Rozdział 2

PROGRAMOWANIE LINIOWE CAŁKOWITOLICZBOWE

2.3. ZADANIA

W zadaniach 2.1 – 2.20 zakłada się, że warunek nieujemności jest nałożony na wszystkie zmienne.

Wykorzystując tryb konwersacyjny programu SIMP_INT.EXE, rozwiązać zadania:

Zadanie 2.1

–3	–3	–13	→	min
x_1	x_2	x_3		
–3	6	7	≤	8
6	–3	7	≤	8

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	5	tak
x_2	0	5	tak
x_3	0	5	tak

Zadanie 2.2

1	1	1	→	min
x_1	x_2	x_3		
3	3	0	≥	95
0	3	3	≥	106
0	0	1	≥	16

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	20	tak
x_2	0	20	tak
x_3	0	20	tak

Zadanie 2.3

2	3	1	→	max
x_1	x_2	x_3		
3	4	5	≤	12

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	100 000 000 000	tak
x_2	1	100 000 000 000	tak
x_3	2	100 000 000 000	tak

Zadanie 2.4

3	3	13	→	max
x_1	x_2	x_3		
–3	6	7	≤	8
6	–3	7	≤	8

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	5	tak
x_2	0	5	nie
x_3	0	5	nie

Zadanie 2.5

2	1	3	2	2	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	2	2	1	2	≤	200
13	2	3	0	7	≤	220
2	3	0	7	2	≤	300
1	2	2	0	1	≤	280
7	3	5	2	1	≤	210

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	100 000 000 000	tak
x_2	0	100 000 000 000	nie
x_3	0	100 000 000 000	tak
x_4	0	100 000 000 000	nie
x_5	0	100 000 000 000	tak

Zadanie 2.6

1	1	1	1	1	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	0	0	0	0	≤	3,5
0	1	0	0	0	≤	4,5
0	1	1	1	1	≤	0,5

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	100 000 000 000	tak
x_2	0	100 000 000 000	tak
x_3	0	100 000 000 000	tak
x_4	0	100 000 000 000	tak
x_5	0	100 000 000 000	tak

Zadanie 2.7

–1	–2	→	min
x_1	x_2		
3	11	≤	44
5	3	≤	35

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	7	tak
x_3	0	4	tak

Zadanie 2.8

4	2	→	max
x_1	x_2		
5	11	≤	55
–3	11	≥	11

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	100 000 000 000	tak
x_3	0	100 000 000 000	tak

Zadanie 2.9

90	40	10	37	→	min
x_1	x_2	x_3	x_4		
15	10	10	15	≤	40
20	15	0	10	≤	50
20	20	0	10	≤	40
15	5	4	10	≤	35

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	1	tak
x_2	0	1	tak
x_3	0	1	tak
x_4	0	1	tak

Zadanie 2.10

216	247	325	217	224	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
1	2	2	1	2	≤	4
3	2	3	0	4	≤	3
2	3	0	3	2	≤	6
1	2	2	0	1	≤	3
2	3	2	2	1	≤	3

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	1	tak
x_2	0	1	tak
x_3	0	1	tak
x_4	0	1	tak
x_5	0	1	tak

Zadanie 2.11

2	3	1	2	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4		
5	2	1	1	≤	15
2	6	10	8	≤	60
1	1	1	1	≤	8
2	2	3	3	≤	16

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	3	tak
x_2	0	7	tak
x_3	0	5	tak
x_4	0	5	tak

Zadanie 2.12

1	1	1	1	$\to$	max
x_1	x_2	x_3	x_4		
4	2	1	4	$\leq$	15
2	3	4	4	$\leq$	34
1	1	0	1	$\leq$	17
2	0	0	3	$\leq$	23

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	5	tak
x_2	0	5	tak
x_3	0	5	tak
x_4	0	5	tak

Zadanie 2.13

–13	–7	–13	–7	$\to$	max
x_1	x_2	x_3	x_4		
13	7	0	0	$\leq$	100
0	0	13	7	$\leq$	100

Dodatkowe ograniczenia:

	dolne ograniczenie	górne ograniczenie	warunek całkowitoliczbowości
x_1	0	100	tak
x_2	0	100	tak
x_3	0	100	tak
x_4	0	100	tak
x_5	0	100	tak

Wykorzystując tryb konwersacyjny programu CIECIA.EXE, rozwiązać zadania:

Zadanie 2.14

1	2	3	→	max
x_1	x_2	x_3		
–6	12	14	≤	16
6	–3	7	≤	8

Zadanie 2.15

12	9	10	→	min
x_1	x_2	x_3		
3	4	0	=	5

Zadanie 2.16

1	1	1	1	1	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	2	0	0	0	≤	7
0	2	2	0	0	≤	9
0	2	2	2	2	≤	15

Zadanie 2.17

2	1	2	1	→	min
x_1	x_2	x_3	x_4		
13	7	0	0	≤	100
0	0	13	7	≤	100

Zadanie 2.18

245	285	→	max
x_1	x_2		
20	30	≤	5000
4	0	≤	615
6	7	≤	1000
0	4	≤	800
0	11	≤	400
30	60	≤	5400

Zadanie 2.19

1	2	0	0	→	max
x_1	x_2	x_3	x_4		
1	2	1	0	≤	4
2	2	0	2	≤	1

Zadanie 2.20

Rozwiązać zadania 2.1–2.5, nie uwzględniając dodatkowych ograniczeń związanych z zakresem zmiennych. Porównać metodę cięć z metodą podziału i ograniczeń.

Dla sformułowanych poniżej problemów zbudować model matematyczny i rozwiązać otrzymane zadanie za pomocą jednego z programów: SIMP_INT.EXE, CIECIA.EXE.

Zadanie 2.21

Garncarz wyrabia miski i dzbany ze 100 kg zapasu gliny. Jedna miska wymaga 3 kg gliny, natomiast dzban 6 kg gliny. Ile misek i dzbanów powinien produkować garncarz, aby osiągnąć jak największy zysk, jeśli miskę sprzedaje za 11 zł, a dzban za 23 zł?

Zadanie 2.22

Zakład jubilerski wytwarza łańcuszki i pierścionki ze złota oraz masy perłowej. Na łańcuszek zużywa się 4 g złota i 1 g masy perłowej, natomiast pierścionek wymaga 3 g złota i 1 g masy perłowej. Ponadto łańcuszek przynosi zysk w wysokości 23 zł, a pierścionek 17 zł. Zaplanować produkcję wyrobów złotniczych, jeśli wiadomo że zakład dysponuje 190 g złota oraz 55 g masy perłowej.

Zadanie 2.23

Firma produkująca zabawki zdecydowała się na produkcję 3 nowych pluszowych zabawek: misia, żyrafy i słonia. Do produkcji zużywa się plusz i watę. Zasoby tych materiałów, jednostkowe zużycie pluszu i waty na poszczególne pluszaki oraz jednostkowy zysk ze sprzedaży zabawek przedstawiono w tablicy 2.1.

zysk		plusz	wata
5	miś	8	13
3	żyrafa	6	8
4	słoń	7	17
	zasoby	300	500

Tablica 2.1

Określić wielkość produkcji zabawek maksymalizujący zysk.

Zadanie 2.24

Zakład elektroniczny produkuje walkmany oraz telewizory. W procesie produkcyjnym wykorzystywana jest maszyna, która może pracować 48 godzin tygodniowo. Produkcja walkmana wymaga 30 minut pracy maszyny, a produkcja telewizora 60 minut, przy czym godzina pracy urządzenia nad walkmanem kosztuje 12 zł, a nad telewizorem 6 zł.

Firma może przeznaczyć nie więcej niż 400 zł tygodniowo na koszty produkcji. Każda sztuka walkmana przynosi zysk w wysokości 10 zł, a każda sztuka telewizora 15 zł. Opracować tygodniowy plan produkcji przynoszący maksymalny zysk.

Rozwiązać powyższe zadanie z następującymi modyfikacjami:

1) Cena sprzętu zmienia się w ten sposób, że zysk ze sprzedaży walkmana wynosi 15 zł, a ze sprzedaży telewizora 19 zł, natomiast firma może przeznaczyć 420 zł tygodniowo.

2) Maszyna może być wykorzystywana przez 50 godzin tygodniowo.

Zadanie 2.25

Firma „Kibic" produkuje makiety stadionów klubów piłkarskich. Są to kluby: Ajax Amsterdam, Bayern Monachium, FC Liverpool oraz Real Madryt. Do produkcji wykorzystuje się gips i farbę. Na poszczególne rodzaje makiet zużywa się odpowiednio: 6 kg, 7 kg, 8 kg i 10 kg gipsu. Natomiast farby zużywa się odpowiednio (w litrach na 1 sztukę): 4, 2, 8 i 6. Firma oszacowała zysk z poszczególnych makiet: 15 zł (Ajax), 13 zł (Bayern), 11 zł (Liverpool), 19 zł (Real).

1) Jaka powinna być produkcja firmy w przyszłym sezonie, jeżeli w magazynie znajduje się 2000 kg gipsu oraz 1600 litrów farby?

2) Jak zmieni się optymalny plan produkcji, jeśli w magazynie jest: 2200 kg gipsu oraz 1440 litrów farby.

3) Jak zmieni się optymalny plan produkcji, jeśli przewidywany zysk ze sprzedaży wszystkich makiet będzie jednakowy i będzie wynosił 17 zł.

Zadanie 2.26

Zakład stolarski produkuje trzy rodzaje zestawów kuchennych. Do ich produkcji zużywa się m. in. drewno, płyty pilśniowe, lakier, okleinę i klej. Miesięczne dostawy tych surowców są ograniczone i wynoszą odpowiednio: 150 m^3, 2000 m^2, 150 litrów, 3500 m^2, 100 kg. Normy określające maksymalne zużycie poszczególnych surowców na wykonanie zestawów przedstawiono w tablicy 2.2.

Zestaw	Zużycie surowca				
	drewno	pilśnia	lakier	okleina	klej
I	2,6	18,2	2,1	26,5	1,2
II	3,1	23,7	3,5	33,3	2,1
III	2,0	16,5	1,6	21,8	1,0

Tablica 2.2

Różnica między ceną zbytu a wartością zużytych materiałów i robocizną wynosi dla zestawu I: 280 zł, dla zestawu II: 410 zł, a dla zestawu III: 320 zł.

Ile kompletów mebli powinien wyprodukować zakład, aby osiągnąć maksymalny zysk?

Zadanie 2.27

Firma dostarcza sól do wysypywania dróg podczas zimy. Ma ona trzy ciężarówki i dyspozytor próbuje określić jutrzejsze dostawy do miast M1, M2 i M3. Dwie z ciężarówek mają ładowność 15 ton, a trzecia ma ładowność 30 ton. Ponieważ ciężarówki mogą wykonać tylko jeden kurs dziennie, oznacza to, że dwa miasta dostaną 15 ton soli a jedno 30 ton. Koszt wysłania ciężarówki o ładowności 30 ton do M1 wynosi 100 zł, do M2 90 zł a do M3 50 zł. Natomiast koszt wysłania ciężarówki o ładowności 15 ton do M1 wynosi 70 zł, do M2 80 zł a do M3 40zł. Zbudować i rozwiązać zadanie, które pomoże określić, ile soli należy wysłać do każdego z miast, aby zminimalizować koszty.

Zadanie 2.28

Fabryka samochodów ma 5 przestarzałych zakładów, po jednym w M, O i C, oraz dwa w N. Zarząd fabryki rozważa możliwość modernizacji tych zakładów tak, aby mogły one produkować bloki cylindrów i system napędowy do nowego modelu samochodu. Koszt modernizacji każdego zakładu i jego zdolności produkcyjne po zmodernizowaniu przedstawiono w tablicy 2.3.

Zakład	Koszt (mln zł)	Bloki (w tys. szt.)	Napęd (w tys. szt.)
M	25	500	300
N	35	800	400
N	35	400	800
O	40	900	600
C	20	200	300

Tablica 2.3

Przewidywane zapotrzebowanie na podzespoły wynosi 900 tys. bloków i 900 tys. zespołów napędowych. Zarząd fabryki chce ustalić, które zakłady powinny zostać zmodernizowane tak, aby zaspokoić przewidywane zapotrzebowanie i równocześnie utrzymać koszty modernizacji na jak najniższym poziomie.

Sformułować zadanie, które pomoże rozwiązać problem stojący przed zarządem fabryki. Rozwiązać zadanie i podać interpretację otrzymanego rozwiązania.

Zadanie 2.29

Oddział banku pracuje nad określeniem dobrego harmonogramu pracy dla swoich pracowników (zarówno pełnoetatowych, jak i pracujących na pół etatu). Nowy harmonogram powinien zapewnić sprawne funkcjonowanie banku oraz odpowiednie warunki pracy dla personelu. Bank jest otwarty codziennie od 9.00 do 19.00. Liczbę kasjerów niezbędną do zapewnienia sprawnej obsługi klientów w zależności od pory dnia przedstawiono w tablicy 2.4.

Godziny	Liczba kasjerów
8.00–9.00	5
9.00–10.00	7
10.00–11.00	5
11.00–12.00	10
12.00–13.00	11
13.00–14.00	9
14.00–15.00	7
15.00–16.00	5
16.00–17.00	9
17.00–18.00	6
18.00–19.00	4

Tablica 2.4

Kasjer zatrudniony na pełnym etacie zaczyna pracę o pełnej godzinie i pracuje przez 4 godziny bez przerwy, następnie ma godzinną przerwę, po której pracuje przez kolejne 3 godziny. Kasjer zatrudniony na pół etatu pracuje przez 4 godziny bez przerwy (zaczynając pracę również o pełnej godzinie). Wliczając pensje i różne Dodatkowe opłaty, kasjer zatrudniony na pełnym etacie kosztuje bank l,5 zł/godz., podczas gdy kasjer zatrudniony na 1/2 etatu kosztuje 0,8 zł/godz.

1) Sformułować i rozwiązać zadanie programowania całkowitoliczbowego, które może zostać wykorzystane do ustalenia harmonogramu pracy kasjerów przy jak najmniejszym koszcie.

2) Dyrektor banku uznała, że należy uwzględnić Dodatkowe ograniczenia. Konkretnie, chce ona, aby o każdej porze dnia przynajmniej jeden z pracujących kasjerów był pracownikiem pełnoetatowym, oraz aby bank zatrudniał przynajmniej 5 kasjerów na pełnym etacie. Skorygować poprzednie zadanie tak, aby uwzględnić Dodatkowe wymagania, a następnie rozwiązać je.

Zadanie 2.30

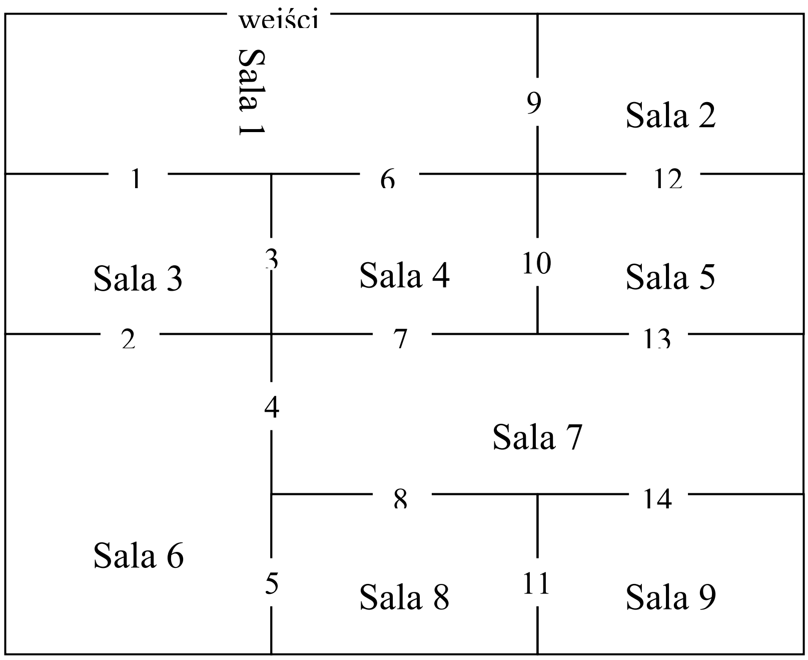
Firma konsultacyjna stworzyła zespół, który ma zbadać możliwość jej rozwoju. Jeden z analityków zbudował model programowania liniowego, który ma służyć do wyboru członków tego zespołu. Członkowie zespołu będą wybrani z trzech wydziałów. Zespół powinien składać się z co najmniej 3 osób oraz z co najwyżej 7 osób. Reprezentacje poszczególnych wydziałów nie powinny pozostawać w zbyt dużej dysproporcji, tzn. stosunek liczebności przedstawicieli poszczególnych wydziałów może co najwyżej wynosić 1:2. W związku z nowymi obowiązkami w zespole reprezentanci wydziałów będą musieli zrezygnować z części swoich dotychczasowych obowiązków. Obowiązki te przejmą nowi pracownicy zatrudnieni przez firmę. Koszty zatrudnienia nowych pracowników oraz koszty reorganizacji na wydziałach w przeliczeniu na jednego członka zespołu są następujące: wydział I 938 zł, wydział II 895 zł, wydział III 877 zł.

1) Sformułować i rozwiązać odpowiednie zadanie programowania całkowitoliczbowego.

2) Właściciel firmy nałożył dodatkowy wymóg, aby nowy zespół liczył 3, 5, lub 7 osób. Czy i w jaki sposób warunek ten wpłynie na rozwiązanie zadania?

Zadanie 2.31

Narodowa Galeria Obrazów zamierza zainstalować nowy system telewizji wewnętrznej. Na system ten składają się kamery telewizyjne zainstalowane w przejściach między poszczególnymi pomieszczeniami galerii. Rysunek 2.1 ilustruje plan wnętrza galerii z dziewięcioma pomieszczeniami wystawowymi.



Rysunek 2.1

Przejścia między pomieszczeniami są ponumerowane od 1 do 14. Firma zajmująca się telewizją wewnętrzną zaproponowała zainstalowanie kamer w przejściach między pomieszczeniami w taki sposób, aby każda z kamer mogła śledzić równocześnie dwa pomieszczenia. Oznacza to, że na przykład kamera zainstalowana w przejściu 4 może monitorować sale 6 i 7. Dyrekcja Galerii uznała, że nie ma potrzeby instalowania kamery przy wejściu do galerii. Z uwagi na wysoki koszt kamer dyrekcja galerii chce mieć możliwość śledzenia wszystkich dziewięciu pomieszczeń przy użyciu jak najmniejszej liczby kamer.

1) Zbuduj i rozwiąż zadanie, które pomoże dyrekcji określić najmniejszą niezbędną liczbę kamer telewizyjnych i ich lokalizację.

2) Ze względu na wartość obrazów znajdujących się w pomieszczeniu 6, pomieszczenie to musi być obserwowane przez dwie kamery. Zmodyfikuj wyjściowe zadanie tak, aby jego nowe rozwiązanie spełniało ten dodatkowy warunek. Jaka liczba kamer i jaka ich lokalizacja będzie w tej nowej sytuacji optymalna?