0	0	0	0

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.3. Alternatywne rozwiązania optymalne (4/4)

Tablice simpleksowe

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \rightarrow \max$		2	4	0	0	0	b	b/a
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	-1	0	6	6
x_2	4	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0	0	0	-2	0	16	

Rozwiązanie alternatywne

$cx \rightarrow \max$		2	4	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	4	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	-2	0	16

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (1/10)

Przykład 1.5

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji występują jedynie ograniczenia dotyczące środka S_3 . Całkowity rozmiar produkcji nie może być mniejszy niż 3 jednostki.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$4x_1 \leq 16$$

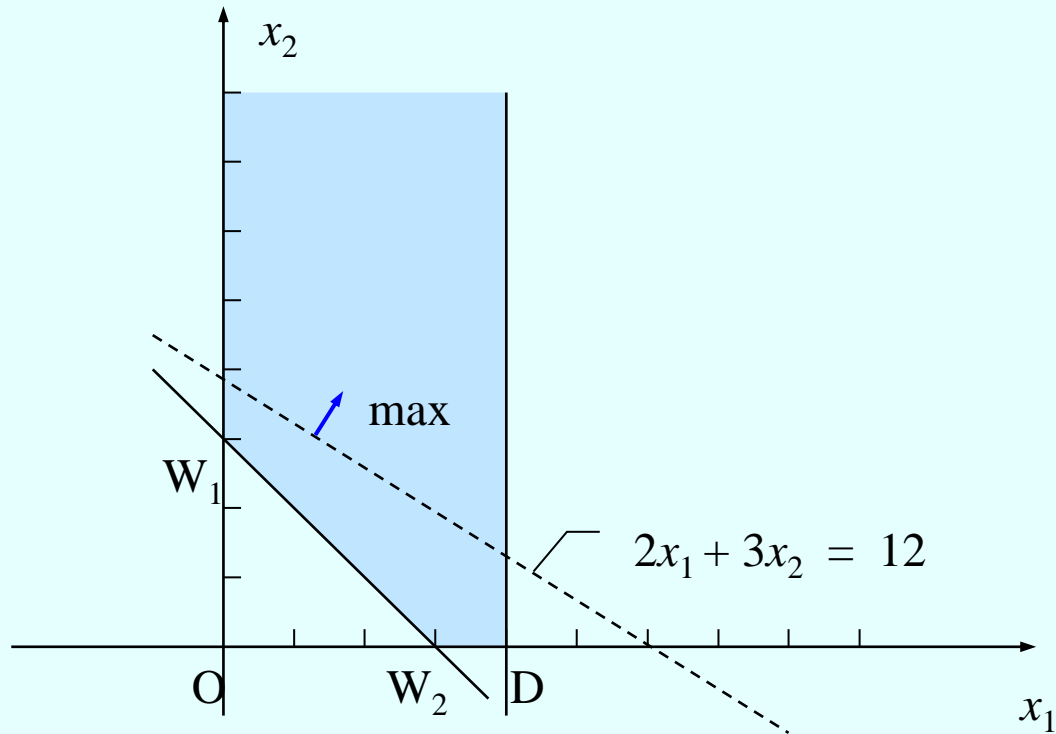
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (2/10)

Metoda geometryczna



1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (3/10)

Pierwsze dopuszczalne rozwiązanie bazowe

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$4x_1 + x_3 = 16$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (4/10)

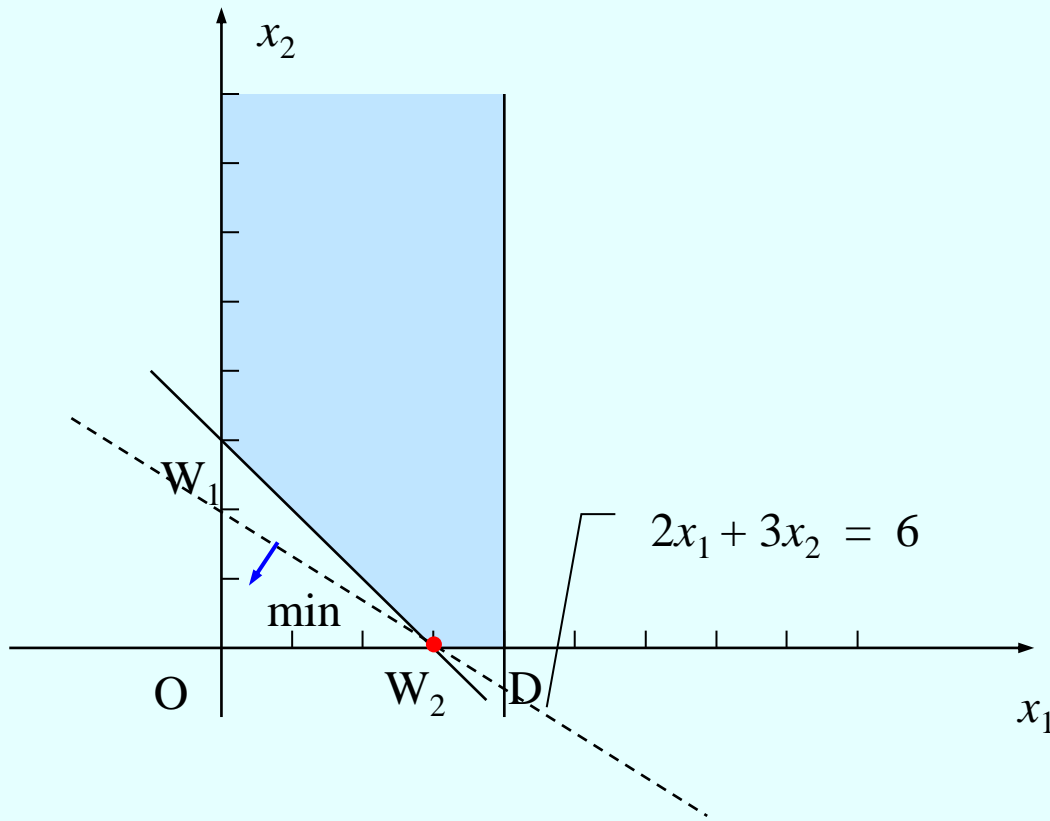
Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	-1	3
$c - z$		-1	0	0	3	9

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (5/10)

Zadanie minimalizacji



1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (6/10)

Przykład 1.6

Zużycie środka S_3 nie może przekraczać 16 jednostek, łączna wielkość produkcji nie może być mniejsza od 3 jednostek. Koszty jednostkowe, związane z wytwarzaniem zarówno produktu P_1 , jak i P_2 wynoszą 2.

Znaleźć plan produkcji, minimalizujący koszty.

$$2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$

$$4x_1 \leq 16$$

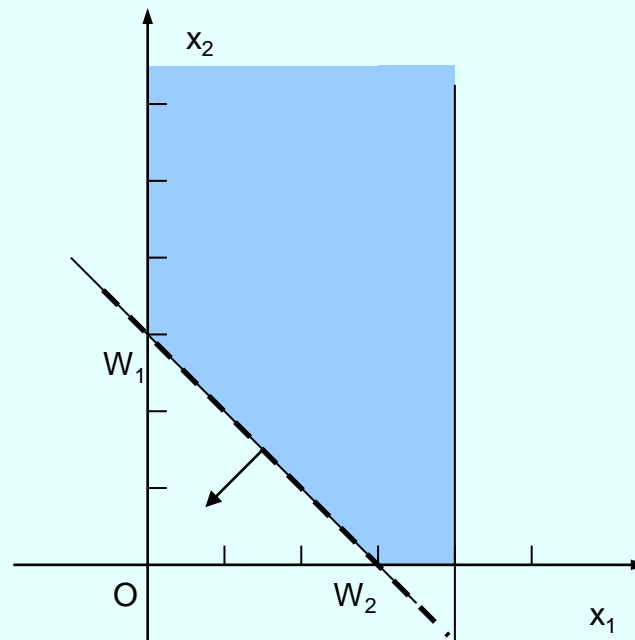
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (7/10)

Metoda geometryczna



W_1 i W_2 - Alternatywne bazowe rozwiązania optymalne

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (8/10)

Postać bazowa i tablica simpleksowa

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\rightarrow \min \\ 4x_1 + x_3 &\leq 16 \\ x_1 + x_2 - x_4 &\geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$cx \rightarrow \min$		2	2	0	0	b	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4		
W ₁ {	x_3	0	4	0	1	0	16
	x_2	2	1	1	0	-1	3
$c - z$		0	0	0	2	6	



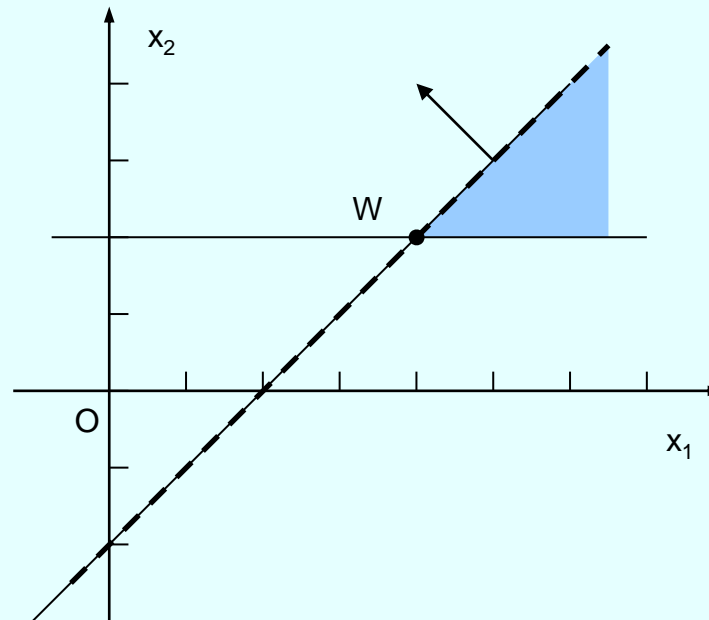
Wprowadzając do bazy x_1 otrzymamy W_2

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (9/10)

Przykład 1.7

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\rightarrow \max \\x_1 - x_2 &\geq 2 \\x_2 &\geq 2 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



Nieograniczona krawędź optymalna

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.4. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych (10/10)

Postać bazowa i tablica simpleksowa

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dodając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 - x_2 \rightarrow \max \\ x_1 - x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 - x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$cx \rightarrow \max$		1	-1	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	0	-1	-1	4
x_2	-1	0	1	0	-1	2
$c - z$		0	0	1	0	2

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

1.4.5. Reguły postępowania w metodzie simpleks (1/1)

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego.
2. Ocena optymalności rozwiązania.
3. Badanie niesprzeczności zadania.
4. Identyfikacja rozwiązań alternatywnych.
5. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy.
6. Badanie nieograniczoności funkcji celu i istnienia krawędzi optymalnej.
7. Wybór zmiennej usuwanej z bazy.
8. Sprowadzenie warunków ograniczających do postaci bazowej względem nowej bazy.

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (1/4)

Przykład 1.8

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk z wytworzenia jednostki P_1 wynosi c_1 .

Model matematyczny:

Funkcja celu:

$$c_1x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

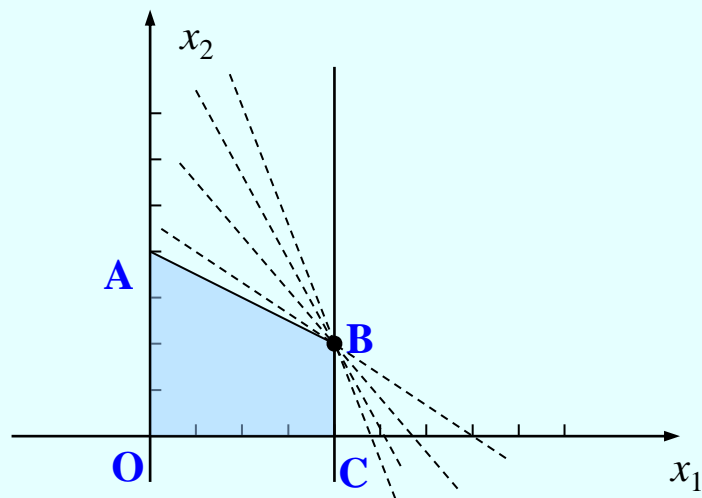
1.5. Analiza wrażliwości

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (2/4)

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \rightarrow \max$		c_1	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	-1,5	$-0,25c_1 + 0,375$	$4c_1 + 6$

$$-0,25c_1 + 0,375 \leq 0 \quad \text{czyli} \quad c_1 \geq 1,5$$



1.5. Analiza wrażliwości

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (3/4)

Przykład 1.9

W rozpatrywanym w przykładzie 1.1 zadaniu programowania produkcji zysk z wytworzenia jednostki P_2 wynosi c_2 .

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \rightarrow \max$		2	c_2	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0,5c_2$	$0,125c_2 - 0,5$	$8 + 3c_2$

$$-0,5c_2 \leq 0 \quad \text{i} \quad 0,125c_2 - 0,5 \leq 0$$

$$c_2 \in [0, 4]$$

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.1. Współczynniki funkcji celu (4/4)

Przykład 1.10

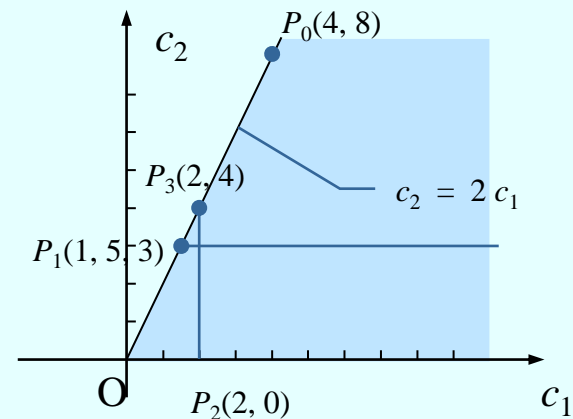
Łączna analiza wrażliwości dla produktów P_1 i P_2 .

$cx \rightarrow \max$		c_1	c_2	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0,5c_2$	$0,125c_2 - 0,25c_1$	$8 + 3c_2$

$$-0,5c_2 \leq 0$$

$$0,125c_2 - 0,25c_1 \leq 0$$

$$c_2 \geq 0, \text{ i } c_2 \geq 2c_1$$



1.5. Analiza wrażliwości

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (1/4)

Przykład 1.11

Po znalezieniu rozwiązania optymalnego zadania z przykładu 1.1 okazało się, że dostępna ilość jednego ze środków uległa zmianie.

W jakim przedziale powinna się znajdować ta wartość, by znaleziona uprzednio baza optymalna generowała rozwiązanie dopuszczalne?

$cx \rightarrow \max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	-1,5	-0,125	14

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (1/5)

Macierz odwrotna do postaci bazowej

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Pierwsza iteracja

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	2	1	0	0	14
x_4	1	2	0	1	0	8
x_5	4	0	0	0	1	16

Rozwiązanie
optymalne

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	1	0	0	0	0,25	4

$$\mathbf{A}_B = \begin{matrix} & x_3 & x_2 & x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (3/5)

Środek S1

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad x_B = A_B^{-1} \bar{b} \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 - 8 - 4 \geq 0, \text{ czyli } b_1 \geq 12.$$

Wymagana ilość środka S1 jest z przedziału $[12, \infty)$

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (4/5)

Środek S2

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad x_B = A_B^{-1} \bar{b} \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ b_2 \\ 16 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ b_2 \\ 16 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd

$$14 - b_2 - 4 \geq 0, \text{ czyli } b_2 \leq 10$$

$$0,5b_2 - 2 \geq 0, \text{ czyli } b_2 \geq 4$$

$$4 \leq b_2 \leq 10.$$

Wymagana ilość środka S2 jest z przedziału [4, 10].

1.5. Analiza wrażliwości

1.5.2. Współczynniki wektora wyrazów wolnych (5/5)

Środek S3

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad x_B = A_B^{-1} \bar{b} \geq 0$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1} \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ b_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd

$$14 - 8 - 0,25b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \leq 24$$

$$4 - 0,125b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \leq 32$$

$$0,25b_3 \geq 0, \text{ czyli } b_3 \geq 0$$

$$0 \leq b_3 \leq 24$$

Wymagana ilość środka S3 jest z przedziału $[0, 24]$.

1.6. Zadanie minimalizacji (1/5)

Przykład 1.12

Zadanie programowania produkcji

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P ₁	P ₂	
S ₁	2	2	14
S ₂	1	2	8
S ₃	4	0	16
Koszty	2	3	

Minimalny łączny rozmiar produkcji to 3 jednostki.
Należy zaplanować produkcję zakładu w taki sposób, aby zminimalizować koszty produkcji .

1.6. Zadanie minimalizacji (2/5)

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

x_1 - planowany rozmiar produkcji produktu P_1 ,

x_2 - planowany rozmiar produkcji produktu P_2 .

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

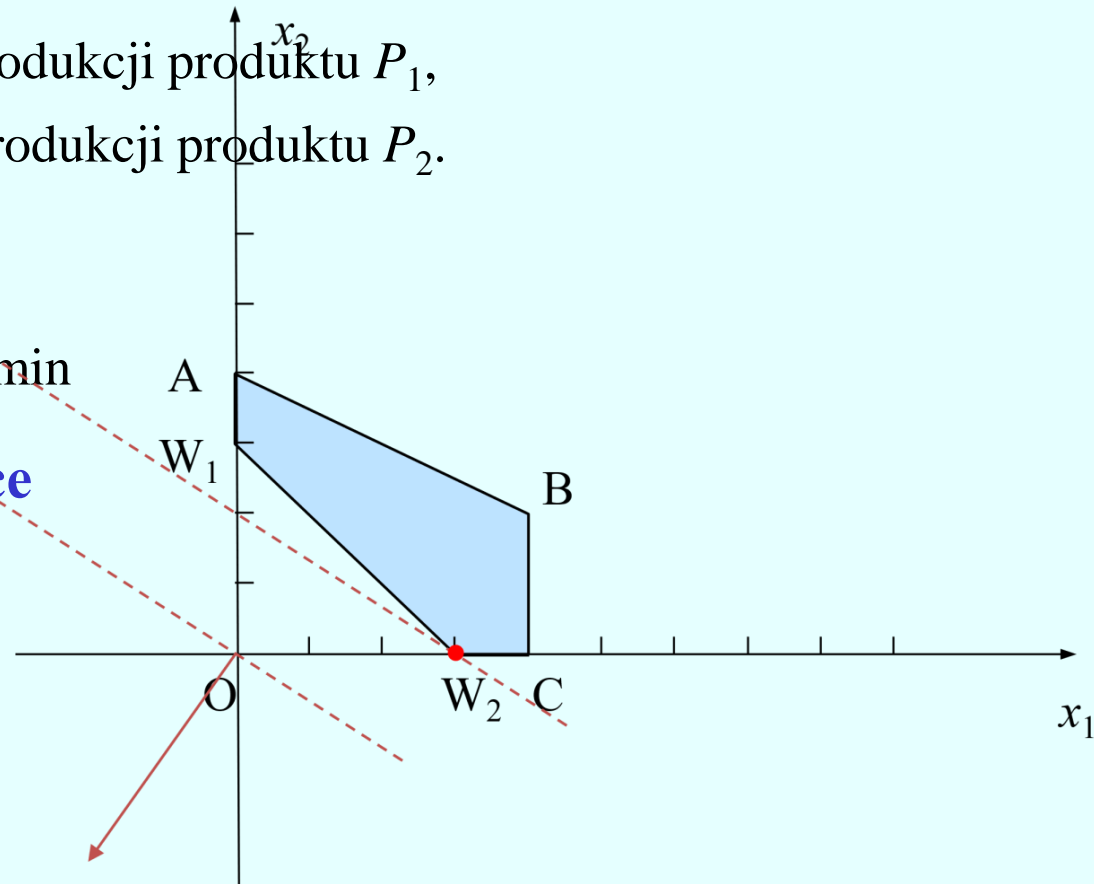
$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



1.6 Zadanie minimalizacji (3/5)

Postać bazowa

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 + 3x_2 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,$$

$$4x_1 + x_5 = 16,$$

$$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 3,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Pierwsza tablica simpleksowa

cx-->min		2	3	0	0	0	0	300	b
Baza	c _B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	
x ₃	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x ₄	0	1	4	0	1	0	0	0	8
x ₅	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x ₇	300	1	1	0	0	0	0	1	3
c _i -z _j		-298	-297	0	0	0	300	0	900

Kryterium optymalności dla zadania minimalizacji

Jeżeli wartości wszystkich wskaźników optymalności są nieujemne, to rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne. Jeżeli choć jeden ze wskaźników optymalności jest ujemny, to istnieje możliwość poprawy tego rozwiązania.

Kryterium wejścia dla zadania minimalizacji

Wybieramy najmniejszą wartość wskaźnika optymalności. Odpowiadającą mu zmienną wprowadzamy do nowej bazy. Jeżeli najmniejszej wartości wskaźnika optymalności odpowiada więcej niż jedna zmienna, to do nowej bazy wprowadzamy zmienną o najniższym numerze.

Kryterium wyjścia dla zadania minimalizacji

Obliczamy ilorazy kolejnych wyrazów wolnych przez odpowiadające im elementy kolumny wchodzącej do bazy dla tych elementów kolumny wprowadzanej do bazy, które są dodatnie. Bazę opuszcza zmienna, dla której odpowiadający iloraz jest najmniejszy.

1.6. Zadanie minimalizacji (5/5)

Ostatnia tablica simpleksowa

cx-->min		2	3	0	0	0	0	300	
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
x_3	0	0	0	1	0	0	2	-2	8
x_4	0	0	1	0	1	0	1	-1	5
x_5	0	0	-4	0	0	1	4	-4	4
x_1	2	1	1	0	0	0	-1	1	3
$c_i - z_i$		0	1	0	0	0	2	298	6

Ponieważ wszystkie wskaźniki optymalności są nieujemne, a w ostatniej bazie nie pojawia się zmienna sztuczna, istnieje rozwiązanie zadania wyjściowego. Mamy:

$$x_1=3, \quad x_2=0, \quad x_3=8, \quad x_4=4, \quad x_5=4, \quad x_6=0$$

Wartość funkcji celu wynosi 6. Brak rozwiązań optymalnych alternatywnych.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.1. Symetryczne zadania dualne (1/2)

Przykład 1.13

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P ₁	P ₂	
S ₁	2	2	14
S ₂	1	2	8
S ₃	4	0	16
Zyski	2	3	

Zminimalizować wartość posiadanych zasobów środków, przy czym wartość środków potrzebnych na wytworzenie jednostki każdego z produktów jest nie mniejsza od zysku jednostkowego dla tego produktu.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.1. Symetryczne zadania dualne (2/2)

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

y_1 - cena środka S_1

y_2 - cena środka S_2

y_3 - cena środka S_3

Funkcja celu

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.2. Zasady tworzenia pary zadań dualnych 1/5)

Symetryczne zadania dualne

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\2x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\4x_1 &\leq 16 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\rightarrow \min \\2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\2y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\y_1, y_2, y_3 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = [2 \quad 3] \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{cx} &\rightarrow \max \\ \mathbf{Ax} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{yb} &\rightarrow \min \\ \mathbf{yA} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.2. Zasady tworzenia pary zadań dualnych 2/5)

Symetryczne zadań dualne

1. Każdemu warunkowi ograniczającemu jednego z problemów odpowiada zmienna decyzyjna drugiego. Zmienną tę nazwiemy **zmienną komplementarną** do danego warunku ograniczającego.
2. Każdej nieujemnej zmiennej decyzyjnej jednego z problemów odpowiada warunek ograniczający drugiego. Warunek ten nazwiemy **warunkiem komplementarnym** do danej zmiennej decyzyjnej.
3. **Wektor współczynników funkcji celu** w jednym zadaniu staje się **wektorem wyrazów wolnych** w drugim i odwrotnie, wektor wyrazów wolnych w jednym zadaniu jest wektorem współczynników funkcji celu w drugim z nich.
4. **Kierunki optymalizacji** dla zadań: prymalnego i dualnego są przeciwne. O ile zadanie prymalne jest zadaniem maksymalizacji, to w zadaniu dualnym funkcję celu minimalizujemy.
5. **Zwroty nierówności** w warunkach ograniczających zadania prymalnego są przeciwne do zwrotów nierówności warunków ograniczających zadania dualnego.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.2. Zasady tworzenia pary zadań dualnych (3/5)

Niesymetryczne zadania dualne

1. Kierunki optymalizacji dla zadań dualnych są przeciwne.
2. Wektor współczynników przy funkcji celu w jednym zadaniu staje się wektorem wyrazów wolnych w drugim, i odwrotnie, wektor wyrazów wolnych w jednym zadaniu jest wektorem współczynników przy funkcji celu w drugim z nich.
3. Macierz współczynników w zadaniu dualnym jest macierzą transponowaną macierzy współczynników w zadaniu prymalnym.
4. Każdemu warunkowi ograniczającemu jednego z problemów odpowiada zmienna decyzyjna drugiego. Zmienną tę nazwiemy zmienną komplementarną do danego warunku ograniczającego.
5. Każdej nieujemnej zmiennej decyzyjnej jednego z problemów odpowiada warunek ograniczający drugiego. Warunek ten nazwiemy warunkiem komplementarnym do danej zmiennej decyzyjnej.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.2. Zasady tworzenia pary zadań dualnych (4/5)

6. Ograniczenia w zadaniu prymalnym i dualnym są następujące:

a). Jeżeli w zadaniu prymalnym i -te ograniczenie jest typu „ \leq ” to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym spełnia związek $y_i \geq 0$.

b). Jeżeli w zadaniu prymalnym i -te ograniczenie jest typu „ \geq ”, to odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym spełnia związek $y_i \leq 0$.

c). Jeżeli w zadaniu prymalnym i -te ograniczenie jest w postaci równości, a odpowiadająca mu zmienna w zadaniu dualnym y_i jest nieograniczona co do znaku.

d). Jeżeli w zadaniu prymalnym $x_i \geq 0$, to odpowiadające tej zmiennej ograniczenie w zadaniu dualnym jest typu „ \geq ”.

e). Jeżeli w zadaniu prymalnym $x_i \leq 0$, to odpowiadające tej zmiennej ograniczenie w zadaniu dualnym jest typu „ \leq ”.

f). Jeżeli w zadaniu prymalnym zmienna x_i jest nieograniczona co do znaku, to odpowiadające tej zmiennej ograniczenie w zadaniu dualnym ma postać równości.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.2. Zasady tworzenia pary zadań dualnych (5/5)

Zadanie prymalne

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\rightarrow \max \\2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 15 \\2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\geq 18 \\-2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 &\text{ - dowolne}\end{aligned}$$

Przykład 1.14

Zadanie dualne

$$\begin{aligned}15y_1 + 18y_2 + 5y_3 &\rightarrow \min \\2y_1 + 2y_2 - 2y_3 &\geq 3 \\-2y_1 - 2y_2 - y_3 &\leq 2 \\3y_1 + 3y_2 + y_3 &= 4 \\y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 &\text{ - dowolne}\end{aligned}$$

- ZP jest zadaniem typu *max* więc ZD jest zadaniem typu *min*.
- Pierwsze ograniczenie w ZP jest typu „ \leq ”, więc w ZD $y_1 \geq 0$.
- Drugie ograniczenie w ZP jest typu „ \geq ”, więc w ZD $y_2 \leq 0$.
- Trzecie ograniczenie w ZP jest typu „ $=$ ”, więc w ZD y_3 przyjmuje dowolne wartości.
- W ZP $x_1 \geq 0$, stąd pierwsze ograniczenie w ZD jest typu „ \geq ”.
- W ZP $x_2 \leq 0$, stąd drugie ograniczenie w ZD jest typu „ \leq ”.
- W ZP x_3 jest dowolna, stąd trzecie ograniczenie w ZD jest typu „ $=$ ”.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.3. Własności pary zadań dualnych (1/5)

Twierdzenie 1

Jeżeli x i y są dowolnymi rozwiązaniami dopuszczalnymi odpowiednio zadania prymalnego i dualnego, to wartości funkcji celu w tych zadaniach spełniają związek:

$$cx \leq yb$$

Twierdzenie 2

Dla rozwiązań optymalnych x , y odpowiednio zadania prymalnego i dualnego zachodzi związek:

$$cx = yb$$

Twierdzenie 3 (o komplementarności)

Jeżeli x i y są rozwiązaniami optymalnymi odpowiednio zadania prymalnego i dualnego, wówczas zachodzą związki:

$$y(b - Ax) = 0$$

$$(yA - c)x = 0$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.3. Własności pary zadan dualnych (2/5)

Zastosowanie twierdzenia o komplementarności

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) &= [y_1, y_2, y_3] \left(\begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 14 - 2x_1 - 2x_2 \\ 8 - x_1 - 2x_2 \\ 16 - 4x_1 \end{bmatrix} = \\ &= y_1(14 - 2x_1 - 2x_2) + y_2(8 - x_1 - 2x_2) + y_3(16 - 4x_1) = 0 \\ & \quad y_1(14 - 2x_1 - 2x_2) = 0 \\ & \quad y_2(8 - x_1 - 2x_2) = 0 \\ & \quad y_3(16 - 4x_1) = 0 \end{aligned}$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.3. Własności pary zadań dualnych (3/5)

Zastosowanie twierdzenia o komplementarności (c.d.)

$$\begin{aligned}(\mathbf{yA} - \mathbf{c})\mathbf{x} &= \left([y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - [2 \quad 3] \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= [2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2 \quad 2y_1 + 2y_2 - 3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= (2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 + (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0 \\ &\quad (2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 = 0 \\ &\quad (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0\end{aligned}$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.3. Własności pary zadań dualnych (4/5)

Przykład 1.13

Zadanie prymalne

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \max \\2x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\4x_1 &\leq 16 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Zadanie dualne

$$\begin{aligned}14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\rightarrow \min \\2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\2y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\y_1, y_2, y_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Dane jest rozwiązanie optymalne zadania prymalnego: $x_1=4$, $x_2=2$.
Znaleźć rozwiązanie optymalne zadania dualnego.

**Warunki ograniczające
zadania prymalnego**

$$2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 < 14 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$\begin{aligned}y_2 + 4y_3 &= 2 \\2y_2 &= 3\end{aligned}$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1.5, y_3 = 0.125$$

**Warunki ograniczające
zadania dualnego**

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 = 2$$

$$2y_1 + 2y_2 = 3$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.3. Własności pary zadań dualnych (5/5)

Przykład 1.16

Rozwiązać zadanie

$$-12x_2 - 12^{1/4}x_3 + 8^{1/2}x_4 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + x_2 - 1^{1/2}x_3 - x_4 \leq -2$$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 \leq -3$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0$$

Otrzymujemy: $y_1 = 4^{1/2}$, $y_2 = 5^{1/2}$.

Optymalna wartość f. celu = $-25^{1/2}$.

Z twierdzenia o komplementarności:

$$x_1=0, x_2 = 5/18, x_3 = 18/11, x_4=0$$

Zadanie dualne:

$$-2y_1 - 3y_2 \rightarrow \min$$

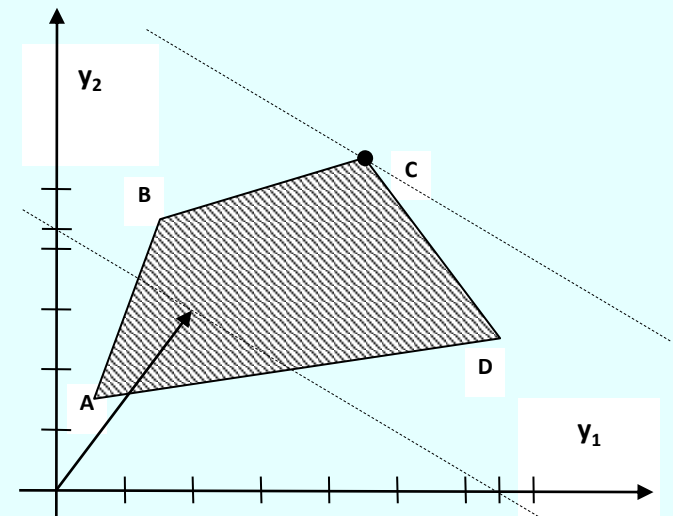
$$3y_1 + y_2 \geq 0$$

$$y_1 - 3y_2 \geq -12$$

$$-1^{1/2}y_1 - y_2 \geq -12^{1/4}$$

$$-y_1 + 6y_2 \geq 8^{1/2}$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$



1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.4. Ceny dualne i analiza wrażliwości w kształtowaniu optymalnych planów produkcji (1/5)

Przykład 1.17

Rozwiązanie optymalne zadania, sformułowanego w przykładzie 1.1 zaleca przyjęcie planu produkcji, w którym należy wytworzyć

$x_1 = 4$ jednostki produktu P_1

$x_2 = 2$ jednostki produktu P_2 .

Zysk wynosi wówczas 14 jednostek.

Zaistniały możliwości zwiększenia dostępności jednego ze środków produkcji: S_1 , S_2 lub S_3 .

Która z nich jest najkorzystniejsza przy założeniu, że będziemy wytwarzać zarówno produkt P_1 , jak i P_2 ?

Δf_i – przyrost wartości funkcji celu, związany z przyrostem Δb_i i -tego zasobu.

$$\Delta f_i = y_i \cdot \Delta b_i.$$

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.4. Ceny dualne i analiza wrażliwości w kształtowaniu optymalnych planów produkcji (2/5)

Środek S_1

Początkowa dostępność środka S_1 : $b_1 = 14$

Przedział zmienności: b_1 : $[12, \infty)$.

Cena dualna: $y_1 = 0$

Przyrost wartości funkcji celu: $\Delta f_1 = y_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot \Delta b_1 = 0$

Zwiększenie dostępności środka S_1 nie zwiększy zysku.

Środek S_2

Początkowa dostępność $b_2 = 8$

Przedział zmienności b_2 : $[4, 10]$.

Maksymalny przyrost: $\Delta b_2 = 10 - 8 = 2$.

Cena dualna: $y_2 = 1,5$

Przyrost wartości funkcji celu

$$\Delta f_2 = y_2 \cdot \Delta b_2 = 1,5 \cdot 2 = 3.$$

Zwiększając ilości środka S_2 do 10 jednostek otrzymujemy zysk $14 + 3 = 17$.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.4. Ceny dualne i analiza wrażliwości w kształtowaniu optymalnych planów produkcji (3/5)

Środek S_3

Początkowa dostępność $b_3 = 16$

Przedział zmienności b_3 : $[12, 24]$.

Maksymalny przyrost:

$$\Delta b_3 = 24 - 16 = 8.$$

Cena dualna: $y_3 = 0,125$

Przyrost wartości funkcji celu:

$$\Delta f_3 = y_3 \cdot \Delta b_3 = 0,125 \cdot 8 = 1.$$

Zwiększając ilości środka S_3 do 24 otrzymujemy zysk $14 + 1 = 15$.

Przy założeniu, że będziemy wytwarzać zarówno produkt P_1 , jak i P_2 najkorzystniej zwiększyć ilość środka S_2 do ilości maksymalnej 10 jednostek.

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.4. Ceny dualne i analiza wrażliwości w kształtowaniu optymalnych planów produkcji (4/5)

Przykład 1.18

Po znalezieniu rozwiązania zadania planowania produkcji jednostkowy zysk dla produktu P_2 uległ zmianie i wynosi $c_2 = 4$.

Zaistniała ponownie możliwość zwiększenia dostępności jednego ze środków produkcji S_1 , S_2 lub S_3 . Która z nich jest najkorzystniejsza przy założeniu, że struktura rozwiązania optymalnego pozostanie niezmienną?

Wykorzystamy wzór:

$$y = c_B A_B^{-1}$$

gdzie

A_B^{-1} - macierz odwrotna do macierzy bazowej A_B dla rozwiązania optymalnego zadania prymalnego,

c_B - wektor współczynników funkcji celu zadania prymalnego stojących przy zmiennych bazowych w bazie A_B .

1.7. Dualizm w programowaniu liniowym

1.7.4. Ceny dualne i analiza wrażliwości w kształtowaniu optymalnych planów produkcji (5/5)

Baza	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	-1	-0,25	2
x_2	0	1	0	0,5	-0,125	2
x_1	1	0	0	0	0,25	4

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} \quad y = [0 \ 4 \ 2] \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0,25 \\ 0 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0,25 \end{bmatrix} = [0 \ 2 \ 0]$$

Dla S_1 i dowolnego przyrostu Δb_1 mamy $\Delta f_1 = y_1 \cdot \Delta b_1 = 0 \cdot \Delta b_1 = 0$

Dla S_2 maksymalny przyrost $\Delta b_2 = 2$, stąd $\Delta f_2 = y_2 \cdot \Delta b_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Dla środka S_3 maksymalny przyrost $\Delta b_3 = 8$, stąd $\Delta f_3 = y_3 \cdot \Delta b_3 = 0 \cdot 8 = 0$.

Dla $c_2 = 4$ jedynie $\Delta b_2 = 2$ pozwala na zwiększeniu zysku, który wynosi $16 + 4 = 20$.

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (1/6)

Przykład 1.19

1550 roboczogodzin przypisanych jest konkretnym wydziałom, a 900 godzin może być przydzielonych według uznania menedżera.

Wydział	Ilość roboczogodzin potrzebna do produkcji 100 szklanek	
	Szklanki I rodzaju	Szklanki II rodzaju
1	0,06	0,08
2	0,07	0,07
3	0,09	0,06
4	0,09	0,03
Zysk	2zł/sztukę	2,5 zł/szt

Przydział zasobów pracy do wydziałów	Dostępna liczba godzin
Ilość roboczogodzin wyłącznie dla wydziału 1	500
Ilość roboczogodzin wyłącznie dla wydziału 2	400
Ilość roboczogodzin wyłącznie dla wydziału 3	450
Ilość roboczogodzin wyłącznie dla wydziału 4	200
Ilość roboczogodzin dla wydziału 1 lub 2	550
Ilość roboczogodzin dla wydziału 3 lub 4	350

Przygotowywany jest plan produkcji na następny miesiąc. W jaki sposób należy rozdzielić godziny, będące w gestii menedżera i jaką postać będzie miał optymalny plan produkcji, maksymalizujący zysk?

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (2/6)

Cel

Ustalenie takiego planu produkcji dla poszczególnych wydziałów, który maksymalizuje zysk firmy.

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowany rozmiar produkcji szklanek I rodzaju na wydziale 1,
 x_2 – planowany rozmiar produkcji szklanek II rodzaju na wydziale 1,
 x_3 – planowany rozmiar produkcji szklanek I rodzaju na wydziale 2,
 x_4 – planowany rozmiar produkcji szklanek II rodzaju na wydziale 2,
 x_5 – planowany rozmiar produkcji szklanek I rodzaju na wydziale 3,
 x_6 – planowany rozmiar produkcji szklanek II rodzaju na wydziale 3,
 x_7 – planowany rozmiar produkcji szklanek I rodzaju na wydziale 4,
 x_8 – planowany rozmiar produkcji szklanek II rodzaju na wydziale 4.
(w setkach sztuk),

x_9 – liczba godzin, będących do dyspozycji menedżera dla wydziału 1,
 x_{10} – liczba godzin, będących do dyspozycji menedżera dla wydziału 2,
 x_{11} – liczba godzin, będących do dyspozycji menedżera dla wydziału 3,
 x_{12} – liczba godzin, będących do dyspozycji menedżera dla wydziału 4.

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (3/6)

Funkcja celu

$$200x_1 + 250x_2 + 200x_3 + 250x_4 + 200x_5 + 250x_6 + 200x_7 + 205x_8 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

- ograniczenie czasu pracy dla wydziału 1:
 $0,06x_1 + 0,08x_2 \leq 500 + x_9$
- ograniczenie czasu pracy dla wydziału 2:
 $0,07x_3 + 0,07x_4 \leq 400 + x_{10}$
- ograniczenie czasu pracy dla wydziału 3:
 $0,09x_5 + 0,06x_6 \leq 450 + x_{11}$
- ograniczenie czasu pracy dla wydziału 4:
 $0,02x_{17} + 0,03x_8 \leq 200 + x_{12}$

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (4/6)

- ograniczenie czasu pracy będącego do dyspozycji menagera łącznie dla wydziału 1 i 2:

$$x_9 + x_{10} = 550,$$

- ograniczenie czasu pracy będącego do dyspozycji menagera łącznie dla wydziału 3 i 4:

$$x_{11} + x_{12} = 350$$

- warunki nieujemności

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0$$

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 8\,333,33 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_4 = 13\,571,43$$

$$x_5 = 0 \quad x_6 = 7\,500 \quad x_7 = 0 \quad x_8 = 18\,333,33$$

$$x_9 = 0 \quad x_{10} = 550 \quad x_{11} = 0 \quad x_{12} = 350.$$

Maksymalna wartość funkcji celu jest równa 11 517 857,14.

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (5/6)

Interpretacja rozwiązania

- na wydziale 1 należy wyprodukować 833 333 szklanek I rodzaju i nie należy produkować szklanek II rodzaju,
- na wydziale 2 nie należy produkować szklanek I rodzaju i należy wyprodukować 3 940 475 szklanek II rodzaju,
- na wydziale 3 nie należy produkować szklanek I rodzaju i należy wyprodukować 750 000 szklanek II rodzaju,
- na wydziale 4 należy wyprodukować 2 750 000 szklanek, I rodzaju i nie należy produkować szklanek II rodzaju.
- 500 roboczogodzin, pozostających do dyspozycji menedżera, które można przydzielić dla wydziału 1 lub 2 należy w całości przydzielić dla wydziału 2,
- 350 roboczogodzin, pozostających do dyspozycji menedżera, które można przydzielić dla wydziału 3 lub 4 należy w całości przydzielić dla wydziału 4.

1.8. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej

1.8.1. Planowanie produkcji z uwzględnieniem wykorzystania zasobów pracy (6/6)

Interpretacja rozwiązania (cd)

- optymalny plan produkcji przewiduje wyprodukowanie 833 333 szklanek I rodzaju oraz

$$1\ 357\ 143 + 750\ 000 + 2\ 750\ 000 = 3\ 940\ 475$$

szklanek II rodzaju. Zysk dla firmy przy zastosowaniu optymalnego planu produkcji wynosi

$$2 \cdot 833\ 333 + 2,5 \cdot 3\ 940\ 475 = 11\ 517\ 853,5 \text{ zł}$$

szklanek II rodzaju. Zysk dla firmy przy zastosowaniu optymalnego planu produkcji wynosi

$$2 \cdot 833\ 333 + 2,5 \cdot 3\ 940\ 475 = 11\ 517\ 853,5 \text{ zł}$$

1.8 Przykłady wykorzystania programowania liniowego

1.8.2. Zagadnienie diety (1/3)

Przykład 1.20

Składnik A - co najmniej 1000 jednostek,

Składnik B - co najmniej 800 jednostek,

Składnik C - co najmniej 1150 jednostek, co najwyżej 1700 jednostek.

Zawartość składników w paszach:

Rodzaj paszy	Składniki			Cena
	A	B	C	
Pasza 1	50	20	10	1800
Pasza 2	20	0	30	2200
Pasza 3	30	20	10	1300
Pasza 4	0	10	20	1500

Paszy 2 dostarczyć nie mniej niż 20 q,

Paszy 1 dostarczyć półtora razy więcej niż paszy 3,

Nie więcej niż 30 q paszy 3.

Jaką ilość pasz zakupić, by zminimalizować koszty wyżywienia 1 sztuki bydła?

1.8. Przykłady wykorzystania programowania liniowego

1.8.2. Zagadnienie diety (2/3)

Model matematyczny

Cel

Minimalizacja kosztów wyżywienia 1 sztuki bydła rocznie.

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowana ilość zakupionej paszy 1,

x_2 – planowana ilość zakupionej paszy 2,

x_3 – planowana ilość zakupionej paszy 3,

x_4 – planowana ilość zakupionej paszy 4,

1.9. Przykłady wykorzystania programowania liniowego

1.9.2. Zagadnienie diety (3/3)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1800x_1 + 2200x_2 + 1300x_3 + 1500x_4 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

$$\text{Składnik A:} \quad 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 \geq 1000$$

$$\text{Składnik B:} \quad 20x_1 + \quad + 20x_3 + 10x_4 \geq 800$$

$$\text{Składnik C:} \quad 10x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 20x_4 \geq 1150$$

$$10x_1 + 30x_2 + 10x_3 + 20x_4 \leq 1700$$

$$\text{Pasza 2:} \quad x_2 \geq 20$$

$$\text{Pasza 1 i 3:} \quad x_1 = 1,5x_3$$

$$\text{Pasza 3:} \quad x_3 \leq 30$$

$$\text{Warunki nieujemności: } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 21, x_2 = 20, x_3 = 14, x_4 = 10.$$

Optymalna wartość funkcji celu 115 000.

Interpretacja rozwiązania

Należy zakupić 21 q paszy 1, 20 q paszy 2, 14 q paszy 3, 10 q paszy 4.

Koszt związany z tym zakupem wynosi 115000 jednostek pieniężnych.

Pora na relaks

