Programowanie liniowe całkowitoliczbowe

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Rozwiązanie całkowitoliczbowe**
- **Założenie podzielności**
- **Warunki całkowitoliczbowości**
- **Czyste zadanie programowania całkowitoliczbowego**
- **Mieszane zadanie programowania całkowitoliczbowego**
- **Relaksacja zadania**
- **Metoda zaokrągleń**
- **Metoda podziału i ograniczeń**
- **Metoda cięć**
- **Zmienne binarne**

2.2.1. Zadanie czyste (1/7)

Przykład 2.1

Zadanie wyjściowe

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

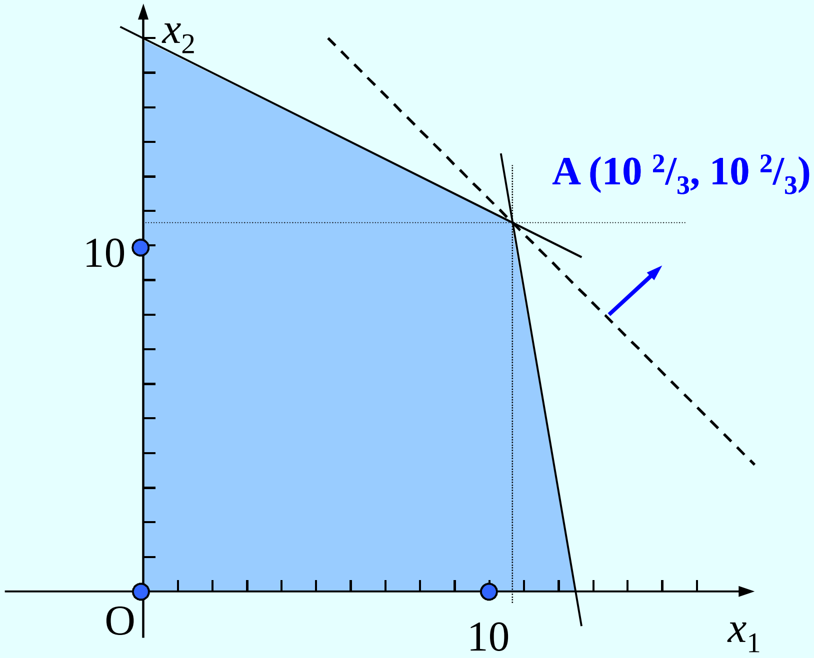
$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - całkowite

Zadanie zrelaksowane

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

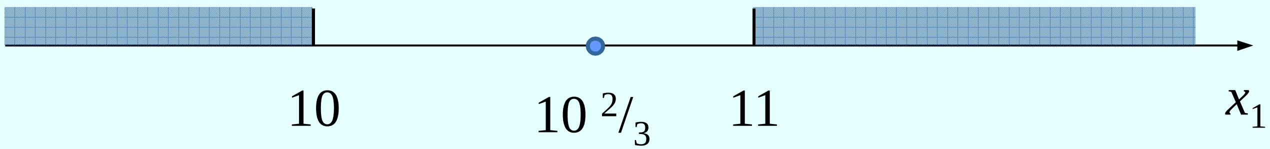


2.2.1. Zadanie czyste (2/7)

Podział względem x_1

Zadanie 1

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \le 224$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Zadanie 2

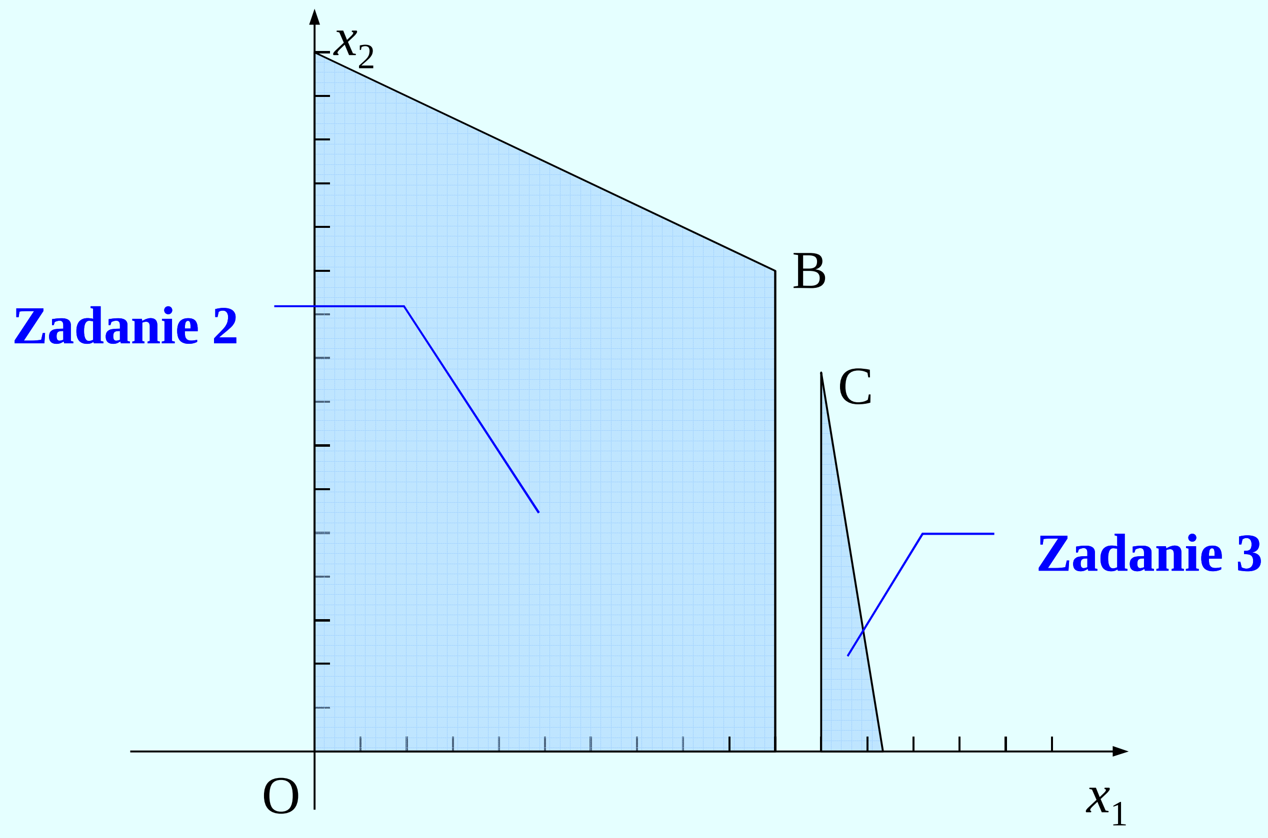
$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \le 224$$
$$\boxed{\mathbf{0 \le x_1 \le 10}}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Zadanie 3

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \le 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \le 224$$
$$\boxed{\mathbf{x_1 \ge 11}}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

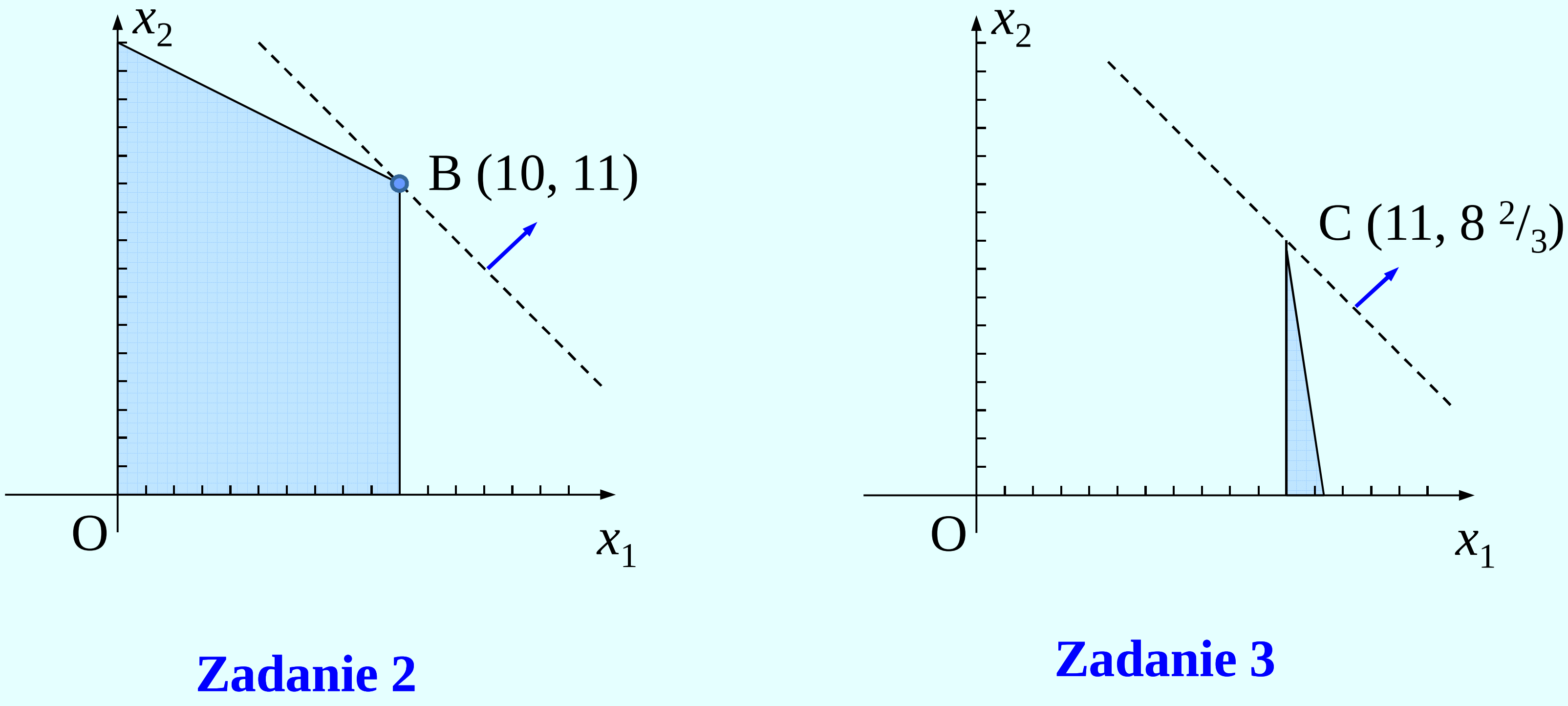
2.2.1. Zadanie czyste (3/7)

Zbiory rozwiązań dopuszczalnych zadań 2 i 3



2.2.1. Zadanie czyste (4/7)

Rozwiązania optymalne zadań 2 i 3



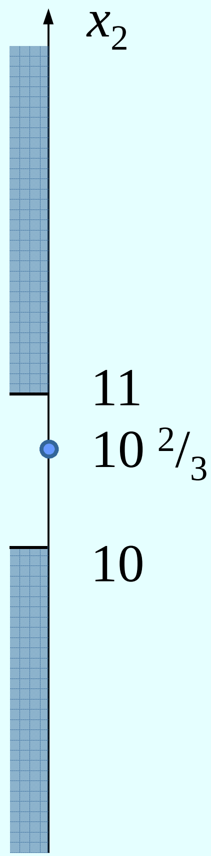
2.2.1. Zadanie czyste (5/7)

Podział względem x_2

Zadanie 1'

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Zadanie 3'

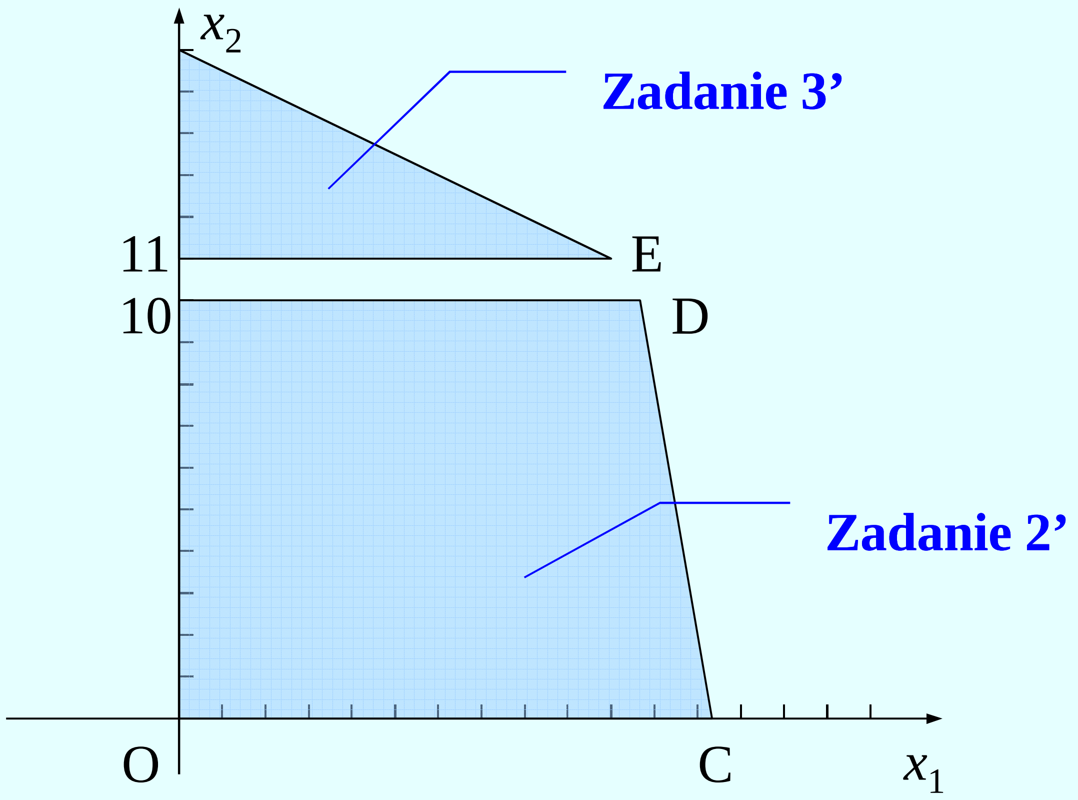
$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$\boxed{\mathbf{x_2 \geq 11}}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zadanie 2'

$$x_1 + x_2 \to \max$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$\boxed{\mathbf{0 \leq x_2 \leq 10}}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

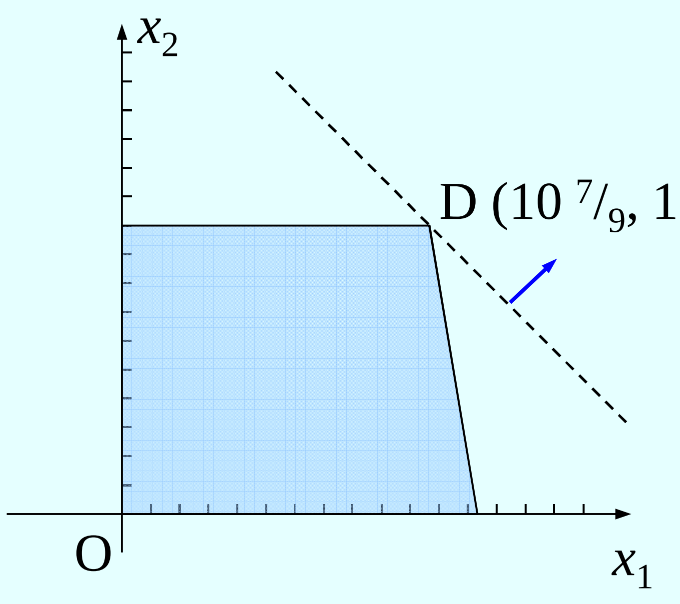
2.2.1. Zadanie czyste (6/7)

Zbiory rozwiązano dopuszczalnych zadań 2' i 3'

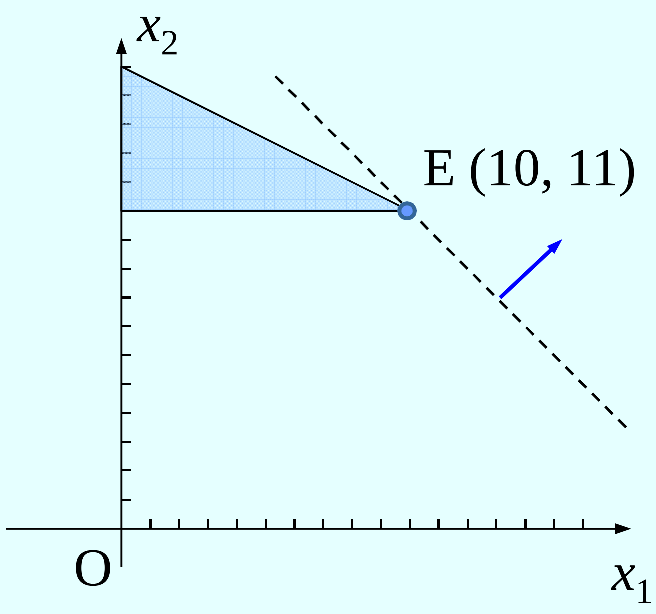


2.2.1. Zadanie czyste (7/7)

Rozwiązania optymalne zadań 2' i 3'



Zadanie 2'



Zadanie 3'

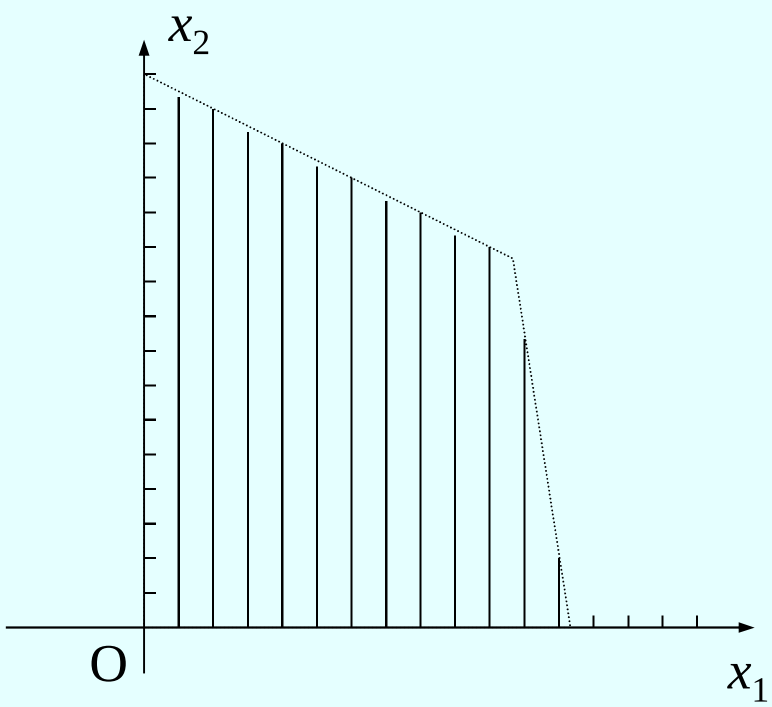
2.2.2. Zadanie mieszane (1/13)

Geometryczna interpretacja zbioru rozwiązań dopuszczalnych

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 - całkowite



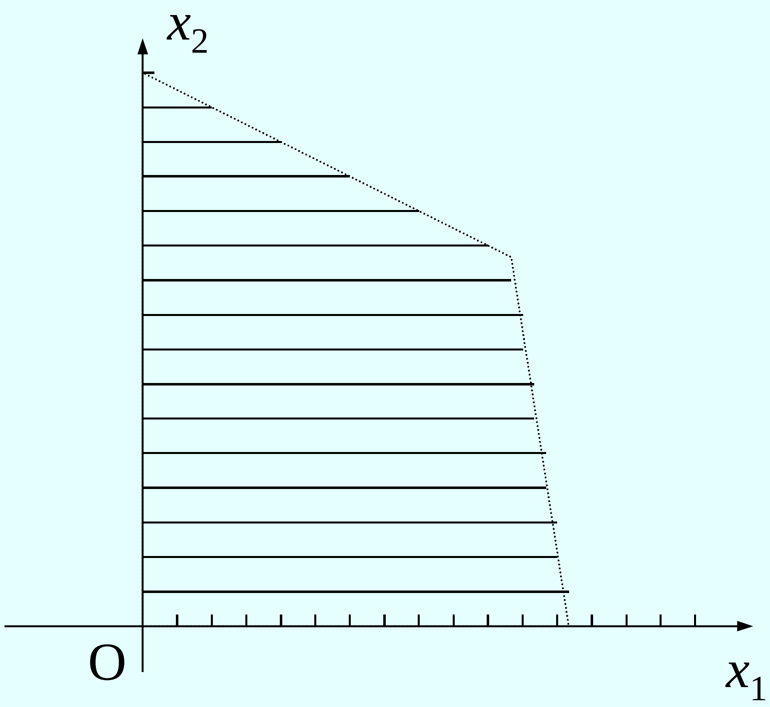
2.2.2. Zadanie mieszane (2/13)

Geometryczna interpretacja zbioru rozwiązań dopuszczalnych (c.d.)

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$x_1 + 2x_2 \le 32$$
$$18x_1 + 3x_2 \le 224$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_2 - całkowite



2.2.2. Zadanie mieszane (3/13)

Przykład 2.2

Zadanie wyjściowe

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ x_1 &\ge 0 \\ 0 \le x_2 &\le 5 \\ 0 \le x_3 &\le 5 \end{aligned}$$

x_2, x_3 - całkowite

Zadanie zrelaksowane

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ x_1 &\ge 0 \\ 0 \le x_2 &\le 5 \\ 0 \le x_3 &\le 5 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2{,}667,\ x_2 = 2{,}667,\ x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 16$$

2.2.2. Zadanie mieszane (4/13)

Iteracja 1

Lista rozpatrywanych zadań:	1
Zadania usuwane z listy:	-
Lista zadań po modyfikacji:	1
Zadania wybrane do podziału:	1
Rozwiązanie zadania 1:	$x_1 = 2{,}667,\ x_2 = 2{,}667,\ x_3 = 0$
Podział względem zmiennej:	x_2

2.2.2. Zadanie mieszane (5/13)

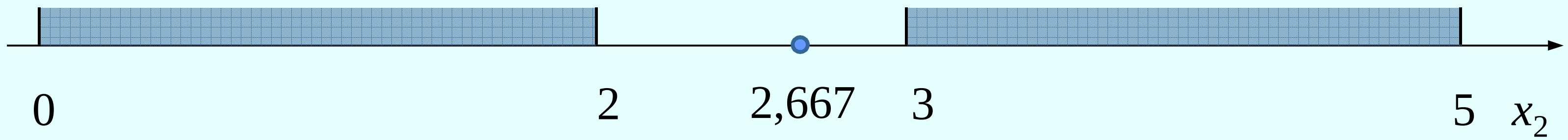
Iteracja 1 (c.d.)

Zadanie 1

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad 0 \le x_2 \le 5 \qquad 0 \le x_3 \le 5$$



Zadanie 2

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad \boxed{\mathbf{0 \le x_2 \le 2}} \qquad 0 \le x_3 \le 5$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0{,}286 \qquad f_{\text{opt}} = 15{,}714$$

Zadanie 3

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \qquad \boxed{\mathbf{3 \le x_2 \le 5}} \qquad 0 \le x_3 \le 5$$

Zadanie sprzeczne

2.2.2. Zadanie mieszane (6/13)

Iteracja 2

Lista rozpatrywanych zadań:	1, 2, 3
Zadania usuwane z listy:	1 (podzielone), 3 (sprzeczne)
Lista zadań po modyfikacji:	2
Zadania wybrane do podziału:	2
Rozwiązanie zadania 2:	$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0{,}286$
Podział względem zmiennej:	x_3

2.2.2. Zadanie mieszane (7/13)

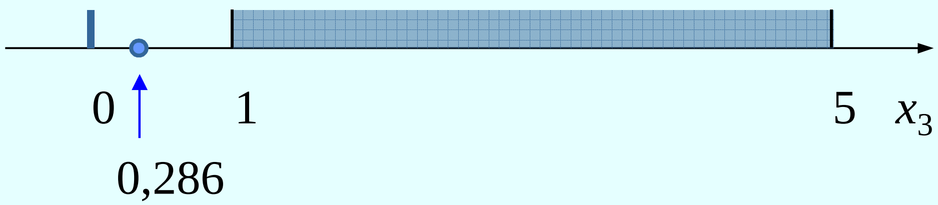
Iteracja 2 (c.d.)

Zadanie 2

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 2 \quad 0 \le x_3 \le 5$$



Zadanie 4

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 2 \quad \boxed{\mathbf{0 \le x_3 \le 0}}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2{,}33, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 13$$

Zadanie 5

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 2 \quad \boxed{\mathbf{1 \le x_3 \le 5}}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0{,}33, \quad x_2 = 0{,}33, \quad x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 15$$

2.2.2. Zadanie mieszane (8/13)

Iteracja 3

Lista rozpatrywanych zadań: 2, 4, 5

Zadania usuwane z listy: 2 (podzielone)

Lista zadań po modyfikacji: 4, 5

Zadania wybrane do podziału: 5

Rozwiązanie zadania 5: $x_1 = 0{,}33,\ x_2 = 0{,}33,\ x_3 = 1$

Podział względem zmiennej: x_2

2.2.2. Zadanie mieszane (9/13)

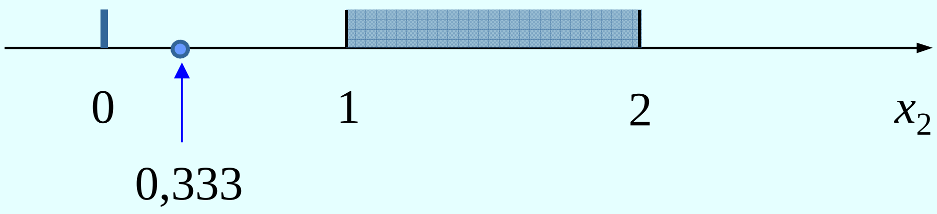
Iteracja 3 (c.d.)

Zadanie 5

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 2 \quad 1 \le x_3 \le 5$$



Zadanie 6

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad \boxed{\mathbf{0 \le x_2 \le 0}} \quad 1 \le x_3 \le 5$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1{,}143$$

$$f_{\text{opt}} = 14{,}857$$

Zadanie 7

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad \boxed{\mathbf{1 \le x_2 \le 2}} \quad 1 \le x_3 \le 5$$

Zadanie sprzeczne

2.2.2. Zadanie mieszane (10/13)

Iteracja 4

Lista rozpatrywanych zadań:	4, 5, 6, 7
Zadania usuwane z listy:	5 (podzielone), 7 (sprzeczne)
Lista zadań po modyfikacji:	4, 6
Zadania wybrane do podziału:	6
Rozwiązanie zadania 6:	$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1{,}143$
Podział względem zmiennej:	x_3

2.2.2. Zadanie mieszane (11/13)

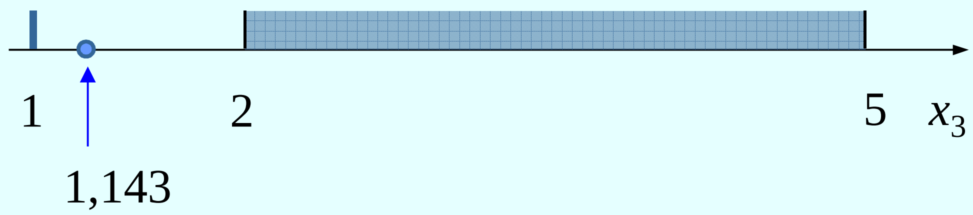
Iteracja 4 (c.d.)

Zadanie 6

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 0 \quad 1 \le x_3 \le 5$$



Zadanie 8

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 0 \le x_2 \le 0 \quad \boxed{\mathbf{1 \le x_3 \le 1}}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0{,}167,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 13{,}5$$

Zadanie 9

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \to \max$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + \ 7x_3 &\le 8 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \quad 1 \le x_2 \le 2 \quad \boxed{\mathbf{2 \le x_3 \le 5}}$$

Zadanie sprzeczne

2.2.2. Zadanie mieszane (12/13)

Iteracja 5

Lista rozpatrywanych zadań:	4, 6, 8, 9
Zadania usuwane z listy:	6 (podzielone), 9 (sprzeczne) 4 ($f_{opt}^{(4)} = 13 < f_{opt}^{(8)} = 13{,}5$)
Lista zadań po modyfikacji:	8
Rozwiązanie zadania 8:	$x_1 = 0{,}167$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Spełnione warunki całkowitoliczbowości. Rozwiązanie zadania 8 jest rozwiązaniem optymalnym zadania wyjściowego.

2.2.2. Zadanie mieszane (13/13)

Zestawienie rozwiązywanych zadań

Numer zadania	Zakresy zmienności		Rozwiązanie optymalne			Optymalna wartość funkcji celu	Nowo-generowane zadania
	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3		
1	[0, 5]	[0, 5]	2,667	2,667	0	16	2, 3
2	[0, 2]	[0, 5]	2	2	0,286	15,714	4, 5
3	[3, 5]	[0, 5]	Zadanie sprzeczne				
4	[0, 2]	[0, 0]	2,333	2	0	13	
5	[0, 2]	[1, 5]	0,333	0,333	1	15	6,7
6	[0, 0]	[1, 5]	0	0	1,143	14,857	8,9
7	[1, 2]	[1, 5]	Zadanie sprzeczne				
8	[0, 0]	[1, 1]	0,167	0	1	13,5	
9	[1, 2]	[2, 5]	Zadanie sprzeczne				

2.2.3. Reguły postępowania w metodzie podziału i ograniczeń (1/1)

Algorytm

W każdej iteracji wykonujemy następujące operacja:

1. Porządkowanie listy zadań zrelaksowanych.
2. Sprawdzenie kryterium optymalności i w przypadku jego spełnienia zakończenie obliczeń.
3. Wybór zadania do podziału.
4. Wybór zmiennej, względem której dokonamy podziału.
5. Podział zadania, rozwiązanie nowo utworzonych zadań i umieszczenie ich na liście zadań zrelaksowanych.

2.2.4. Zaokrąglanie rozwiązań(1/2)

Przykład 2.3

Zadanie wyjściowe

$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

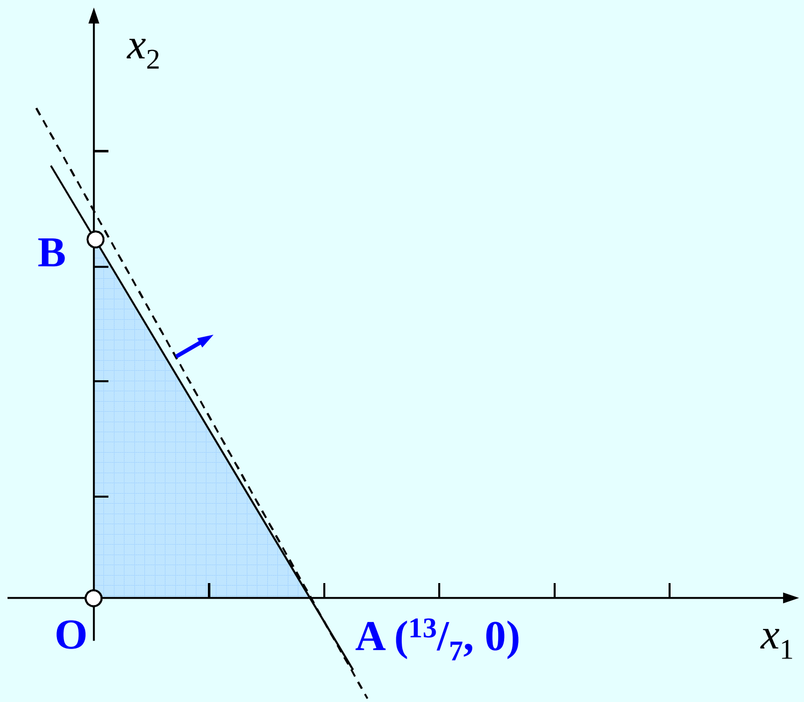
$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ - całkowite}$$

Zadanie zrelaksowane

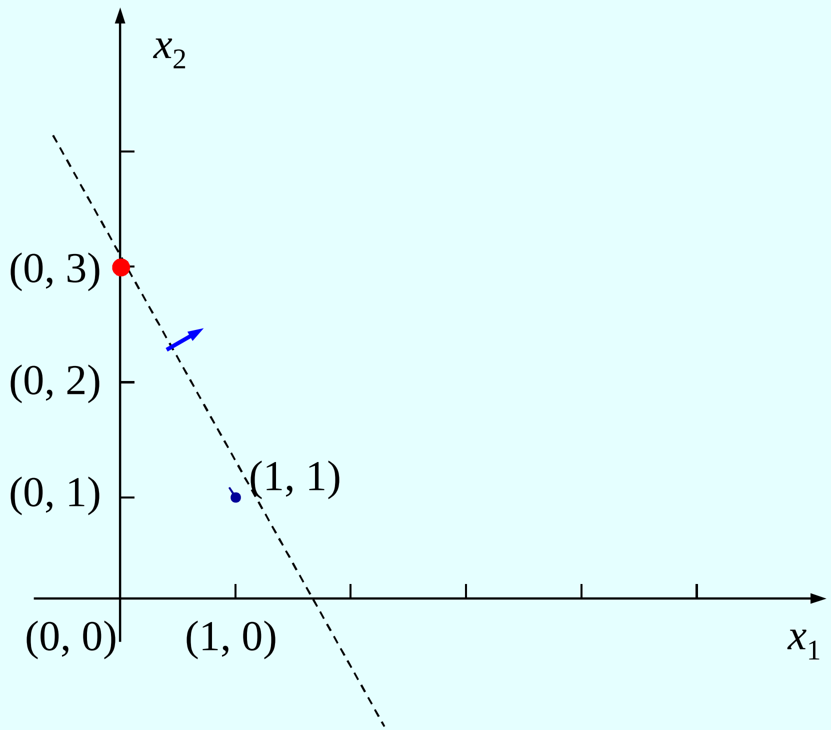
$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2.2.4. Zaokrąglanie rozwiązań(2/2)

Porównanie wartości funkcji kryterium



$f(0, 0) = 0,\qquad f(0, 1) = 11,\qquad f(0, 2) = 22,$

$f(0, 3) = 33,\qquad f(1, 0) = 21,\qquad f(1, 1) = 32,$

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (1/6)

Przykład 2.4

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ x_1 + 2x_2 &\le 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\le 224 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \text{ - całkowite}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 & &\to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & &= 32 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_4 & &= 224 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

$cx \to \max$		1	1	0	0	b
Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	1	0	1	0,5455	–0,0303	10,6667
x_1	1	1	0	–0,0909	0,0606	10,6667
$c_j - z_j$		0	0	–0,4545	–0,0303	21,3333

$$x_1 - 0{,}0909x_3 + 0{,}0606x_4 = 10{,}6667$$

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (2/6)

Wyprowadzenie wzoru

Równanie cięcia odpowiadające zmiennej bazowej x_1:

$$x_1 - 0{,}0909x_3 + 0{,}0606x_4 = 10{,}6667 \tag{2.1}$$

Ponieważ dla współczynników przy zmiennych niebazowych zachodzą związki:

$$[-0{,}0909] \le -0{,}0909$$
$$[0{,}0606] \le 0{,}0606$$

tak więc:

$$[-0{,}0909]x_3 \le -0{,}0909x_3$$
$$[0{,}0606]x_4 \le 0{,}0606x_4$$

Dodając stronami te nierówności, otrzymujemy:

$$[-0{,}0909]x_3 + [0{,}0606]x_4 \le -0{,}0909x_3 + 0{,}0606x_4$$

Do obu stron dodajemy zmienną x_1:

$$x_1 + [-0{,}0909]x_3 + [0{,}0606]x_4 \le x_1 - 0{,}0909x_3 + 0{,}0606x_4 = 10{,}6667$$

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (3/6)

Wyprowadzenie wzoru (cd.)

stąd

$$x_1 + [-0{,}0909]x_3 + [0{,}0606]x_4 \leq 10{,}6667$$

Lewa strona może przyjąć jedynie wartość całkowitą, stąd:

$$x_1 + [-0{,}0909]x_3 + [0{,}0606]x_4 \leq [10{,}6667]$$

Wprowadzamy zmienna bilansującą $x_{5:}$

$$x_1 + [-0{,}0909]x_3 + [0{,}0606]x_4 + x_5 = [10{,}6667] \qquad (2.2)$$

Odejmujemy stronami (2.1) od (2.2):

$$([-0{,}0909] + 0{,}0909)x_3 + ([0{,}0606] - 0{,}0606)x_4 + x_5 = [10{,}6667] - 10{,}6667$$

po uporządkowaniu:

$$-0{,}9091x_3 - 0{,}0606x_4 + x_5 = -0{,}6667$$

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (4/6)

Rozszerzenie tablicy simpleksowej

$cx \to \max$		1	1	0	0	0	b
Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	0	1	0,5455	–0,0303	0	10,6667
x_1	1	1	0	–0,0909	0,0606	0	10,6667
x_5	0	0	0	–0,9091	–0,0606	1	–0,6667
$c_j - z_j$		0	0	–0,4545	–0,0303	0	21,3333

Dualna metoda simpleks

$cx \to \max$		1	1	0	0	0	b
Baza		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	0	1	1	0	–0,5	11
x_1	1	1	0	–1	0	1	10
x_4	1	0	0	15	1	–16	11
$c_j - z_j$		0	0	0	0	–0,5	21

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (5/6)

Interpretacja geometryczna

$$-0{,}9091x_3 - 0{,}0606x_4 + x_5 = -0{,}6667$$

$$-\frac{10}{11}x_3 - \frac{2}{33}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{10}{11}x_3 - \frac{2}{33}x_4 \le -\frac{2}{3}$$

$$x_3 = 32 - x_1 - 2x_2$$

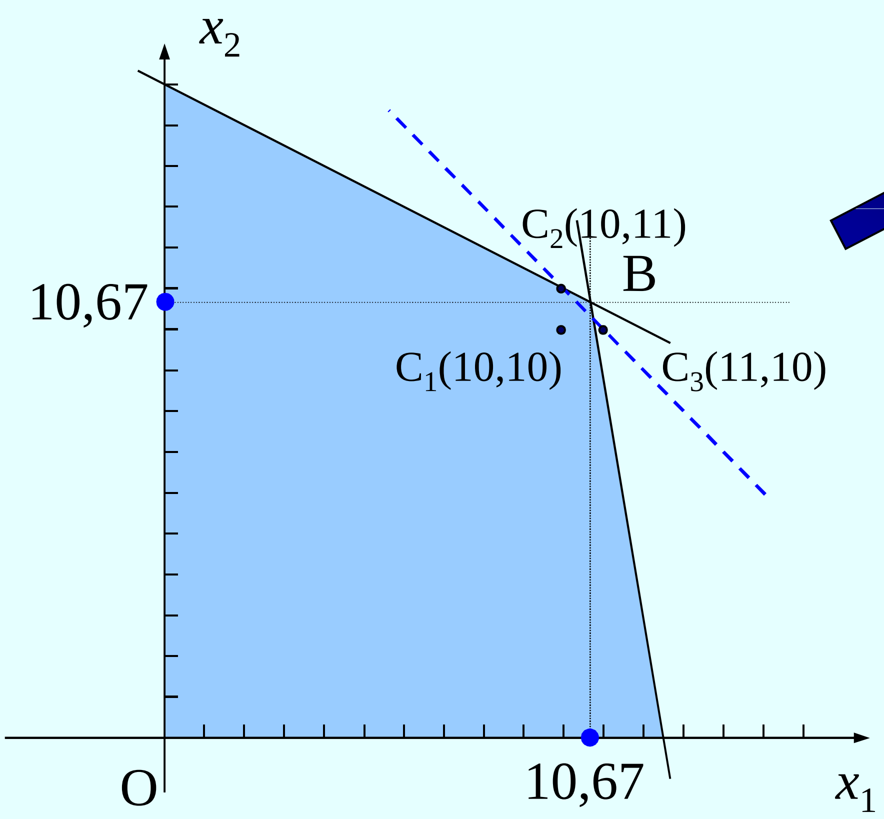
$$x_4 = 224 - 18x_1 - 3x_2$$

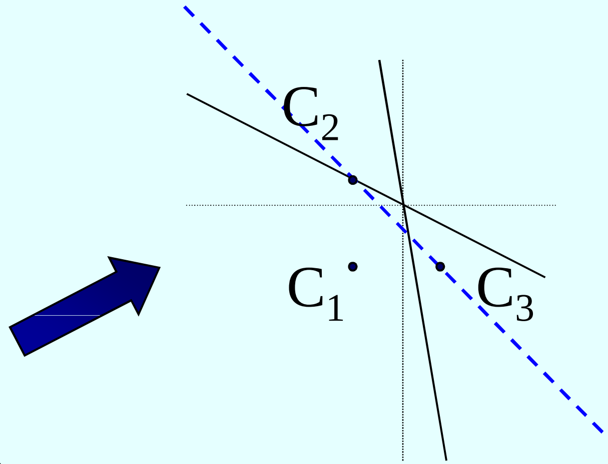
$$-\frac{10}{11}(32 - x_1 - 2x_2) - \frac{2}{33}(224 - 18x_1 - 3x_2) \le -\frac{2}{3}$$

$$x_1 + x_2 \le 21$$

2.3.1. Konstrukcja równania cięcia (6/6)

Interpretacja geometryczna (c.d.)





2.3.2. Reguły postępowania w metodzie cięć (1/1)

Algorytm

1. Rozwiązanie zadania zrelaksowanego.

2. Wybór równania wykorzystywanego do konstrukcji równania cięcia (wiersz *i*).

3. Konstrukcja równania cięcia:

$$\sum_{\text{zmienne niebazowe}} \left([a_{ij}] - a_{ij}\right)x_j + x_{n+1} = [b_i] - b_i$$

4. Przejście do nowej bazy dopuszczalnej.

5. Zakończenie postępowania.

2.4.1. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (1/5)

Przykład 2.5

Czas pracy	Produkty			Maksymalny czas pracy
	1	2	3	
Maszyna 1	1	3	2	30
Maszyna 2	2	2	6	20
Zysk jednostkowy	1	2	3	

Maszyna	Wariant	Zwiększenie czasu pracy	Koszt
1	1	7	45
	2	16	70
2	1	10	28
	2	30	80

Łączny koszt modernizacji nie może przekroczyć 125.

Należy dokonać takiej modernizacji maszyn, by zmaksymalizować zysk przy zwiększonych możliwościach produkcyjnych.

2.4.1. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (2/5)

Model matematyczny

Cel

Celem jest dokonanie takiej modernizacji maszyn, by zmaksymalizować zysk otrzymany z wytworzenia produktów P_1, P_2, P_3.

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_1,

x_2 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_2,

x_3 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_3,

2.4.1. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (3/5)

Model matematyczny (c.d.)

$$x_4 = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli czas pracy maszyny 1 zostanie zwiększony o 7 jednostek} \\ 0, \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_5 = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli czas pracy maszyny 1 zostanie zwiększony o 16 jednostek} \\ 0, \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_6 = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli czas pracy maszyny 2 zostanie zwiększony o 10 jednostek} \\ 0, \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_7 = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli czas pracy maszyny 2 zostanie zwiększony o 30 jednostek} \\ 0, \text{ w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

2.4.1. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (4/5)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

Warunki ograniczające

ograniczenie związane z czasem pracy maszyny 1:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 + 7x_4 + 16x_5$$

ograniczenie związane z czasem pracy maszyny 2:

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 20 + 10x_6 + 30x_7$$

warunek budżetowy:

$$45x_4 + 70x_5 + 28x_6 + 80x_7 \leq 125$$

2.4.1. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (5/5)

Model matematyczny i rozwiązanie optymalne

Warunki określające możliwość jednoczesnej realizacji wariantów:

dla maszyny 1:

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

dla maszyny 2:

$$x_6 + x_7 \leq 1$$

warunki nieujemności:

$$x_1,\ x_2, x_3 \geq 0$$

warunki dodatkowe:

$$x_4,\ x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

$x_1 = 0,\quad x_2 = 8{,}7,\quad x_3 = 5{,}43,\quad x_4 = 1,\quad x_5 = 0,\quad x_6 = 0,\quad x_7 = 1$

Wartość funkcji celu jest równa 33,71

2.4.2. Optymalizacja planu wydawniczego (1/5)

Przykład 2.6

Przedmiot	Rodzaj skryptu	Prognoza sprzedaży
Zarządzanie	nowe wydanie	2500
Matematyka	wznowienie	3000
Statystyka	nowe wydanie	2000
Statystyka matematyczna	nowe wydanie	1500
Statystyka opisowa	wznowienie	1500
Finanse	nowe wydanie	1800
Rachunkowość	nowe wydanie	3000
Rachunkowość II	wznowienie	3500
Angielski	nowe wydanie	5000
Francuski	nowe wydanie	3500

Nad skryptami mogą pracować redaktorzy:

Jerzy 480 godzin,
Krystyna 320 godzin,
Maria 350 godzin.

2.4.2. Optymalizacja planu wydawniczego (2/5)

Przykład 2.6 (c.d.)

Skrypt	Jerzy	Krystyna	Maria
Zarządzanie	220	300	-
Matematyka	130	190	-
Statystyka	190	150	210
Statystyka matematyczna	160	-	190
Statystyka opisowa	90	-	120
Finanse	-	220	100
Rachunkowość	-	-	200
Rachunkowość II	-	-	180
Angielski	300	-	240
Francuski	-	400	310

Wydane zostaną:

- co najwyżej dwa skrypty ze statystyki,
- co najwyżej jeden skrypt z rachunkowości,
- matematyka albo zarządzanie.

Należy określić najlepszy plan wydawniczy.

2.4.2. Optymalizacja planu wydawniczego (3/5)

Model matematyczny

Cel

Ustalenie planu wydawniczego, który maksymalizuje łączną, planowaną wielkość sprzedaży

Zmienne decyzyjne

Zmienna	Opis zmiennej		Wartość
x_1	wydanie skryptu:	Zarządzanie	{0, 1}
x_2		Matematyka	{0, 1}
x_3		Statystyka	{0, 1}
x_4		Statystyka matematyczna	{0, 1}
x_5		Statystyka opisowa	{0, 1}
x_6		Finanse	{0, 1}
x_7		Rachunkowość	{0, 1}
x_8		Rachunkowość II	{0, 1}
x_9		Angielski	{0, 1}
x_{10}		Francuski	{0, 1}

2.4.2. Optymalizacja planu wydawniczego (4/5)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$2500x_1 + 3000x_2 + 2000x_3 + 1500x_4 + 1500x_5 + 1800x_6 + 3000x_7 + 3500x_8 + 5000x_9 + 3500x_{10} \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

Jerzy - co najwyżej 480 godzin:

$$220x_1 + 130x_2 + 190x_3 + 160x_4 + 90x_5 + 300x_9 \leq 480$$

Krystyna - co najwyżej 320 godzin:

$$300x_1 + 190x_2 + 150x_3 + 220x_6 + 400x_{10} \leq 320$$

Maria - co najwyżej 350 godzin:

$$210x_3 + 190x_4 + 120x_5 + 100x_6 + 200x_7 + 180x_8 + 240x_9 + 310x_{10} \leq 350$$

Nie więcej niż dwa skrypty ze statystyki:

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

2.4.2. Optymalizacja planu wydawniczego (5/5)

Model matematyczny i rozwiązanie optymalne

Warunki ograniczające (c.d.)

W planie nie może się znaleźć więcej niż jeden skrypt z rachunkowości:

$$x_7 + x_8 \leq 1$$

W planie musi się znaleźć albo skrypt z zarządzania albo matematyki:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Dodatkowe warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

Rozwiązanie 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Rozwiązanie 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 8000.

2.4.3. Zagadnienie lokalizacji (1/4)

Przykład 2.7

Proponowana lokalizacja	Rejony
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5, 7
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 4, 6
F	4, 5, 6
G	1, 5, 6, 7

Należy znaleźć najmniejszą liczbę zrelokalizowanych komisariatów pokrywających swym zasięgiem wszystkie siedem rejonów.

2.4.3. Zagadnienie lokalizacji (2/4)

Model matematyczny

Cel

Określenie najmniejszej liczby relokalizowanych komisariatów, aby każdy rejon był pod opieką przynajmniej jednego komisariatu.

Zmienne decyzyjne

Zmienna	Opis zmiennej		Wartość
x_1	Proponowana lokalizacja komisariatu:	A	{0, 1}
x_2		B	{0, 1}
x_3		C	{0, 1}
x_4		D	{0, 1}
x_5		E	{0, 1}
x_6		F	{0, 1}
x_7		G	{0, 1}

2.4.3. Zagadnienie lokalizacji (3/4)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \to \min$$

Warunki ograniczające

Rejon 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \geq 1$$

Rejon 2:

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

Rejon 3:

$$x_3 + x_5 \geq 1$$

Rejon 4:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

2.4.3. Zagadnienie lokalizacji (4/4)

Model matematyczny i rozwiązanie optymalne

Rejon 5:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$$

Rejon 6:

$$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

Rejon 7

$$x_1 + x_2 + x_7 \geq 1$$

Dodatkowe warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	0	0	1	0	0

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 2.

Pora na relaks