Линейное программирование

Т. Тжаскалик

Введение в исследование операций

с применением компьютера

Математическая модель (1)

Пример 1.1.

Задача планирования производства

Ресурс	Изделия		Объем
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Доход	2	3	

Необходимо спланировать производство на предприятии так, чтобы максимизировать получаемый доход.

Математическая модель (2)

Решающие переменные

x_1 - планируемый объем производства изделия P_1,

x_2 - планируемый объем производства изделия P_2.

Целевая функция

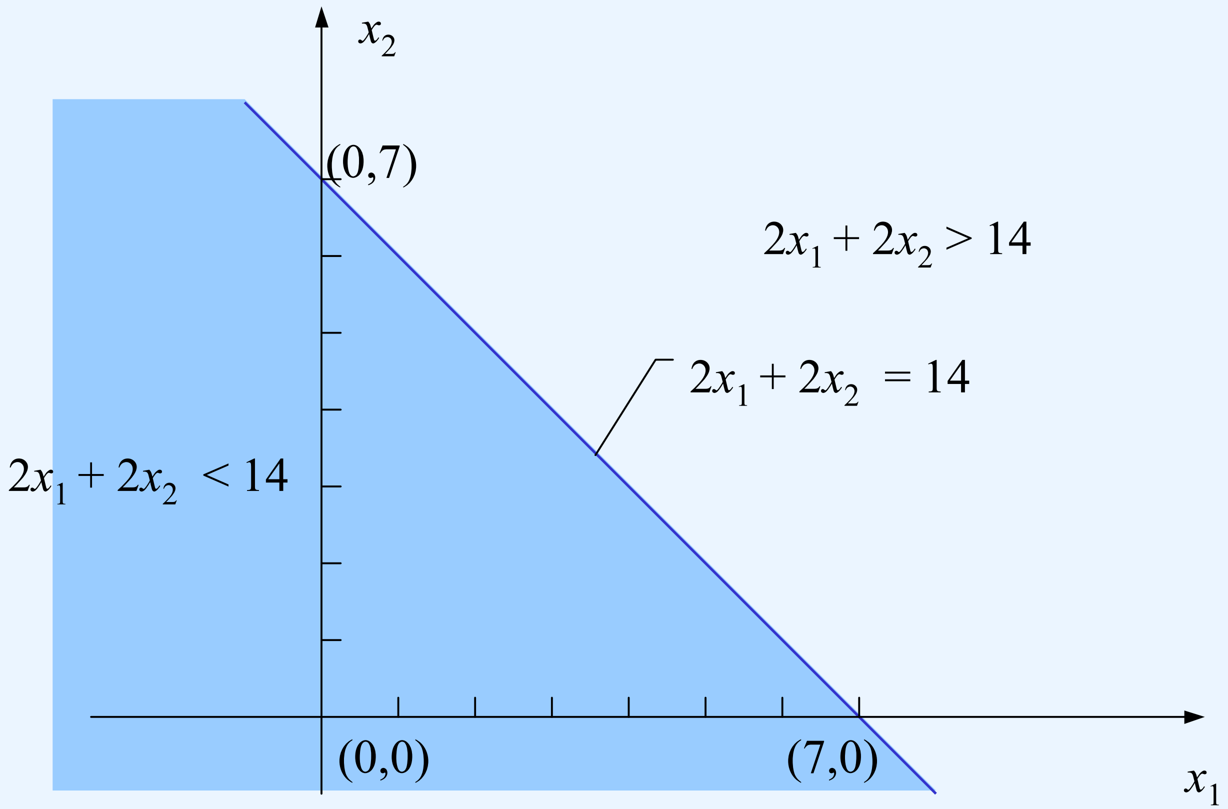
$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

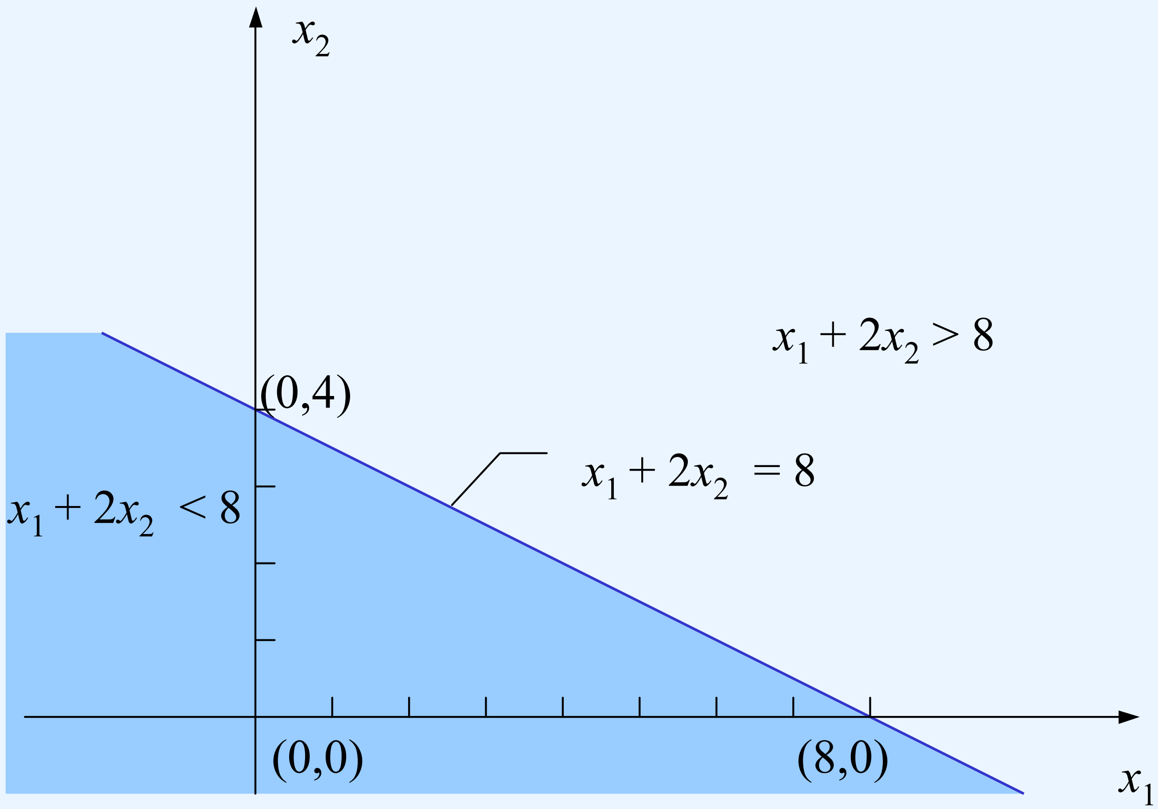
Ограничения (1)

$2x_1 + 2x_2 \leq 14$



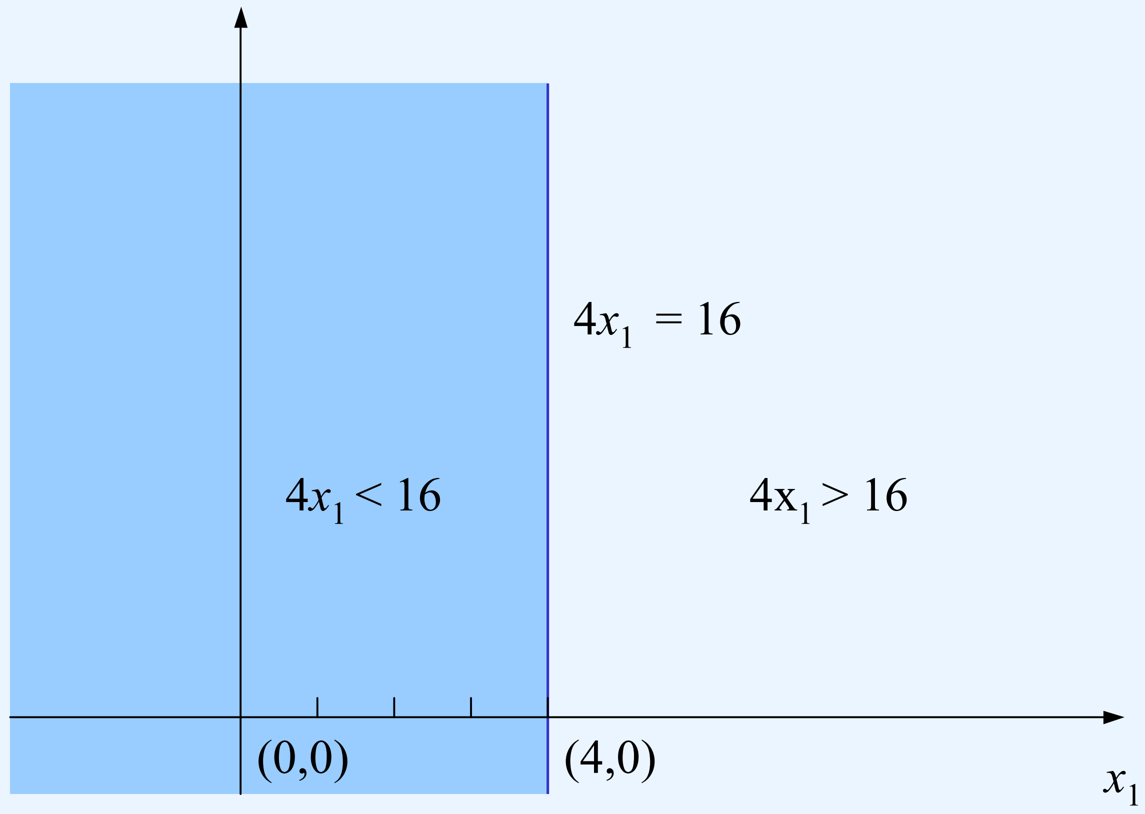
Ограничения (2)

$x_1 + 2x_2 \le 8$



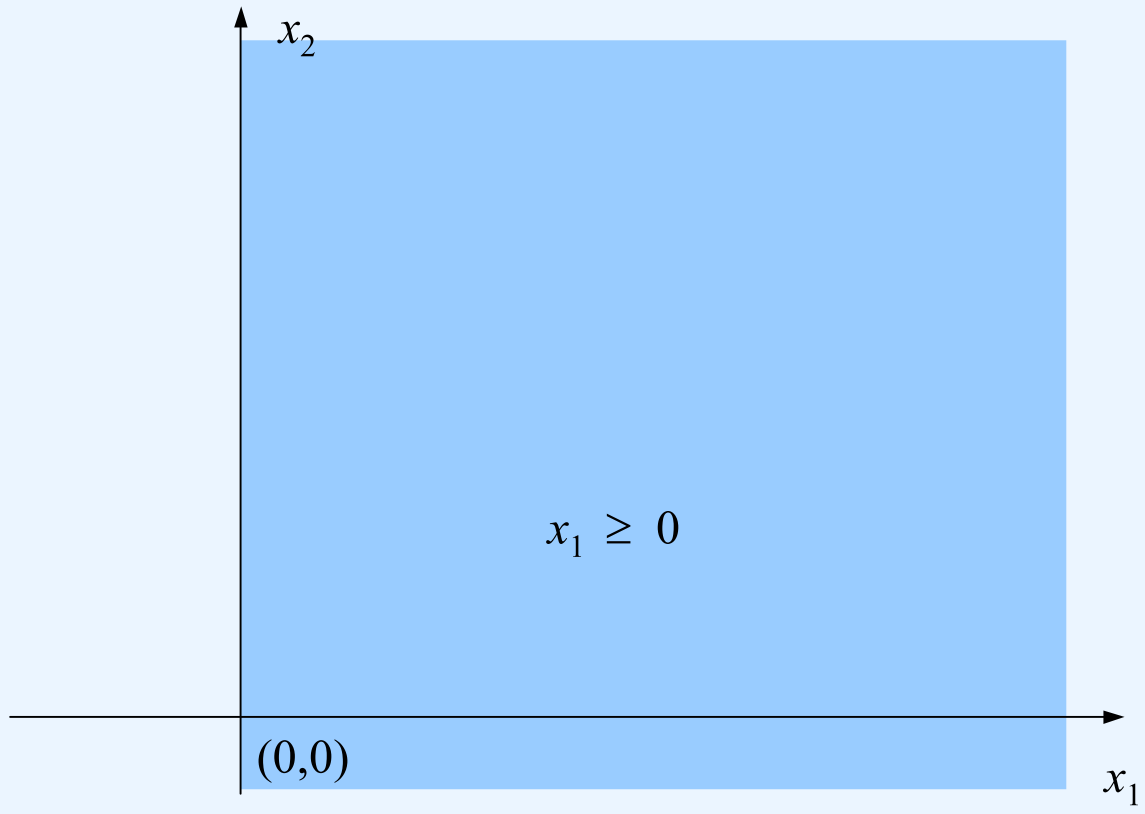
Ограничения (3)

$4x_1 \leq 16$



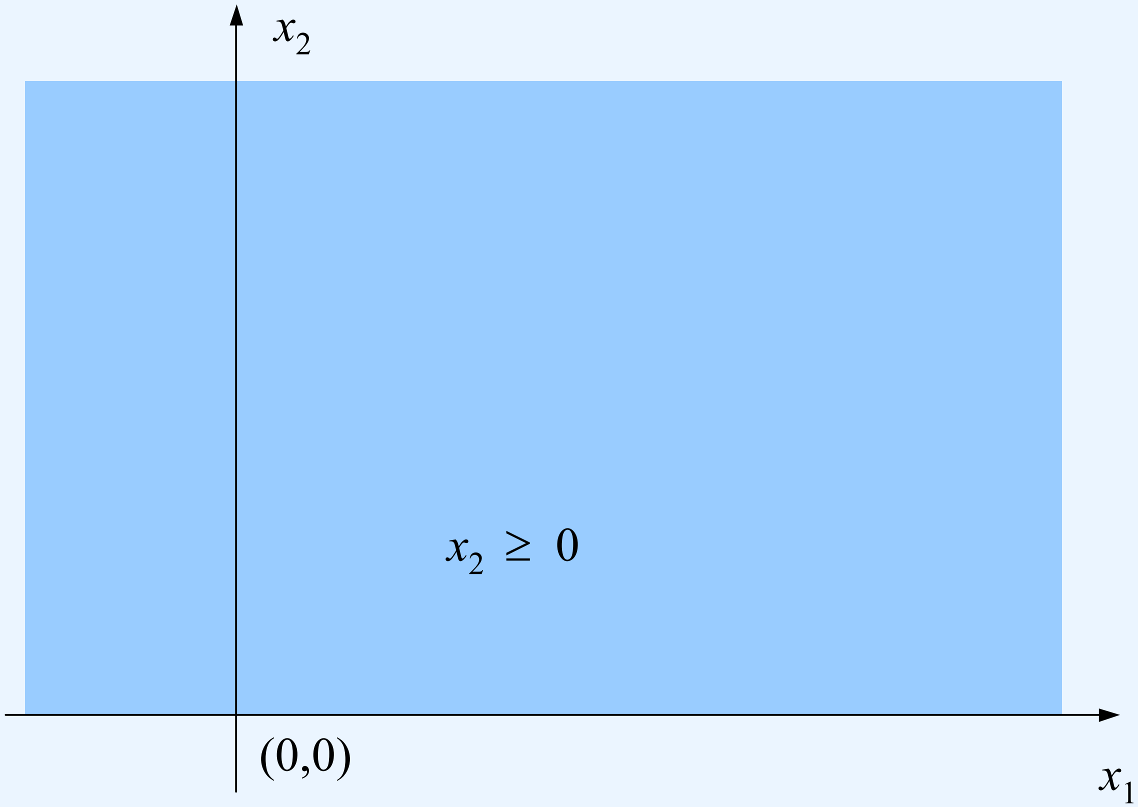
Ограничения (4)

$x_1 \geq 0$

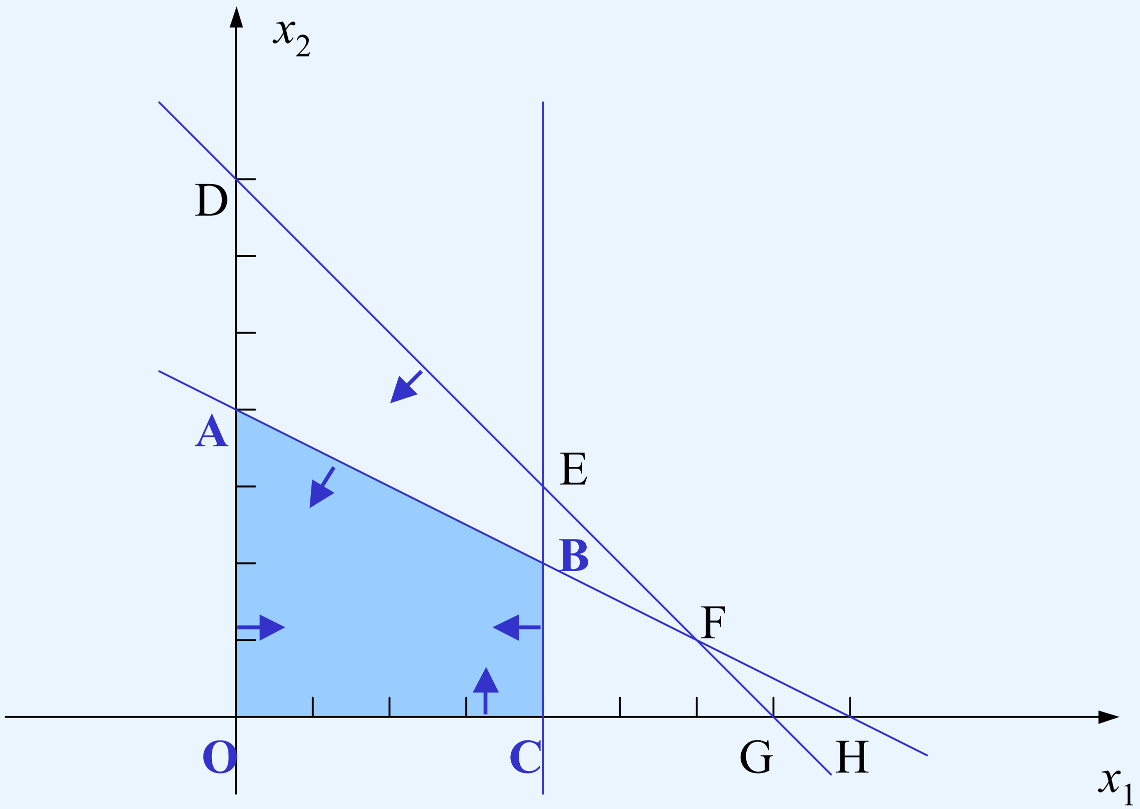


Ограничения (5)

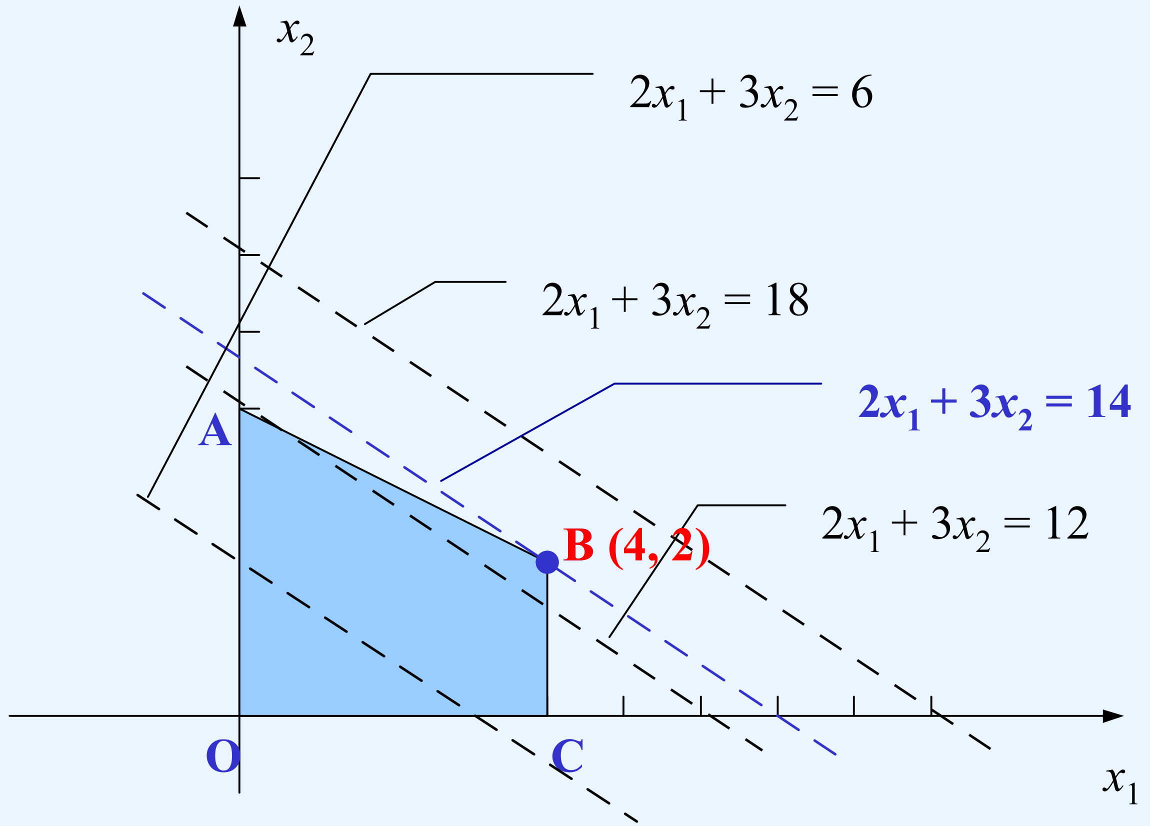
$x_2 \geq 0$



Множество допустимых решений



Геометрический метод



Оптимальное решение:

$x_1 = 4$ планируем производство 4 единиц изделия P_1

$x_2 = 2$ планируем производство 2 единиц изделия P_2

Балансовые переменные (1)

Ресурс S_1

$$2x_1 + 2x_2 \le 14$$

$$2\mathrm{x}_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

$$x_3 = 14 - 2x_1 - 2x_2 \ge 0$$

x_3 - неизрасходованный объем ресурса S_1

Балансовые переменные (2)

Ресурс S_2

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$\mathrm{x}_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_4 = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0$$

x_4 - неизрасходованный объем ресурса S_2

Балансовые переменные (3)

Ресурс S_3

$$4x_1 \le 16$$

$$4x_1 + x_5 = 16$$

$$x_5 = 16 - 4x_1 \ge 0$$

x_5 - неизрасходованный объем ресурса S_3

Стандартная форма

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \to \max}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= \ \ 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

Матричная форма

c - вектор целевой функции,

A - матрица коэффициентов,

b - вектор ограничений,

x - вектор переменных.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad &= 8 \\ 4x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

$$\boldsymbol{cx} \rightarrow \max$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

$$\boldsymbol{c} = [2 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Базисная форма

$$
\boldsymbol{A} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

x_3, x_4, x_5 - базисные переменные

x_1, x_2 - небазисные переменные

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\
4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Базисное допустимое решение

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 16$

Симплекс-таблица

$$\boldsymbol{cx} \to \max$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16

Элементарные преобразования

1. Деление обеих сторон любого ограничения на произвольное ненулевое число.

2. Сложение сторонами любого ограничения, умноженного на произвольное ненулевое число, с другим условием, умноженным на произвольное ненулевое число.

Элементарные преобразования используются для ограничений в форме равенства.

Симплекс-алгоритм

1. Найти первое допустимое базисное решение.
2. Оценить, оптимально оно или нет (критерий оптимальности).
3. Если решение не оптимально, то выбрать новое соседнее базисное решение. Для этого необходимо:

   - выбрать переменную, вводимую в базис (критерий ввода),
   - выбрать переменную, выводимую из базиса (критерий вывода)
   - преобразовать систему ограничений к базисной форме относительно нового базиса (элементарные преобразования),
   - вернуться к шагу 2.
4. Если полученное решение оптимально, завершить вычисления.

Соседний базис (1)

x_1: $0 \to 1$

Первое ограничение

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Поскольку $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, получаем:

$$2 + x_3 = 14$$

поэтому

$$x_3 = 12$$

Каждой добавленной единице переменной x_1 соответствует уменьшение значения базисной переменной x_3; такое изменение предопределяется значением коэффициента $a_{11} = 2$.

Соседний базис (2)

x_1: 0 → 1

Второе ограничение

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Поскольку $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, получаем:

$$1 + x_4 = 8$$

поэтому

$$x_4 = 7$$

Каждой добавленной единице переменной x_1 соответствует уменьшение значения базисной переменной x_4; такое изменение предопределяется значением коэффициента $a_{12} = 1$.

Соседний базис (3)

x_1: 0 → 1

Третье ограничение

$$4x_1 + x_5 = 16$$

Поскольку $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, получаем:

$$4 + x_5 = 16$$

поэтому

$$x_5 = 12$$

Каждой добавленной единице переменной x_1 соответствует уменьшение значения базисной переменной x_5; такое изменение предопределяется значением коэффициента $a_{13} = 4$.

Соседний базис (4)

x_1: 0 → 1

Увеличение значения целевой функции

$$c_1 = 2$$

Уменьшение значения целевой функции связано с уменьшением предыдущих значений базисных переменных

переменная $x_3: c_3 \cdot a_{11} = 0 \cdot 2 = 0$

переменная $x_4: c_4 \cdot a_{21} = 0 \cdot 1 = 0$

переменная $x_5: c_5 \cdot a_{31} = 0 \cdot 4 = 0$

т.е. $$z_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$$

Совокупное изменение:

$$c_1 - z_1 = 2 - 0 = 2$$

Показатели оптимальности

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

Критерий оптимальности

Если в задаче максимизации значения всех показателей оптимальности неотрицательны, то рассматриваемое решение оптимально.

Если хотя бы один из показателей оптимальности положителен, то текущее решение можно улучшить.

Критерий ввода

Выбираем наибольшее значение показателя оптимальности. В новый базис вводим соответствующую ему переменную.
Если наибольшему значению показателя оптимальности соответствует более одной переменной, то в новый базис вводим переменную с наименьшим номером.

Соседний базис (5)

В новый базис вводим переменную x_2

Первое ограничение:

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$$

Небазисная переменная x_1 равна 0, т.е.:

$$2x_2 + x_3 = 14$$

Когда переменная x_3 примет значение 0?

$$2x_2 = 14, \text{ т.е. } x_2 = 7 \qquad (b_1 : a_{21} = 7)$$

Наибольшее допустимое значение переменной x_2 для первого ограничения равно 7.

Соседний базис (6)

В новый базис вводим переменную x_2

Второе ограничение:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

Небазисная переменная x_1 равна 0, т.е.:

$$2x_2 + x_4 = 8$$

Когда переменная x_4 примет значение 0?

$$2x_2 = 8, \text{ т.е. } x_2 = 4 \qquad (b_2 : a_{22} = 4)$$

Наибольшее допустимое значение переменной x_2 для второго ограничения равно 4.

Соседний базис (7)

В новый базис вводим переменную x_2

<u>Третье ограничение:</u>

$$4x_1 + 0x_2 + x_5 = 16$$

Небазисная переменная x_1 равна 0, т.е.:

$$0x_2 + x_5 = 16$$

Когда переменная x_5 примет значение 0?

Поскольку коэффициент при x_2 равен 0, переменную x_5 нельзя вывести из базиса за счет введения в него переменной x_2.

Критерий вывода

Последовательно рассчитываем частные от деления свободных членов на соответствующие им положительные элементы столбца переменных, вводимых в базис.

Из базиса выводится та переменная, для которой соответствующее ей частное оказывается наименьшим.

Если минимальное значение частного встречается более одного раза, то из базиса выводится переменная с наименьшим номером.

Соседнее базисное решение

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	2	2	1	0	0	14	7
x_4	0	1	2	0	1	0	8	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16	-
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0		

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	0	1	–1	0	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$							

Итерация 2

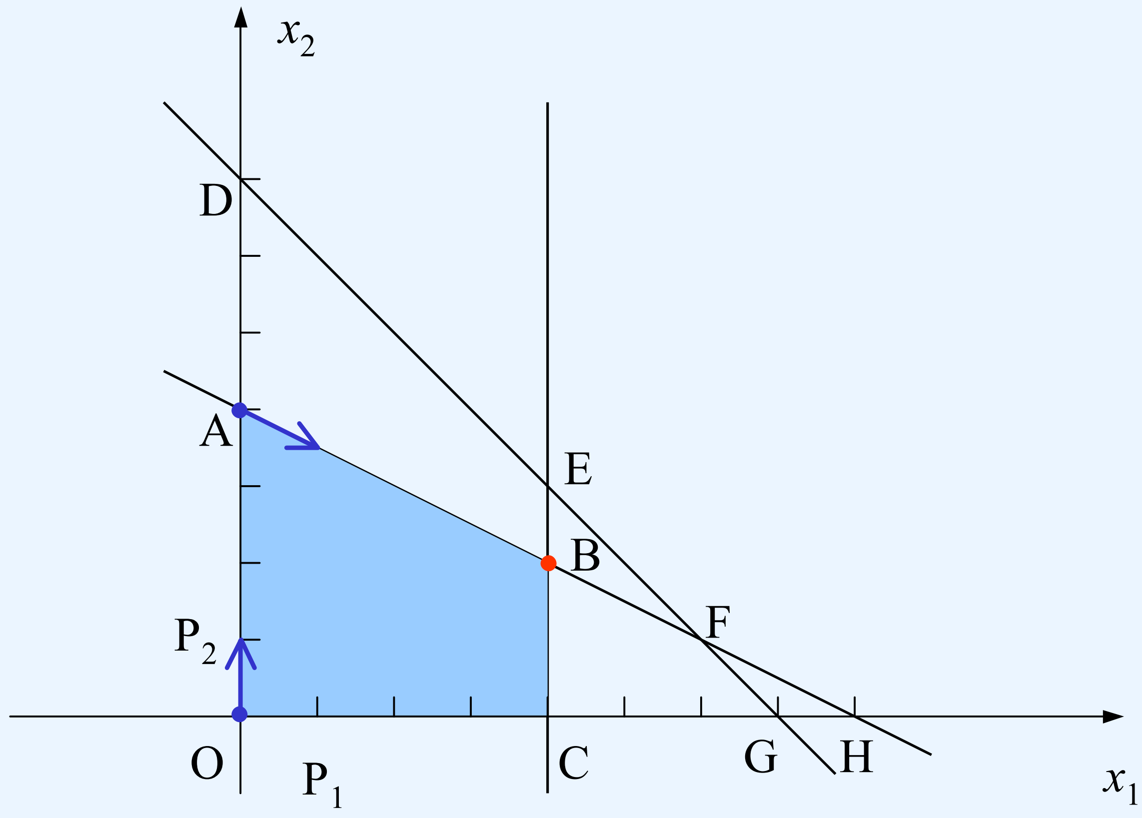
$cx \to max$		2	3	0	0	0	b	b/a
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	–1	0	6	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0,5	0	0	–1,5	0	12	

Итерация 3

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

Поскольку все показатели оптимальности неотрицательны, согласно критерию оптимальности решение: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ является оптимальным.

Геометрическая интерпретация решения



Первая допустимая базисная форма (1)

Пример 1.2

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, совокупный объем продукции не может быть меньше 3 единиц.

Математическая модель:

Целевая функция

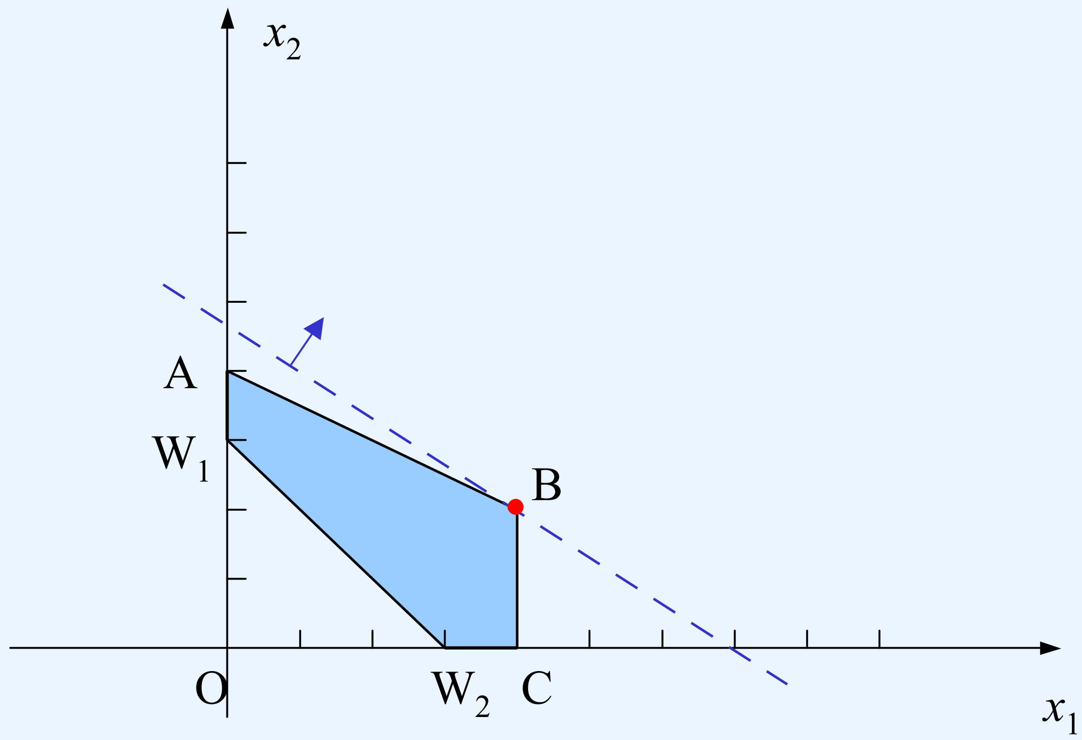
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + \quad x_2 &\ge 3 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

Первая допустимая базисная форма (2)

Геометрический метод



Первая допустимая базисная форма (3)

Балансовые переменные

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= \ \ 8 \\
4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 16 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - x_6 &= 3
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0,$$

Базисное решение:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 16, \quad x_6 = -3$$

Первая допустимая базисная форма (4)

Искусственная переменная

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \to \max$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\
4x_1 + x_5 &= 16 \\
x_1 + x_2 - x_6 + x_7 &= 3
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0,$$

Первая допустимая базисная форма (5)

Первая симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	–300	1	1	0	0	0	–1	1	3
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	–300	0	– 900

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0,5	0,125	1	–1	3
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	0	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	0	–303	14

Противоречивая задача (1)

Пример 1.3

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, совокупный объем продукции не может быть меньше 8 единиц.

Математическая модель:

Целевая функция

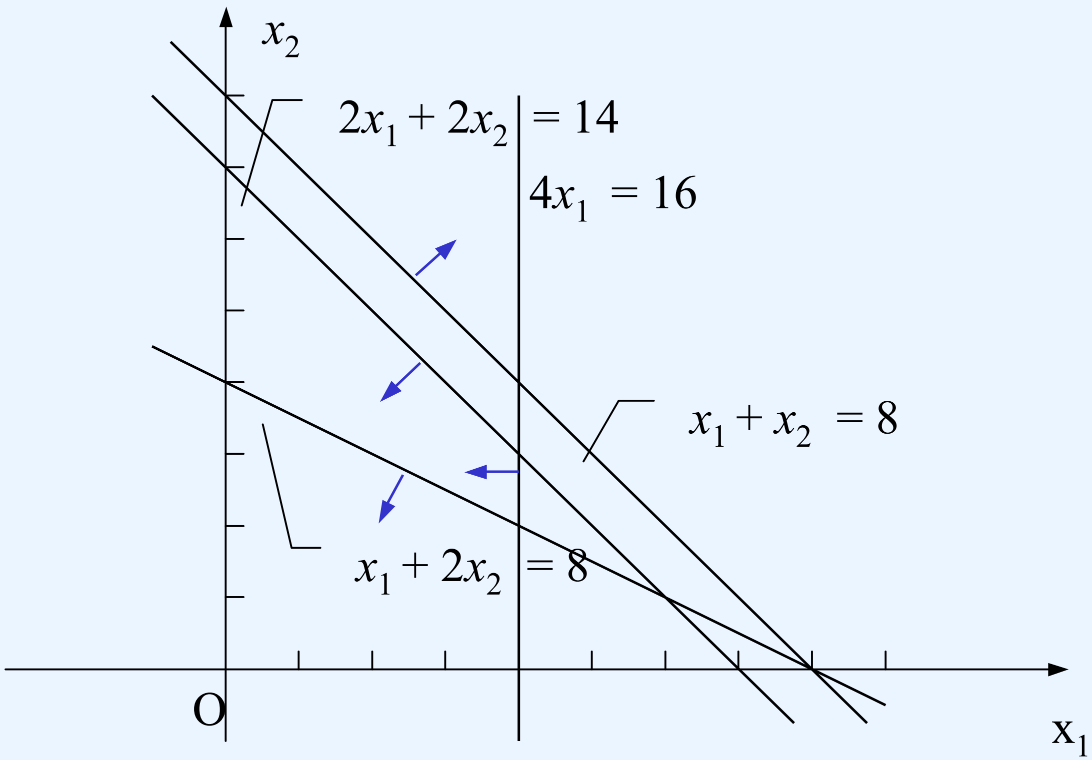
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

Противоречивая задача (2)

Геометрический метод



Множество допустимых решений пусто

Противоречивая задача (3)

Первая допустимая базисная форма

Целевая функция:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \to max$$

Ограничения:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 14 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad\qquad &= 8 \\
4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad &= 16 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad - x_6 + x_7 &= 8
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Противоречивая задача (4)

Первая симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	– 300	1	1	0	0	0	–1	1	3
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	–300	0	–300

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	– 0,25	0	0	2
x_2	3	0	1	0	0,5	0,125	0	0	3
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	–300	0	0	0	– 0,5	–0,125	–1	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–151,5	–37,625	–300	0	–586

Альтернативные оптимальные решения (1)

Пример 1.4

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, приведенный доход для изделия P_2 увеличивается с 3 до 4 единиц.

Математическая модель:

Целевая функция

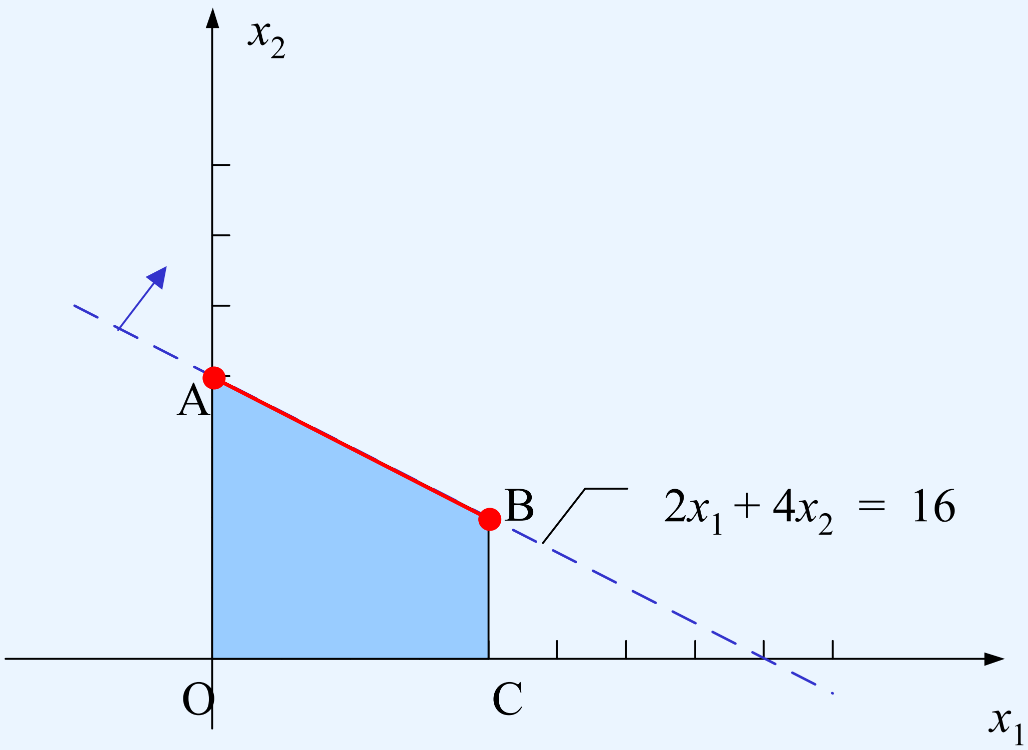
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

Альтернативные оптимальные решения (2)

Геометрический метод



Альтернативные оптимальные решения (3)

Первая допустимая базисная форма

Целевая функция:

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Первая симплекс-таблица:

$cx \to max$		2	4	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c - z$		2	4	0	0	0	0

Альтернативные оптимальные решения (4)

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		2	4	0	0	0	b	b/a
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
x_3	0	1	0	1	–1	0	6	6
x_2	4	0,5	1	0	0,5	0	4	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–2	0	14	

Альтернативное решение

$cx \to max$		2	4	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	4	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–2	0	14

Неограниченное множество допустимых решений (1)

Пример 1.5

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, ограничения накладываются только на ресурс S_3. Совокупный объем продукции не может быть меньше 3 единиц.

Математическая модель:

Целевая функция

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ограничения

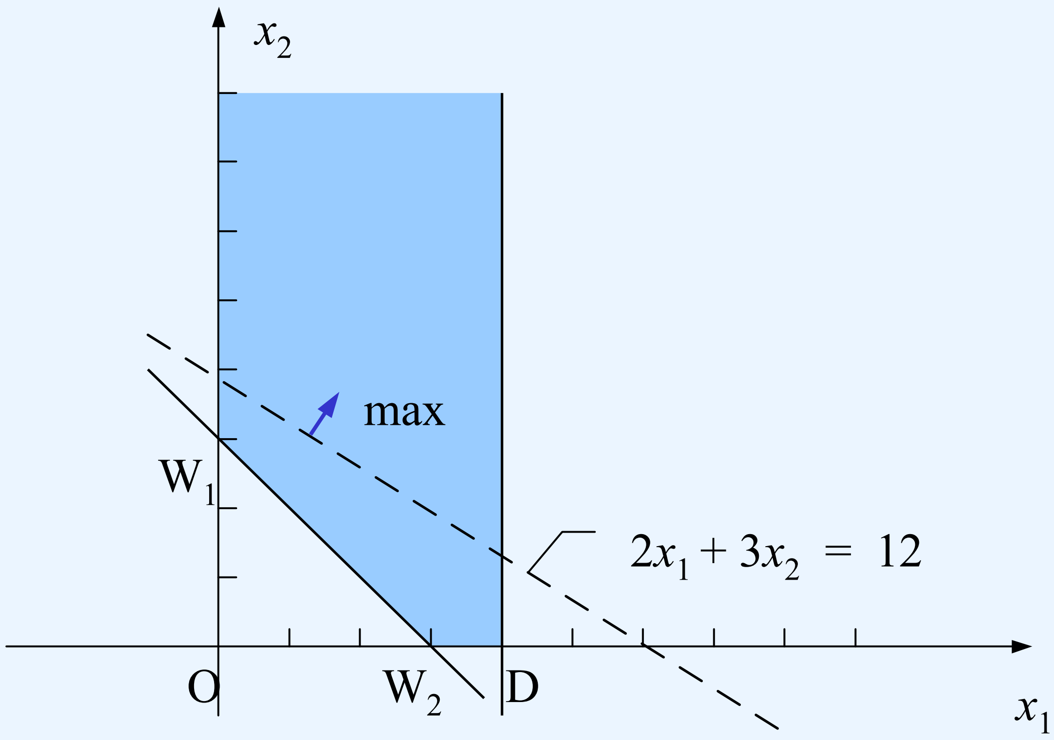
$$4x_1 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

Неограниченное множество допустимых решений (2)

Геометрический метод



Неограниченное множество допустимых решений (3)

Первое допустимое базисное решение

Целевая функция:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2$$

Ограничения:

$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\quad + x_3 \qquad &= 16 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

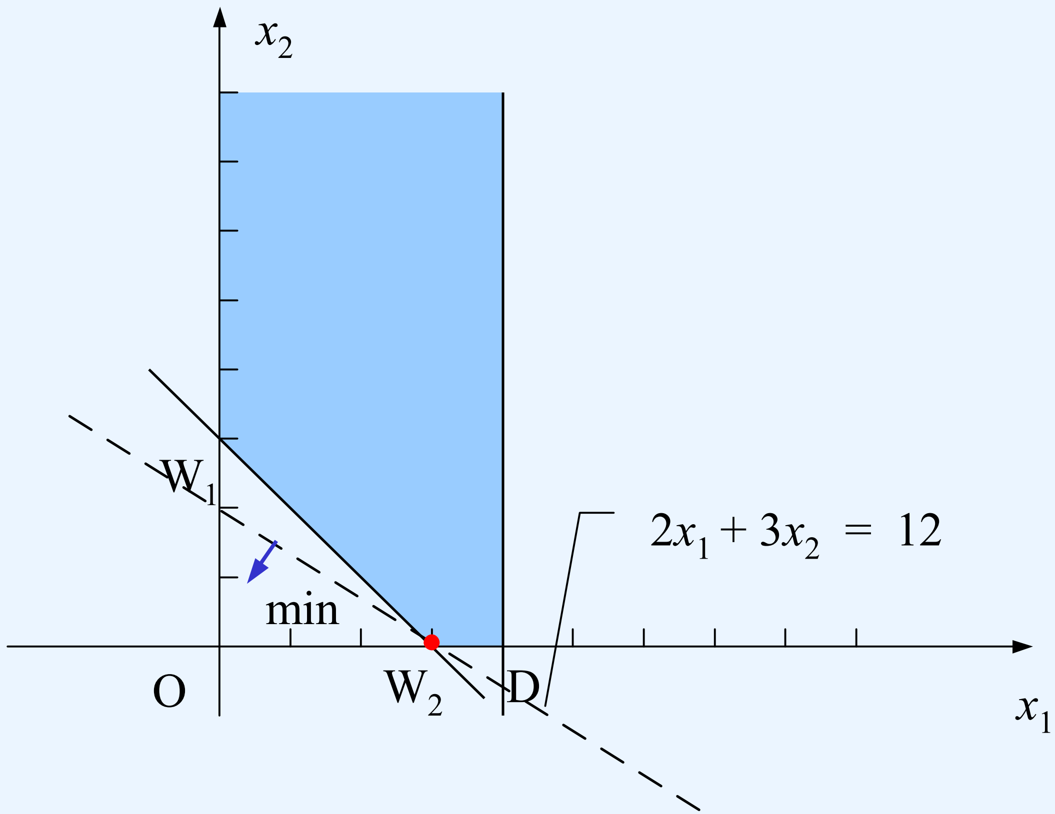
Неограниченное множество допустимых решений (4)

Первая симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	– 1	3
$c - z$		– 1	0	0	3	

Неограниченное множество допустимых решений (5)

Задача минимизации



Анализ чувствительности коэффициентов целевой функции (1)

Пример 1.6

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, доход от выпуска единицы P_1 равен c_1.

Математическая модель:

Целевая функция:

$$c_1 x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ограничения:

$$2x_1 + 2x_2 \le 14$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \le 16$$

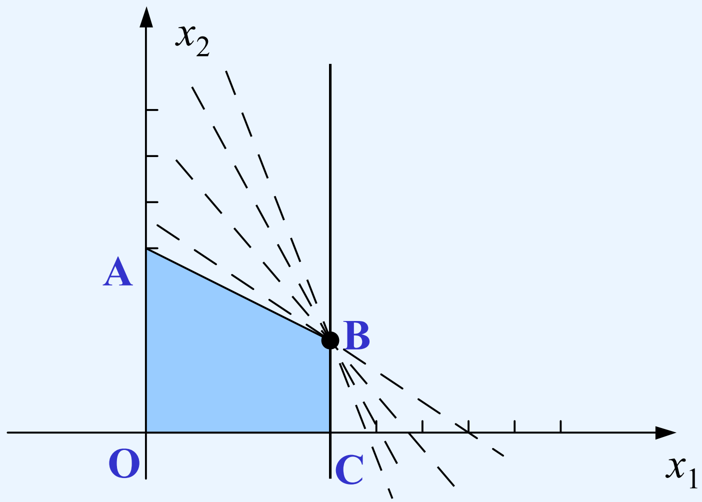
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

Анализ чувствительности коэффициентов целевой функции (2)

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		c_1	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	–1,5	$-0{,}25c_1 + 0{,}375$	$4c_1+6$

$$-0{,}25c_1 + 0{,}375 \le 0 \quad \text{т.е.} \quad c_1 \ge 1{,}5$$



Анализ чувствительности коэффициентов целевой функции (3)

Пример 1.7

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, доход от выпуска единицы P_2 равен c_2.

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		2	c_2	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0,5c_2$	$0,125c_2 - 0,5$	$8 + 3c_2$

$$-0,5c_2 \le 0 \qquad \text{и} \qquad 0,125c_2 - 0,5 \le 0$$

$$c_2 \in [0, 4]$$

Пример 1.8

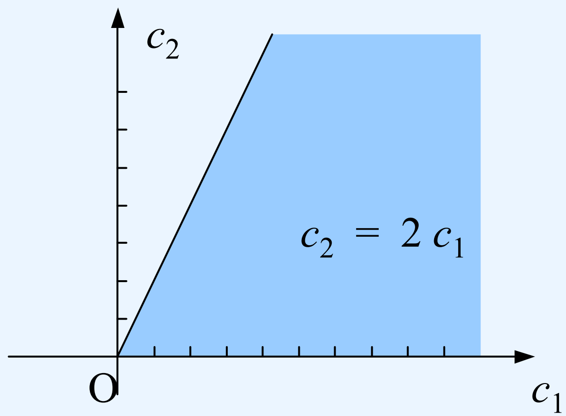
Совместный анализ чувствительности для изделий P_1 и P_2.

$cx \to max$		c_1	c_2	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	c_2	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c - z$		0	0	0	$-0{,}5c_2$	$0{,}125c_2 - 0{,}25c_1$	$8 + 3c_2$

$$-0{,}5c_2 \le 0$$

$$0{,}125c_2 - 0{,}25c_1 \le 0$$

$$c_2 \ge 0, \text{ и } c_2 \ge 2c_1$$



Пример 1.9

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, доступный объем ресурса S_2 уменьшился с 8 до 6 единиц. Останется ли при этих изменениях допустимым оптимальный базис, найденный при исходных ограничениях?

Новое решение	=	Предыдущее решение	+	Изменение объема ресурса	•	Столбец балансовой переменной

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \Delta b_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2 - \Delta b_2 \geq 0$$
$$2 + 0,5\,\Delta b_2 \geq 0$$
$$4 + 0\,\Delta b_2 \geq 0$$

Ранее найденный оптимальный базис останется допустимым при

$$-4 \leq \Delta b_2 \leq 2.$$

Двойственная задача (1)

Пример 1.10

Ресурс	Изделия		Объем
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Доход	2	3	

Минимизировать требуемые объемы ресурсов, причем стоимость ресурсов, необходимых для производства одного изделия $P1$ или $P2$, не может быть меньше дохода, получаемого от производства этого изделия .

Двойственная задача (2)

Математическая модель

Решающие переменные

y_1 - стоимость ресурса S_1
y_2 - стоимость ресурса S_2
y_3 - стоимость ресурса S_3

Целевая функция

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2y_1 + \ \ y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \qquad\quad &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Прямая и двойственная задача

$$2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad\qquad 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \qquad &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = [2, 3] \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{cx} &\to \mathbf{max} \\ \boldsymbol{Ax} &\le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{yb} &\to \mathbf{min} \\ \boldsymbol{yA} &\ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Свойства прямой и двойственной задачи

1. Каждому ограничению одной из задач соответствует решающая переменная другой задачи. Эту переменную будем называть **комплементарной переменной** этого ограничения.
2. Каждой неотрицательной решающей переменной одной из задач соответствует ограничение другой задачи. Это ограничение будем называть **комплементарным ограничением** этой решающей.
3. **Вектор коэффициентов целевой функции** одной задачи становится **вектором свободных членов** другой задачи и наоборот, вектор свободных членов одной задачи становится вектором коэффициентов целевой функции другой задачи.
4. **Направления оптимизации** для прямой и двойственной задач противоположны. Если прямая задача является задачей максимизации, то в двойственной задаче целевая функция минимизируется.
5. **Знаки неравенств** в ограничениях прямой задачи противоположны знакам неравенств ограничений двойственной задачи.

Теоремы двойственности

Теорема 1

Если **x** и **y** представляют собой произвольные допустимые решения, соответственно, прямой и двойственной задач, то значения целевых функций этих задач удовлетворяют условию:

$$cx \le yb$$

Теорема 2 (*о комплементарности*)

Если **x** и **y** представляют собой оптимальные решения, соответственно, прямой и двойственной задач, то выполняются равенства:

$$y(b - Ax) = 0$$
$$(yA - c)x = 0$$

Теорема 3

Для оптимальных решений **x** и **y**, соответственно, прямой и двойственной задач выполняется равенство:

$$cx = yb$$

Применение теоремы о комплементарности (1)

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \quad = [y_1, y_2, y_3]\left(\begin{bmatrix}14\\8\\16\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 2\\4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix}14 & -2x_1 & -2x_2\\ 8 & -\ \ x_1 & -2x_2\\ 16 & -4x_1 & \end{bmatrix} =$$

$$= y_1(14-2x_1-2x_2)+y_2(8-x_1-2x_2)+y_3(16-4x_1)=0$$

$$\begin{aligned} y_1\,(14 - 2x_1 - 2x_2) &= 0\\ y_2\,(\ 8 - \ \ x_1 - 2x_2) &= 0\\ y_3\,(16 - 4x_1 \qquad\quad\ ) &= 0 \end{aligned}$$

Применение теоремы о комплементарности (2)

$$(\boldsymbol{yA} - \boldsymbol{c})\boldsymbol{x} = \left(\begin{bmatrix} y_1, y_2, y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2y_1 & + & y_2 & +4y_3 & -2 \\ 2y_1 & +2y_2 & & & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= (2y_1 + y_2 + 4y_3 - 2)x_1 + (2y_1 + 2y_2 - 3)x_2 = 0$$

$$(2y_1 + \ y_2 - 4y_3 - 2)x_1 = 0$$
$$(2y_1 + 2y_2 \qquad - 3)x_2 = 0$$

Применение теоремы о комплементарности (3)

Пример 1.11

Дано оптимальное решение прямой задачи x_1=4, x_2=2. Найти оптимальное решение двойственной задачи.

Ограничения прямой задачи

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 &< 14 \;\Rightarrow y_1 = 0 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 &= 8 \\ 4 \cdot 4 \qquad\quad &= 16 \end{aligned}$$

Ограничения двойственной задачи

$$\begin{aligned} 2y_1 + \;\; y_2 + 4y_3 &= 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 + 4y_3 &= 2 \\ 2y_2 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

$$y_1 = 0,\; y_2 = 1.5,\; y_3 = 0.125$$

Принципы построения пары двойственных задач

Прямая задача

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \to \max$$
$$a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22} x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32} x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \text{ – любая}$$

Двойственная задача

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \to \min$$
$$y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + y_3 a_{31} \ge c_1$$
$$y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + y_3 a_{32} \le c_2$$
$$y_1 a_{13} + y_2 a_{23} + y_3 a_{33} = c_3$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \text{ – любая}$$

Двойственный симплекс-метод

Пример 1.12

$$\begin{aligned} 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\to \min \\ 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 &\to \min \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 + y_4 &= -2 \\ -2y_1 - 2y_2 + y_5 &= -3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Базис	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–2	–1	–4	1	0	–2
y_5	0	–2	–2	0	0	1	–3
$c - z$		14	8	16	0	0	0

Критерий допустимости

Если значения всех свободных членов неотрицательны, то рассматриваемое решение допустимо.

Критерий вывода

Из всех свободных членов выбираем наименьший. Соответствующая ему переменная выводится из базиса.

Если наименьших свободных членов несколько, то выбирается переменная с наименьшим номером.

Критерий ввода

Рассчитываем частные от деления показателей оптимальности на соответствующие отрицательные элементы строки для переменной, выводимой из базиса $((c_j - z_j):a_{ij})$.

В базис вводится та переменная, для которой абсолютное значение соответствующего ей частного окажется наименьшим.

Если наименьших значений несколько, то выбирается переменная с наименьшим номером.

Итерация 1

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Базис	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–2	–1	–4	1	0	–2
y_5	0	–2	–2	0	0	1	–3
$c - z$		14	8	16	0	0	

критерий вывода y_5

критерий ввода

для переменной y_1 $|14 : (-2)| = 7$

для переменной y_2 $|8 : (-2)| = 4$ **min**

Итерация 2

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Базис	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	0	–1	0	–4	1	–0,5	–0,5
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c - z$		6	0	16	0	4	12

критерий вывода y_4

критерий ввода

для переменной y_1 $|\,6 : (-1)\,| = 6$

для переменной y_3 $|\,16 : (-4)\,| = 4$ ⟵ **min**

для переменной y_5 $|\,4 : (-0{,}5)\,| = 8$

Итерация 3

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Базис	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	16	0	0	1	–0,25	0,125	0,125
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c - z$		2	0	0	4	2	14

Оптимальное решение

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1{,}5 \quad y_3 = 0{,}125 \quad y_4 = 0 \quad y_5 = 0$$

Комплементарные переменные (1)

ZP - Прямая задача

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

ZD - Двойственная задача

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \qquad &\ge 3 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

Переменная	Комплементарное ограничение	Комплементарная переменная
x_1	1 в ZD	y_4
x_2	2 в ZD	y_5
y_1	1 в ZP	x_3
y_2	2 в ZP	x_4
y_3	3 в ZP	x_5

Комплементарные переменные (2)

Прямая задача

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

Двойственная задача

$cx \to min$		14	8	16	0	0	b
Базис	c_B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	16	0	0	1	–0,25	0,125	0,125
y_2	8	1	1	0	0	–0,5	1,5
$c_j - z_j$		2	0	0	4	2	14

Искусственное ограничение (1)

Пример 1.13

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{array}$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

Искусственное ограничение

$x_1 + x_2 \le 1600$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + x_6 = 1600$

Искусственное ограничение (2)

Первая оптимальная базисная форма

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_6	0	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0	0

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	–3	4800

Искусственное ограничение (3)

Итерация 1

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	–3	4800

критерий вывода x_4

критерий ввода

для переменной x_1 $|(-1):(-1)| = 1$ ← **min**

для переменной x_6 $|(-3):(-2)| = {}^3/_2$

Искусственное ограничение (4)

Итерация 2

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	0	0	– 2	–3186
x_1	2	1	0	0	–1	0	2	3192
x_5	0	0	0	0	4	1	–8	–12752
x_2	3	0	1	0	1	0	–1	–1592
$c_j - z_j$		0	0	0	–1	0	–1	1608

критерий вывода x_5

критерий ввода

для переменной x_6 $|(-1) : (-8)| = 0{,}125 \leftarrow$ **min**

Искусственное ограничение (5)

Итерация 3

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	4
x_6	0	0	0	0	–0,5	–0,13	1	1594
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,13	0	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,13	0	14

Поскольку балансовая переменная x_6 искусственного ограничения является базисной, полученное решение оптимально.

Противоречивая задача (1)

Пример 1.14

В задаче планирования производства, рассматривавшейся в примере 1.1, совокупный объем продукции не может быть меньше 8 единиц.

Математическая модель:

Целевая функция

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned}$$

Искусственное ограничение

$$x_1 + x_2 \le 1600$$

Противоречивая задача (2)

Первая симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	0	0	0	–2	–3186
x_4	0	–1	0	0	1	0	0	–2	–3192
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	1592
x_2	3	1	1	0	0	0	0	1	1600
$c_j - z_j$		–1	0	0	0	0	0	–3	4800

Последняя симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	– 0,25	0	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	0	0	0	0	– 0,5	– 0,13	0	1	1594
x_6	0	0	0	0	0,5	0,13	1	0	–2
x_2	3	0	1	0	0,5	– 0,13	0	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	– 0,13	0	0	14

Неограниченная целевая функция

Пример 1.15

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 \to \max \\
4x_1 \le 16 \\
x_1 + x_2 \ge 3 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2x_1 + 3x_2 \to \max \\
4x_1 + x_3 = 16 \\
-x_1 - x_2 + x_4 = -3 \\
x_1 + x_2 + x_5 = 1600 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{array}
$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	0	1	0	0	16
x_2	3	2	1	0	0	1	1603
x_4	0	2	0	0	1	1	1600
$c_j - z_j$		–4	0	0	0	–3	4809

Переменная x_5 не входит в допустимый базис. Поэтому целевая функция неограничена.

Параметрическое линейное программирование

$$c(t)x \to \max$$
$$A(t)x = b(t)$$
$$x \geq 0$$

Вектор целевой функции зависит от параметра

$$(c + \Delta ct)x \to \max$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Вектор свободных членов зависит от параметра

$$cx \to \max$$
$$Ax = b + \Delta bt$$
$$x \geq 0$$

Вектор целевой функции зависит от параметра (1)

Пример 1.16

$$(2 + 3t)x_1 + (3 - t)x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \qquad &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$t_0 = 0$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Вектор целевой функции зависит от параметра (2)

$t_0 = 0$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	$3 - t$	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	$2 + 3t$	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	$-1{,}5 + 0{,}5t$	$-0{,}125 - 0{,}875t$	$14 + 10t$

$$-1{,}5 + 0{,}5t \le 0$$
$$-0{,}125 - 0{,}875t \le 0$$

Для $-0{,}143 \le t \le 3$ базисными переменными являются: x_3, x_2, x_1

Вектор целевой функции зависит от параметра (3)

$t = 3$

$cx \to max$		11	0	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	0	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	11	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	0	– 2,75	44

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	2	1	0	–0,5	6
x_4	0	0	2	0	1	–0,25	4
x_1	$2 + 3t$	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	$3 - t$	0	0	$-0{,}5 - 0{,}75t$	$8 + 12t$

$$3 - t \le 0$$
$$-0{,}5 - 0{,}75t \le 0$$

Для $t \ge 3$ базисными переменными являются: x_3, x_4, x_1.

Вектор целевой функции зависит от параметра (4)

$t \le -0{,}143$

$cx \to max$		1,5712	3,143	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3,143	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	1,571	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,571	0	12,57

$cx \to max$		$2 + 3t$	$3 - t$	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	–1	0	6
x_2	$3 - t$	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		$0{,}5 + 3{,}5t$	0	0	$-1{,}5 + 0{,}5t$	0	$12 - 4t$

$$0{,}5 + 3{,}5t \le 0$$
$$-1{,}5 + 0{,}5t \le 0$$

Для $t \le -0{,}143$ базисными переменными являются x_3, x_2, x_5.

Вектор целевой функции зависит от параметра (5)

Декомпозиция множества параметров на подмножества

и. Для $t \le -0{,}143$ получаем:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 0,\ x_5 = 16,$$

II. Для $t = -0{,}143$ решениями являются точками, лежащими на отрезке между решениями I и III.

III. Для $-0{,}143 \le t \le 3$ получаем:

$$x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

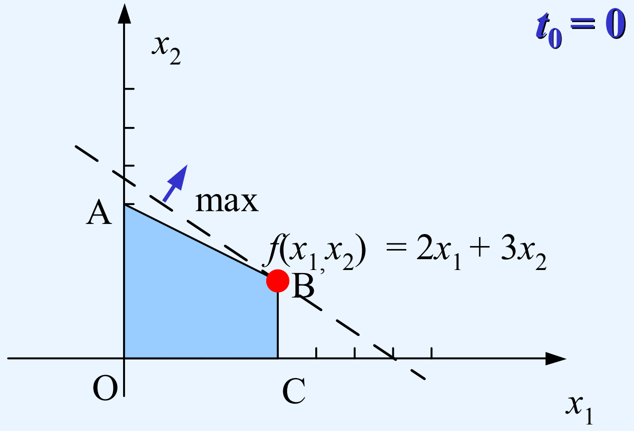
IV. Для $t = 3$ решениями являются точками, лежащими на отрезке между решениями III и V.

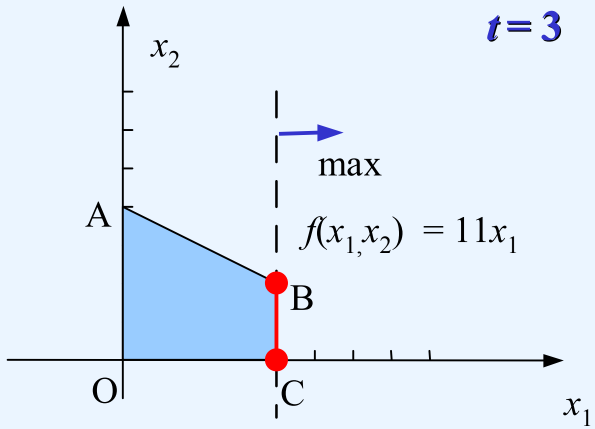
V. Для $t \ge 3$ получаем:

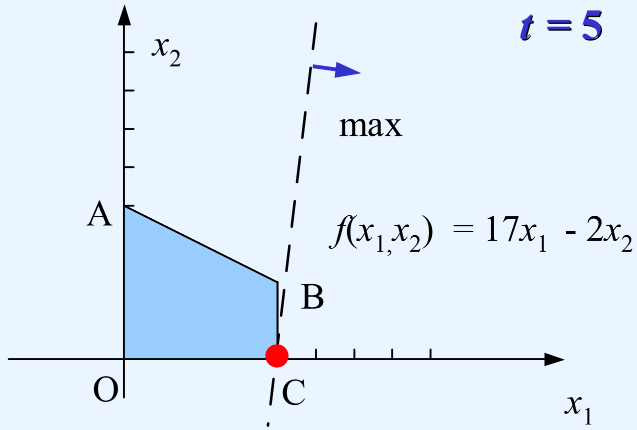
$$x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6,\ x_4 = 4,\ x_5 = 0.$$

Вектор целевой функции зависит от параметра (6)

Геометрическая иллюстрация

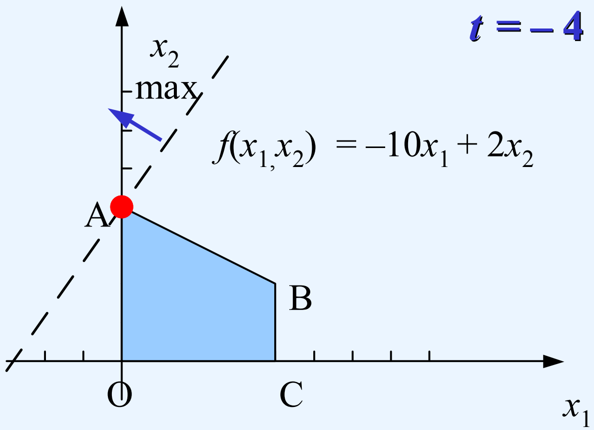


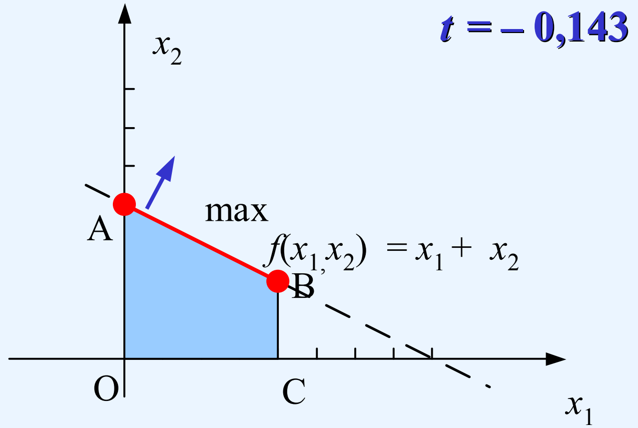


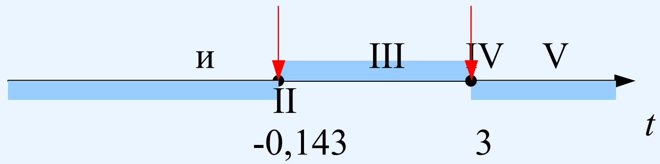


Вектор целевой функции зависит от параметра (7)

Геометрическая иллюстрация (продолжение)







Вектор свободных членов зависит от параметра (1)

Пример 1.17

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 - 9t \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 - 4t \\ 4x_1 \qquad &\le 16 + 8t \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$b + \Delta b(t) = \begin{bmatrix} 14 - 9t \\ 8 - 4t \\ 16 + 8t \end{bmatrix}$$

Вектор свободных членов зависит от параметра (2)

$t = 0$

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad\quad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad &= 8 \\ 4x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Первая симплекс-таблица

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	0

Вектор свободных членов зависит от параметра (3)

$t = 0$ (продолжение)

Последняя симплекс-таблица для $t = 0$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	14

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$b(t) = A_B^{-1}\left(b + \Delta b(t)\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}125 \\ 0 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14-9t \\ 8-4t \\ 16+8t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-7t \\ 2-3t \\ 4+2t \end{bmatrix}$$

Вектор свободных членов зависит от параметра (4)

$t = 0$ (продолжение)

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	$2 - 7t$
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	$2 - 3t$
x_1	2	1	0	0	0	0,25	$4 + 2t$
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	$14 - 5t$

$$2 - 7t \geq 0$$
$$2 - 3t \geq 0$$
$$4 + 2t \geq 0$$

Для $-2 \leq t \leq 0{,}286$ базисными переменными являются: x_3, x_2, x_1

Вектор свободных членов зависит от параметра (5)

$t = 0{,}286$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	1,143
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4,571
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	12,57

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	0	–4	4	1	$-8 + 28t$
x_2	3	0	1	–0,5	1	0	$1 + 0{,}5t$
x_1	2	1	0	1	–1	0	$6 - 5t$
$c_j - z_j$		0	0	–0,5	–1	0	$15 - 8{,}5t$

$$-8 + 28t \ge 0$$
$$1 + 0{,}5t \ge 0$$
$$6 - 5t \ge 0$$

Для $0{,}286 \le t \le 1{,}2$ базисными переменными являются: x_5, x_2, x_1

Вектор свободных членов зависит от параметра (6)

$t = 1{,}2$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	0	0	–4	4	1	25,6
x_2	3	0	1	–0,5	1	0	1,6
x_1	2	1	0	0	–1	0	0
$c_j - z_j$		0	0	–0,5	–1	0	4,8

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	4	0	0	0	1	$16 + 8t$
x_2	3	1	1	0,5	0	0	$7 – 4{,}5t$
x_4	0	–1	0	–1	1	0	$–6 + 5t$
$c_j - z_j$		–1	0	–1,5	0	0	$9 - 3{,}5t$

$$16 + 8t \geq 0$$
$$7 - 4{,}5t \geq 0$$
$$-6 + 5t \geq 0$$

Для $1{,}2 \leq t \leq 1{,}556$ базисными переменными являются: x_5, x_2, x_4

Вектор свободных членов зависит от параметра (7)

$t = 1{,}556$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	0	4	0	0	0	1	28,444
x_2	3	1	1	0,5	0	0	0
x_4	0	–1	0	–1	1	0	1,778
$c_j - z_j$		–1	0	–1,5	0	0	0

При $t > 1{,}556$ задача противоречива

$t = –2$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Базис	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	16
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	8
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	24

При $t < -2$ задача противоречива

Вектор свободных членов зависит от параметра (8)

Декомпозиция множества параметров на подмножества

I. При $t < -2$ задача противоречива.

II. При $-2 \le t \le 0{,}286$ решение имеет вид:

$$x_1 = 4 + 2t,\ x_2 = 2 - 3t,\ x_3 = 2 - 7t,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

III. При $t = 0{,}286$ получаем:

$$x_1 = 4{,}571,\ x_2 = 1{,}143,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,$$

IV. При $0{,}286 \le t \le 1{,}2$ решение имеет вид:

$$x_1 = 6 - 5t,\ x_2 = 1 + 0{,}5t,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = -8 + 28t,$$

V. При $t = 1{,}2$ получаем:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1{,}6,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 25{,}6,$$

VI. При $1{,}2 \le t \le 1{,}556$ решение имеет вид:

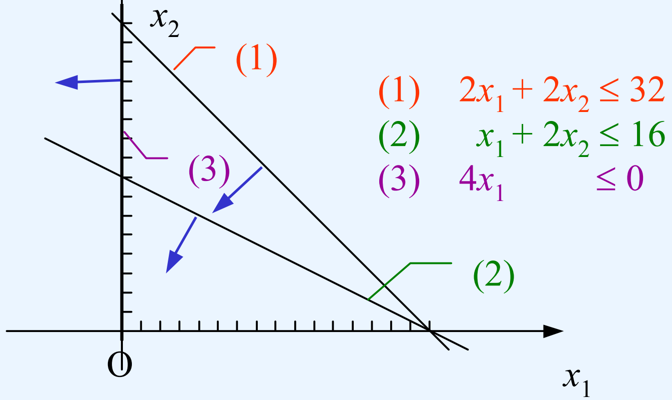
$$x_1 = 0,\ x_2 = 7 - 4{,}5t,\ x_3 = 0,\ x_4 = -6 + 5t,\ x_5 = 16 + 8t,$$

VII. При $t > 1{,}556$ задача противоречива.

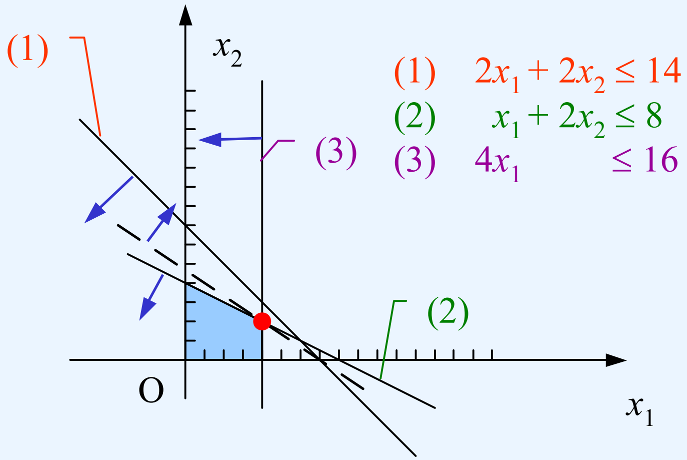
Вектор свободных членов зависит от параметра (9)

Геометрическая иллюстрация

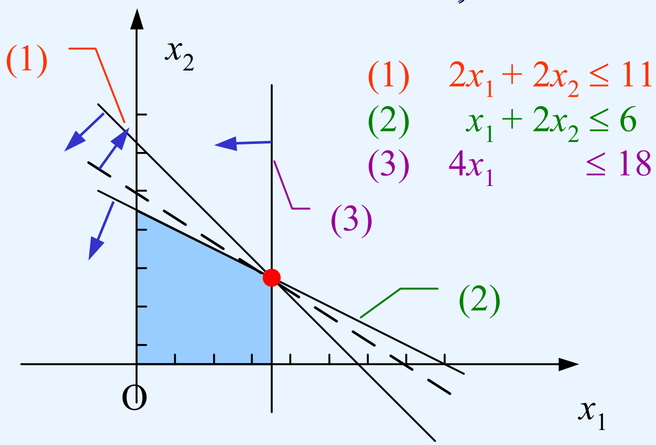
$t = -2$



$t = 0$

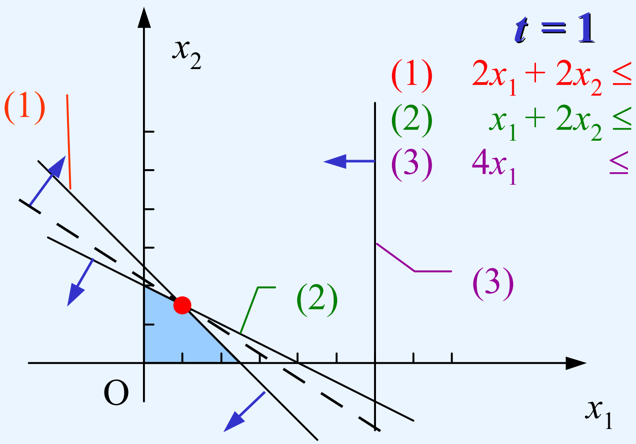


$t = 0{,}286$



Вектор свободных членов зависит от параметра (10)

Геометрическая иллюстрация (продолжение)

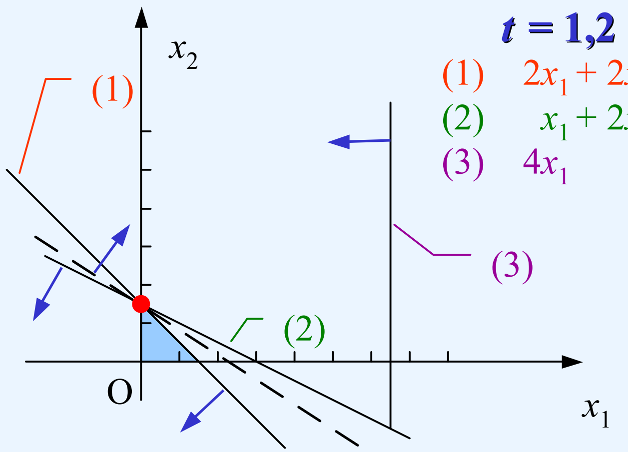


$t = 1$

(1) $2x_1 + 2x_2 \le 5$

(2) $x_1 + 2x_2 \le 4$

(3) $4x_1 \le 24$



$t = 1{,}2$

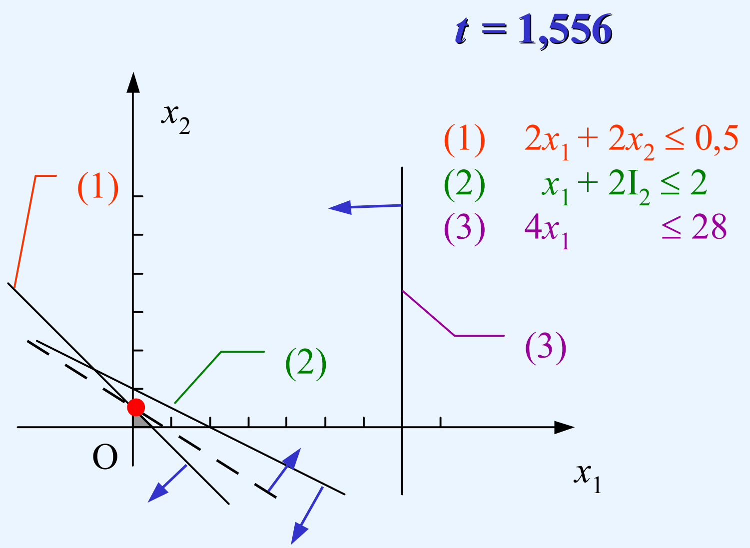
(1) $2x_1 + 2x_2 \le 3{,}2$

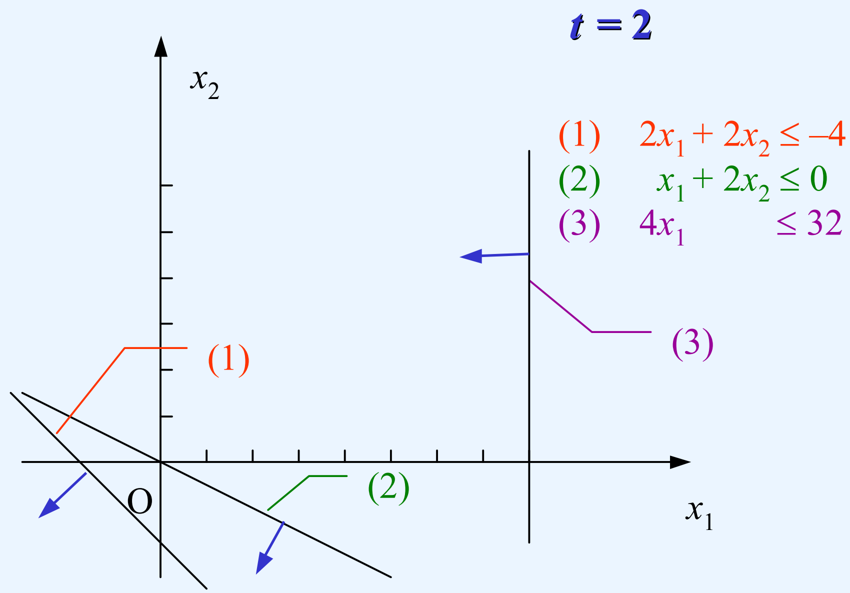
(2) $x_1 + 2x_2 \le 3{,}2$

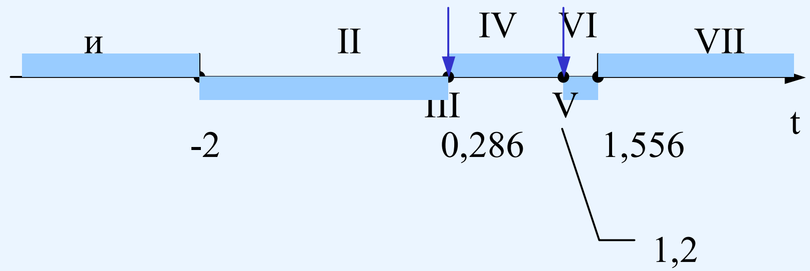
(3) $4x_1 \le 25{,}6$

Вектор свободных членов зависит от параметра (11)

Геометрическая иллюстрация (продолжение)







Задача раскроя (1)

Пример 1.18

Заказ - 100 комплектов деревянных конструкций,
Длина брусьев - 6,4 м,

Рассматриваемые способы раскроя:

	Способы раскроя	1	2	3	4	5	6
Количество полученных досок	Длинных (2,9 м)	1	1	2	0	1	0
	Средних (2,1 м)	1	0	0	2	2	1
	Коротких (1,5 м)	1	3	1	2	0	3
	Отходы (в метрах)	0,9	0	0,1	0,2	0,3	0,7

Каким способом надо раскроить брусья, чтобы выполнить заказ при минимальных отходах дерева?

Задача раскроя (2)

Цель

Найти способ раскроя, минимизирующий отходы.

Решающие переменные

x_1 – количество брусьев, раскроенных способом 1,

x_2 – количество брусьев, раскроенных способом 2,

x_3 – количество брусьев, раскроенных способом 3,

x_4 – количество брусьев, раскроенных способом 4,

x_5 – количество брусьев, раскроенных способом 5,

x_6 – количество брусьев, раскроенных способом 6,

Задача раскроя (3)

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0{,}9x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 + 0{,}7x_6 \to \min$$

Ограничения

Длинные брусья: $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 100$

Средние брусья: $x_1 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 100$

Короткие брусья: $x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 100$

Условия неотрицательности: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 30, \quad x_3 = 10, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 50, \quad x_6 = 0.$$

Альтернативное оптимальное базисное решение:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 40, \quad x_4 = 30, \quad x_5 = 20, \quad x_6 = 0$$

Минимальное значение целевой функции = 16

Задача составления диеты (1)

Пример 1.19

Компонент А - не менее 1000 единиц,
Компонент В - не менее 800 единиц,
Компонент С - не менее 1150 единиц, не более 1700 единиц.

Содержание компонентов в кормах:

Вид корма	Компоненты			Стоимость
	A	B	C	
Корм 1	50	20	10	1800
Корм 2	20	0	30	2200
Корм 3	30	20	10	1300
Корм 4	0	10	20	1500

Корма 2 давать не менее 20 г,
Корма 1 давать в полтора раза больше чем корма 3,
Корма 3 давать не более 30 г.

Какое количество кормов необходимо закупить для минимизации затрат на откорм 1 головы крупного рогатого скота?

Задача составления диеты (2)

Цель

Минимизация годовых затрат на откорм 1 головы крупного рогатого скота

Решающие переменные

x_1 – плановый объем закупки корма 1,

x_2 – плановый объем закупки корма 2,

x_3 – плановый объем закупки корма 3,

x_4 – плановый объем закупки корма 4,

Задача составления диеты (3)

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1800x_1 + 2200x_2 + 1300x_3 + 1500x_4 \to \min$$

Ограничения

Компонент A:	$50x_1 + 20x_2 + 30x_3 \geq 1000$
Компонент B:	$20x_1 + \quad + 20x_3 + 10x_4 \geq 800$
Компонент C:	$1150 \leq 10x_1 + 30x_2 + 20x_4 \geq 1150$
	$1150 \leq 10x_1 + 30x_2 + 20x_4 \leq 1170$
Корм 2:	$x_2 \geq 20$
Корм 1 и 3:	$x_1 = 1{,}5x_3$
Корм 3:	$x_3 \leq 30$

Условия неотрицательности: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Оптимальное решение

$$x_1 = 20,\ x_2 = 18{,}33,\ x_3 = 13{,}33,\ x_4 = 13{,}33.$$

Оптимальное значение целевой функции равно 113666,67

Параметрическая задача планирования производства (1)

Пример 1.20

Ресурс	Изделия								Запас
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
S_1	3	2	5	4	3	5	2	3	500
S_2	2	3	1	4	2	2	1	3	400
S_3	2	1	1	4	3	0	2	4	350
S_3	2	1	2	2	1	2	2	1	450
Единичный доход	$1 + t$	$2 + t$	$1 + t$	$3 + t$	$4 + t$	$5 + t$	$3 + t$	$2 + t$	

Необходимо составить оптимальный производственный план, максимизирующий совокупный доход для каждого возможного значения $t \in [-5; 5]$

Параметрическая задача планирования производства (2)

Цель

Составить оптимальный производственный план, максимизирующий совокупный доход.

Решающие переменные

x_1 – плановый объем выпуска изделия P_1,
x_2 – плановый объем выпуска изделия P_2,
x_3 – плановый объем выпуска изделия P_3,
x_4 – плановый объем выпуска изделия P_4,
x_5 – плановый объем выпуска изделия P_5,
x_6 – плановый объем выпуска изделия P_6,
x_7 – плановый объем выпуска изделия P_7,
x_8 – плановый объем выпуска изделия P_8,

Параметрическая задача планирования производства (3)

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, t) = (1 + t)x_1 + (2 + t)x_2 + (1 + t)x_3 + (3 + t)x_4 + (4 + t)x_5 + (5 + t)x_6 + (3 + t)x_7 + (2 + t)x_8 \to \min$$

Ограничения

Ресурс S_1: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_7 + 3x_8 \leq 500$

Ресурс S_2: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 3x_8 \leq 400$

Ресурс S_3: $2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + \quad + 2x_7 + 4x_8 \leq 350$

Ресурс S_4: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 \leq 450$

Условия неотрицательности: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$

Параметрическая задача планирования производства (4)

Оптимальное решение зависит от параметра *t*

Δ_1 = [-5; -2,5] Δ_2 = [-2,5: -1] Δ_3 = [-1; 1,67] Δ_4 = [1,67; 5]

Интервал	Оптимальные значения								Значение целевой функции
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
Δ_1	0	0	0	0	0	100	0	0	$500 + 100t$
Δ_2	0	0	0	0	116,7	30	0	0	$616,7 + 146,7t$
Δ_3	0	0	0	0	0	30	175	0	$675 + 205t$
Δ_4	0	78,6	0	0	0	14,3	135,7	0	$635,7 + 228,6t$

Резюме (1)

Ключевые слова

- Математическая модель
- Цель, средства, ограничения
- Целевая функция – критериальная функция
- Решающие переменные
- Оптимизационная модель
- Система ограничений
- Допустимое решение
- Оптимальное решение
- Задача линейного программирования

Резюме (2)

Ключевые слова (продолжение)

- Геометрический метод
- Симплекс-метод
- Балансовые переменные
- Базисная форма
- Базисные переменные
- Небазисные переменные
- Критерий оптимальности
- Критерий ввода
- Критерий вывода
- Искусственная переменная
- Анализ чувствительности

Резюме (3)

Ключевые слова (продолжение)

- Прямая задача
- Двойственная задача
- Прямой симплекс-метод
- Двойственный симплекс-метод
- Параметрическое линейное программирование
- Вектор целевой функции зависит от параметра
- Вектор свободных членов зависит от параметра

Можно отдыхать!