

Optymalizacja całkowitoliczbowa

Tadeusz Trzaskalik

Słowa kluczowe

- **Rozwiązanie całkowitoliczbowe**
- **Założenie podzielności**
- **Warunki całkowitoliczbowości**
- **Czyste zadanie programowania całkowitoliczbowego**
- **Mieszane zadanie programowania całkowitoliczbowego**
- **Relaksacja zadania**
- **Metoda podziału i ograniczeń**
- **Metoda zaokrągleń**
- **Zmienne binarne**

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (1/7)

Przykład 2.1

Zadanie wyjściowe

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - całkowite

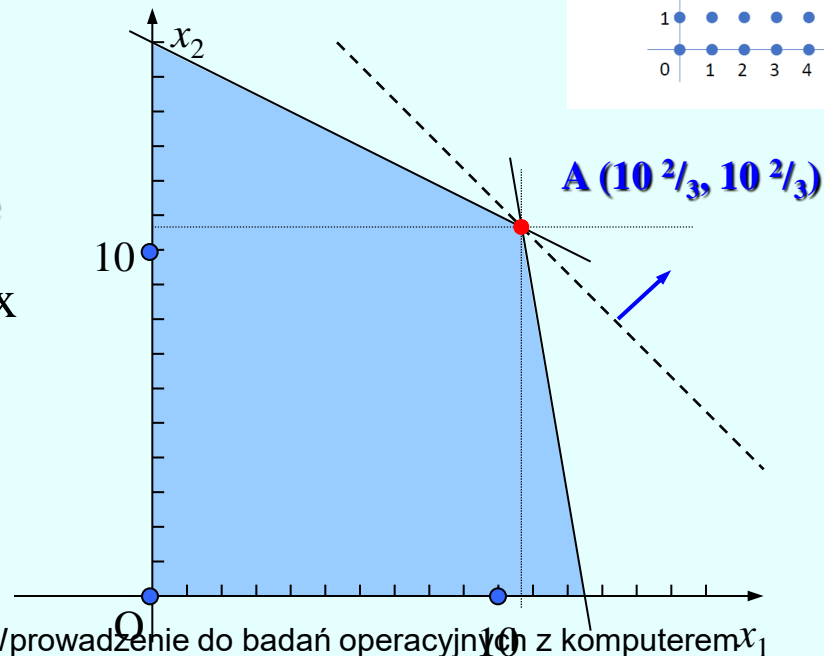
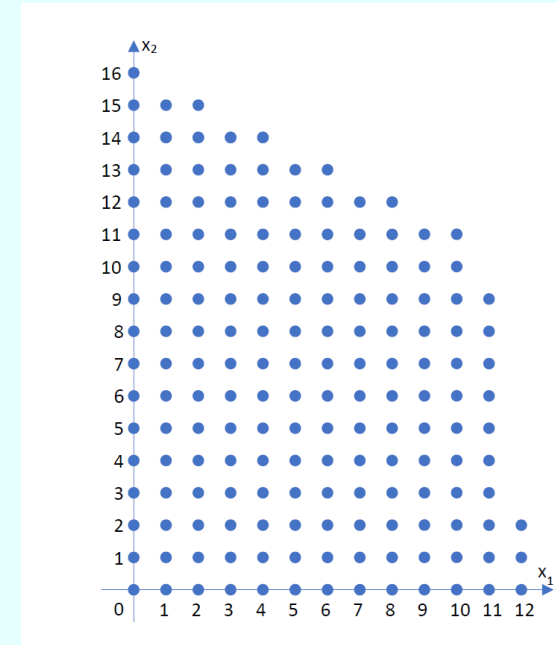
Zadanie zrelaksowane

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



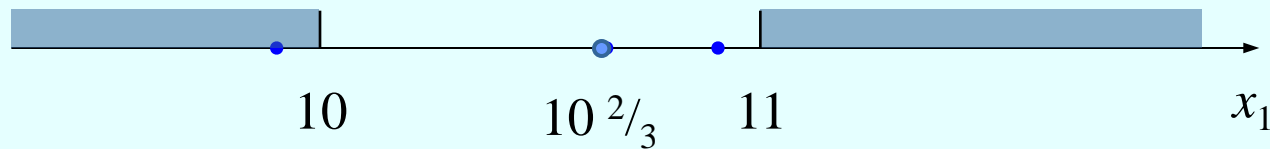
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (2/7)

Podział względem x_1

Zadanie 1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Zadanie 2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \\ \mathbf{0 \leq x_1 \leq 10} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

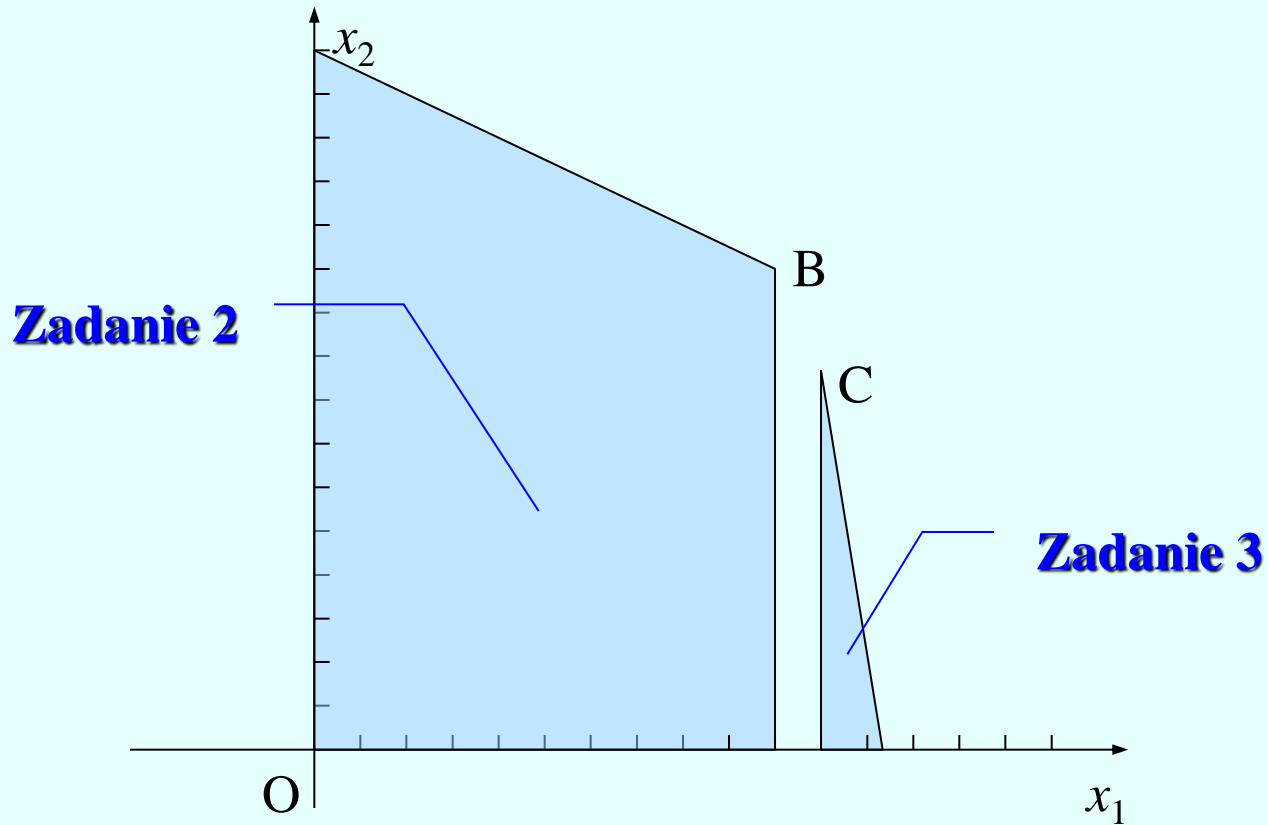
Zadanie 3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 18x_1 + 3x_2 &\leq 224 \\ \mathbf{x_1 \geq 11} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (3/7)

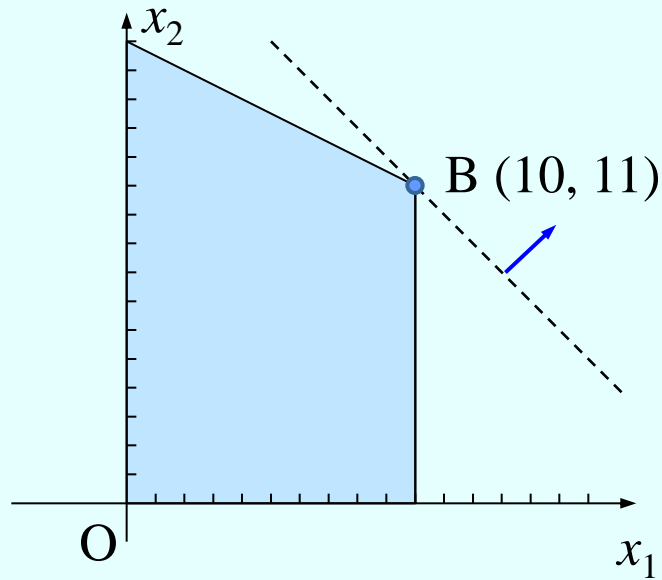
Zbiory rozwiązań dopuszczalnych zadań 2 i 3



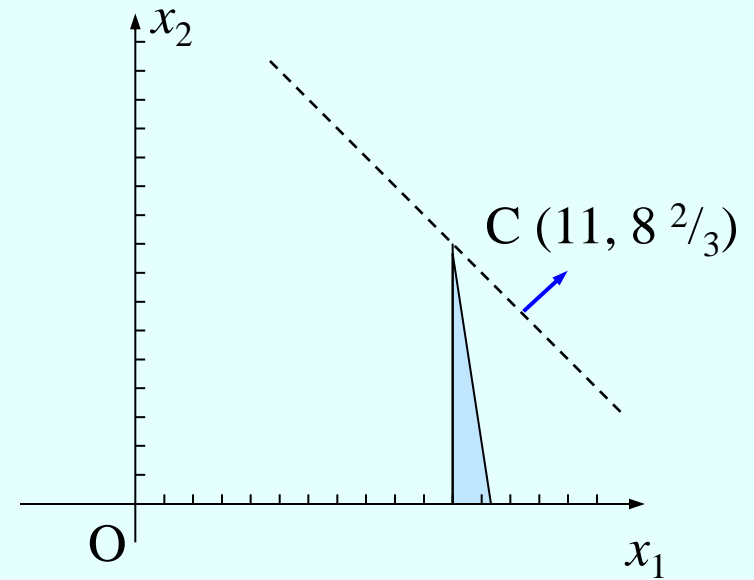
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (4/7)

Rozwiązania optymalne zadań 2 i 3



Zadanie 2



Zadanie 3

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (5/7)

Podział względem x_2

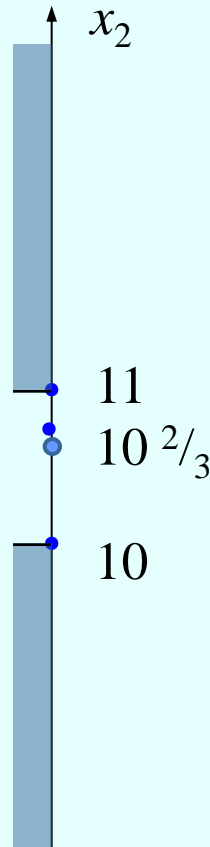
Zadanie 1'

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Zadanie 3'

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_2 \geq 11$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zadanie 2'

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

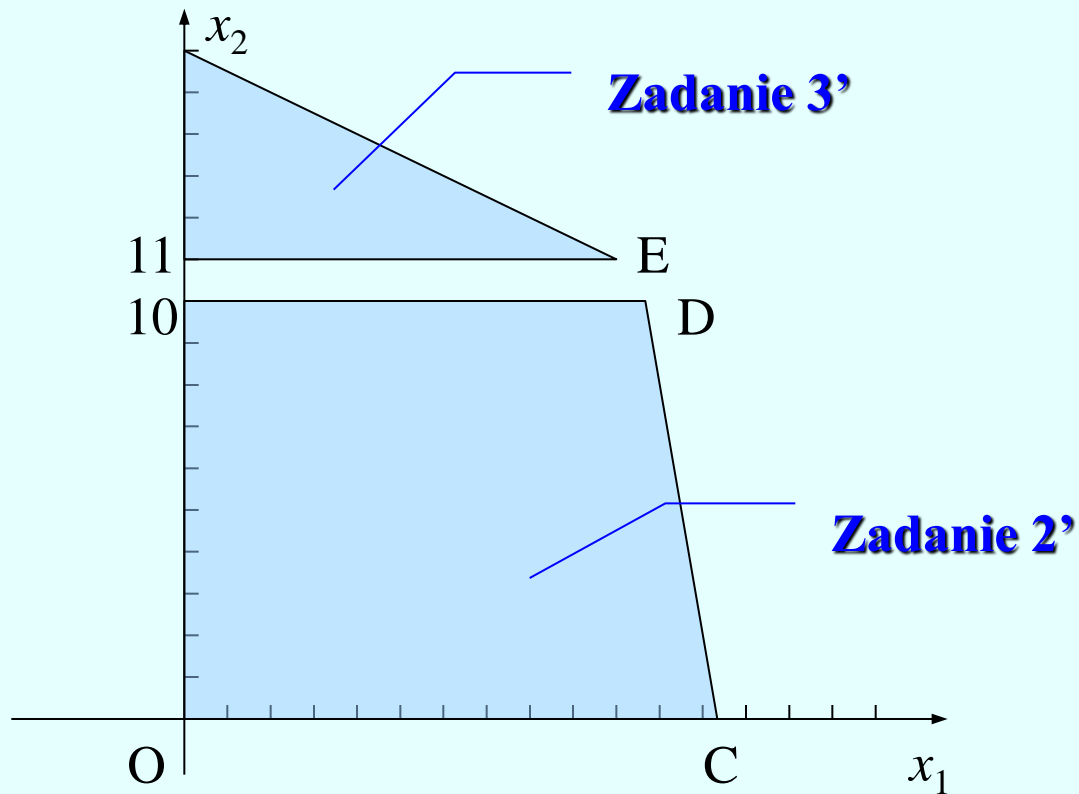
$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (6/7)

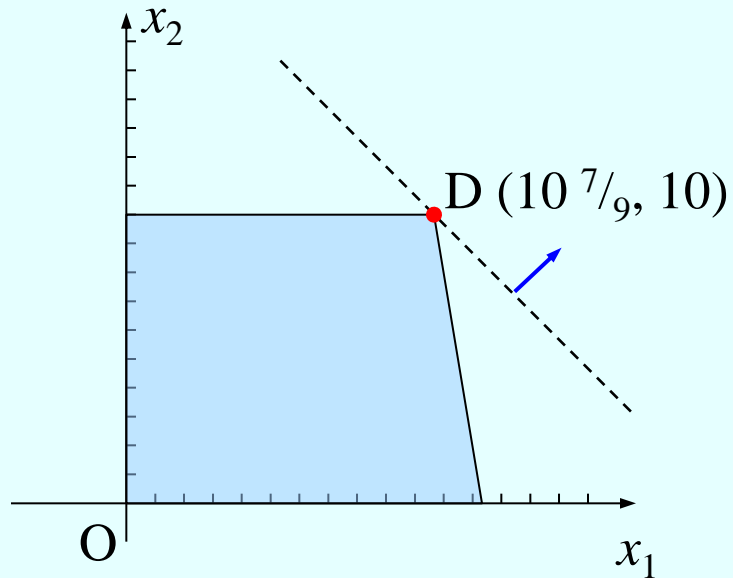
Zbiory rozwiązano dopuszczalnych zadań 2' i 3'



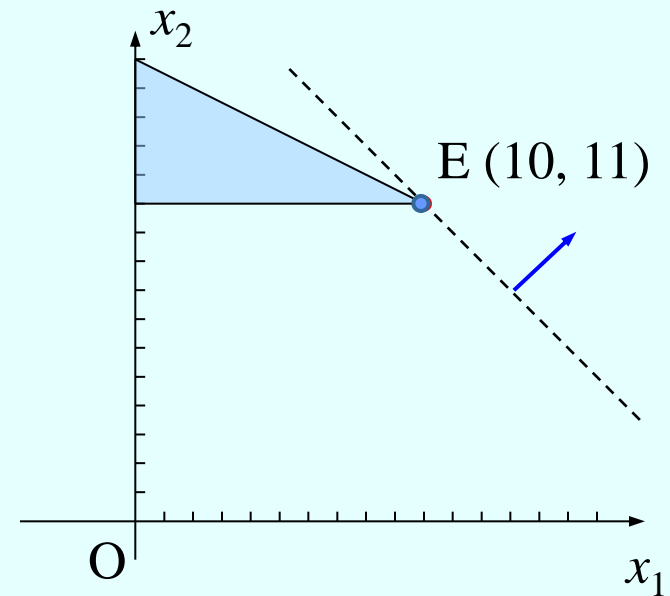
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.1. Zadanie czyste (7/7)

Rozwiązania optymalne zadań 2' i 3'



Zadanie 2'



Zadanie 3'

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (1/14)

Geometryczna interpretacja zbioru rozwiązań dopuszczalnych

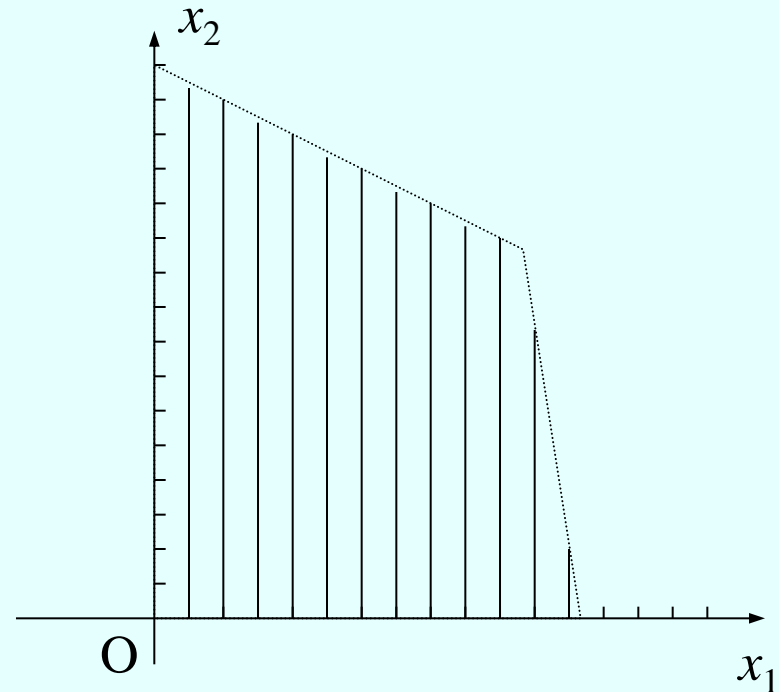
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 - całkowite



2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (2/14)

Geometryczna interpretacja zbioru rozwiązań dopuszczalnych (c.d.)

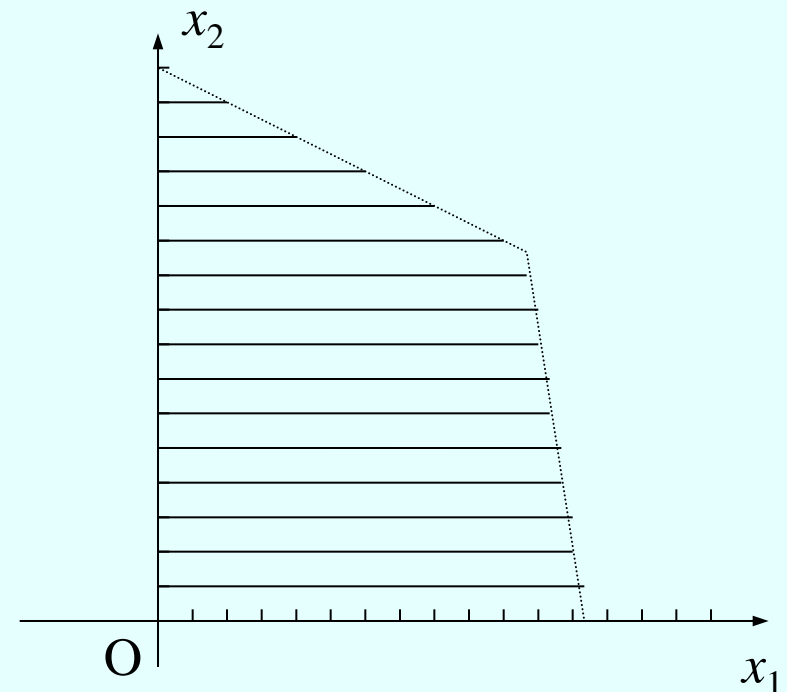
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_2 - całkowite



2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (3/14)

Geometryczna interpretacja zbioru rozwiązań dopuszczalnych (c.d.)

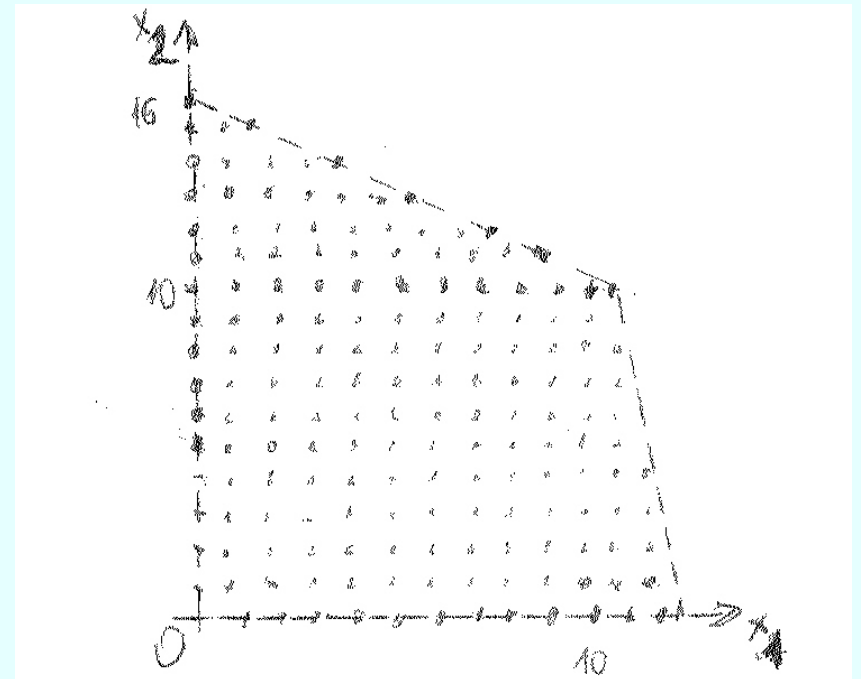
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$18x_1 + 3x_2 \leq 224$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 - całkowite



2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (4/14)

Przykład 2.2

Zadanie wyjściowe

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0 \\0 &\leq x_2 \leq 5 \\0 &\leq x_3 \leq 5\end{aligned}$$

x_2, x_3 - całkowite

Zadanie zrelaksowane

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0 \\0 &\leq x_2 \leq 5 \\0 &\leq x_3 \leq 5\end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2,667, x_2 = 2,667, x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 16$$

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (5/14)

Iteracja 1

Lista rozpatrywanych zadań:	1
Zadania usuwane z listy:	-
Lista zadań po modyfikacji:	1
Zadania wybrane do podziału:	1
Rozwiązanie zadania 1:	$x_1 = 2,667, x_2 = 2,667, x_3 = 0$
Podział względem zmiennej:	x_2

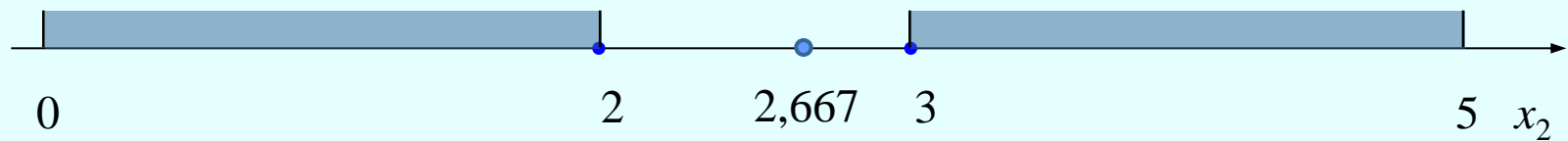
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (6/14)

Iteracja 1 (c.d.)

Zadanie 1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 5 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Zadanie 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0,286 \quad f_{\text{opt}} = 15,714$$

Zadanie 3

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 3 \leq x_2 \leq 5 \quad 0 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Zadanie sprzeczne

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (7/14)

Iteracja 2

Lista rozpatrywanych zadań:	1, 2, 3
Zadania usuwane z listy:	1 (podzielone), 3 (sprzeczne)
Lista zadań po modyfikacji:	2
Zadania wybrane do podziału:	2
Rozwiązanie zadania 2:	$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0,286$
Podział względem zmiennej:	x_3

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (8/14)

Iteracja 2 (c.d.)

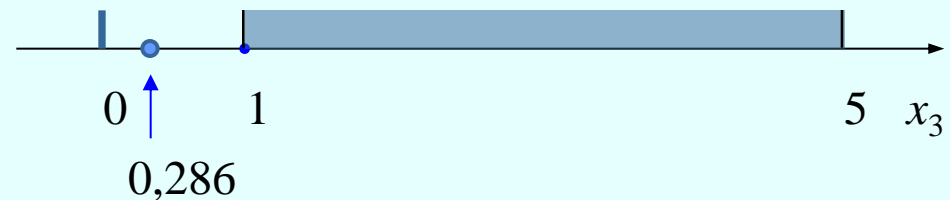
Zadanie 2

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 0 \leq x_3 \leq 5$$



Zadanie 4

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{0 \leq x_3 \leq 0}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 2,33, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0$$

$$f_{\text{opt}} = 13$$

Zadanie 5

$$3x_1 + 3x_2 + 13x_3 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$6x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{1 \leq x_3 \leq 5}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0,33, \quad x_2 = 0,33, \quad x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 15$$

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (9/14)

Iteracja 3

Lista rozpatrywanych zadań:	2, 4, 5
Zadania usuwane z listy:	2 (podzielone)
Lista zadań po modyfikacji:	4, 5
Zadania wybrane do podziału:	5
Rozwiązanie zadania 5:	$x_1 = 0,33, x_2 = 0,33, x_3 = 1$
Podział względem zmiennej:	x_2

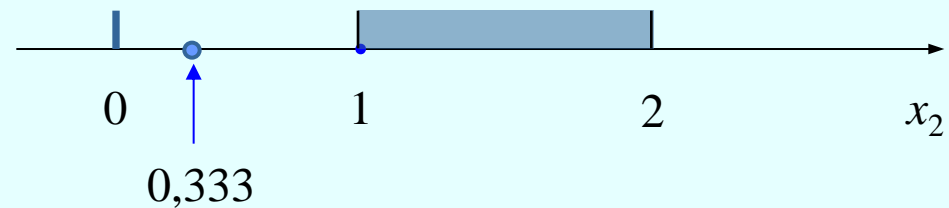
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (10/14)

Iteracja 3 (c.d.)

Zadanie 5

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Zadanie 6

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \boxed{0 \leq x_2 \leq 0} \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,143$$

$$f_{\text{opt}} = 14,857$$

Zadanie 7

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad \boxed{1 \leq x_2 \leq 2} \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$

Zadanie sprzeczne

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (11/14)

Iteracja 4

Lista rozpatrywanych zadań:	4, 5, 6, 7
Zadania usuwane z listy:	5 (podzielone), 7 (sprzeczne)
Lista zadań po modyfikacji:	4, 6
Zadania wybrane do podziału:	6
Rozwiązanie zadania 6:	$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1,143$
Podział względem zmiennej:	x_3

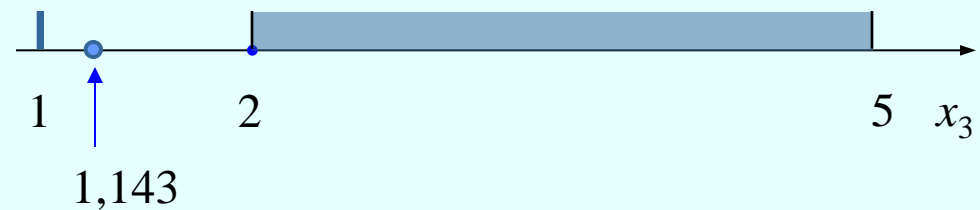
2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (12/14)

Iteracja 4 (c.d.)

Zadanie 6

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 0 \quad 1 \leq x_3 \leq 5 \end{aligned}$$



Zadanie 8

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 0 \leq x_2 \leq 0 \quad \boxed{1 \leq x_3 \leq 1} \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$x_1 = 0,167, x_2 = 0, x_3 = 1$$

$$f_{\text{opt}} = 13,5$$

Zadanie 9

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 &\rightarrow \max \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 &\leq 8 \\ x_1 \geq 0 \quad 1 \leq x_2 \leq 2 \quad \boxed{2 \leq x_3 \leq 5} \end{aligned}$$

Zadanie sprzeczne

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (13/14)

Iteracja 5

Lista rozpatrywanych zadań:

4, 6, 8, 9

Zadania usuwane z listy:

6 (podzielone), 9 (sprzeczne)

4 ($f_{\text{opt}}^{(4)} = 13 < f_{\text{opt}}^{(8)} = 13,5$)

Lista zadań po modyfikacji:

8

Rozwiązanie zadania 8:

$x_1 = 0,167, x_2 = 0, x_3 = 1$

Spełnione warunki całkowitoliczbowości. Rozwiązanie zadania 8 jest rozwiązaniem optymalnym zadania wyjściowego.

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.2. Zadanie mieszane (14/14)

Zestawienie rozwiązywanych zadań

Numer zadania	Zakresy zmienności		Rozwiązanie optymalne			Optymalna wartość funkcji celu	Nowo-generowane zadania
	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3		
1	[0, 5]	[0, 5]	2,667	2,667	0	16	2, 3
2	[0, 2]	[0, 5]	2	2	0,286	15,714	4, 5
3	[3, 5]	[0, 5]	Zadanie sprzeczne				
4	[0, 2]	[0, 0]	2,333	2	0	13	
5	[0, 2]	[1, 5]	0,333	0,333	1	15	6,7
6	[0, 0]	[1, 5]	0	0	1,143	14,857	8,9
7	[1, 2]	[1, 5]	Zadanie sprzeczne				
8	[0, 0]	[1, 1]	0,167	0	1	13,5	
9	[1, 2]	[2, 5]	Zadanie sprzeczne				

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.3. Reguły postępowania w metodzie podziału i ograniczeń (1/1)

Algorytm

W każdej iteracji wykonujemy następujące operacje:

- 1.** Porządkowanie listy zadań zrelaksowanych.
- 2.** Sprawdzenie kryterium optymalności i w przypadku jego spełnienia zakończenie obliczeń.
- 3.** Wybór zadania do podziału.
- 4.** Wybór zmiennej, względem której dokonamy podziału.
- 5.** Podział zadania, rozwiązanie nowo utworzonych zadań i umieszczenie ich na liście zadań zrelaksowanych.

2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.4. Zaokrąglanie rozwiązań(1/2)

Przykład 2.3

Zadanie wyjściowe

$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

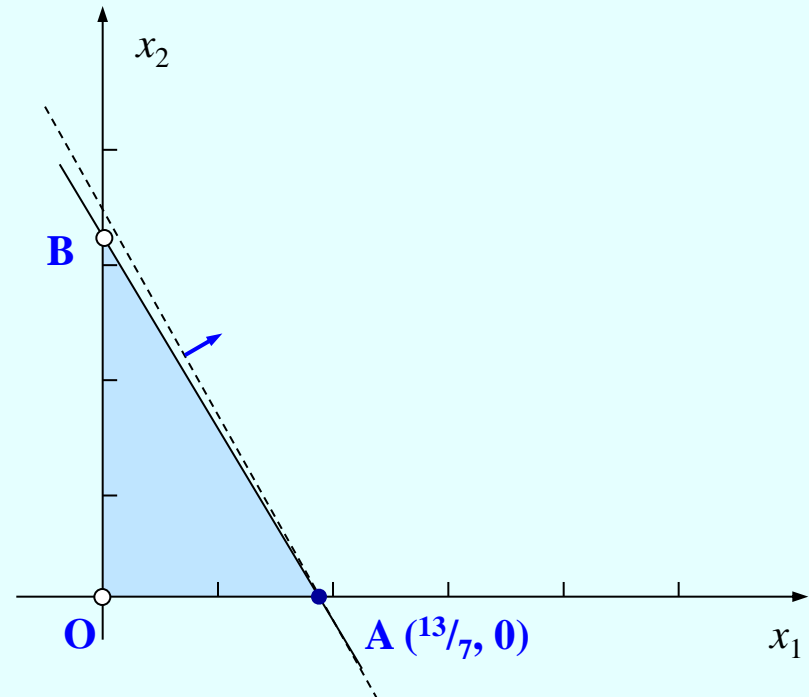
x_1, x_2 - całkowite

Zadanie zrelaksowane

$$f(x_1, x_2) = 21x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 4x_2 \leq 13$$

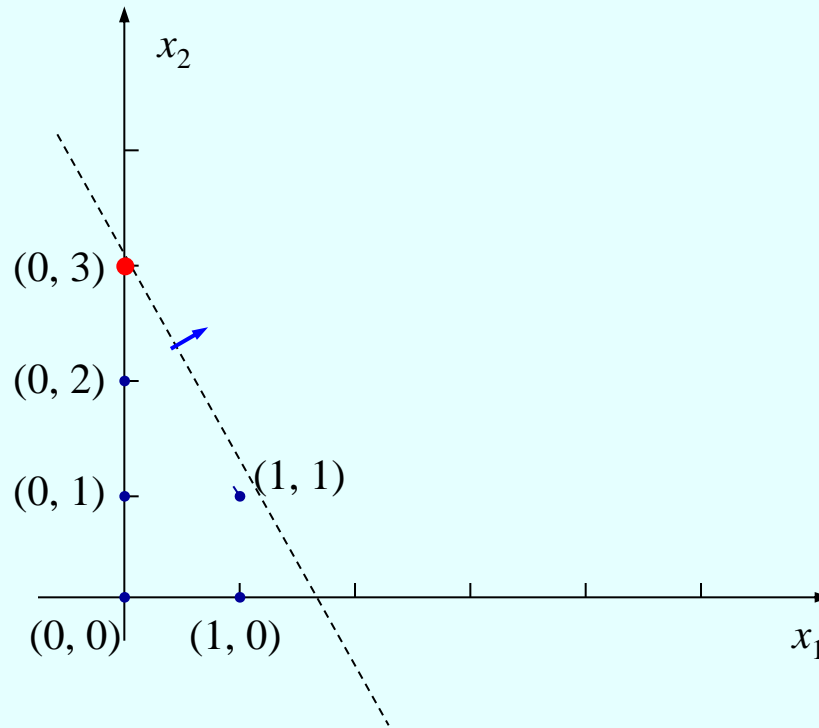
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2.2. Metoda podziału i ograniczeń

2.2.4. Zaokrąglanie rozwiązań(2/2)

Porównanie wartości funkcji kryterium



$$\begin{array}{lll} f(0, 0) = 0, & f(0, 1) = 11, & f(0, 2) = 22, \\ f(0, 3) = 33, & f(1, 0) = 21, & f(1, 1) = 32, \end{array}$$

2.3. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej całkowitoliczbowej

2.3.1. Zagadnienie cięcia (1/4)

Przykład 2.5

Zamówienie - 150 kompletów zbrojeniowych,

Długość kłód - 9,0 m,

Rozpatrywane sposoby rozkroju:

Sposoby rozkroju		1	2	3	4	5	6	7	8
Liczba desek	Długich (3,7 m)	2	1	1	1	0	0	0	0
	Średnich (2,6 m)	0	2	1	0	3	2	1	0
	Krótkich (1,7 m)	0	0	1	3	0	2	3	5
Odpad (w metrach)		1,6	0,1	1	0,2	1,2	0,4	1,3	0,5

W jaki sposób należy rozcinać kłody, by wykonać zamówienie przy minimalnym odpadzie drewna?

2.3.1. Zagadnienie cięcia (2/4)

Model matematyczny

Cel

Znalezienie takiego sposobu rozkroju, który minimalizuje odpad.

Zmienne decyzyjne

x_1 – liczba kłód pociętych sposobem 1,

x_2 – liczba kłód pociętych sposobem 2,

x_3 – liczba kłód pociętych sposobem 3,

x_4 – liczba kłód pociętych sposobem 4,

x_5 – liczba kłód pociętych sposobem 5,

x_6 – liczba kłód pociętych sposobem 6,

x_7 – liczba kłód pociętych sposobem 7,

x_8 – liczba kłód pociętych sposobem 8,

2.3. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej całkowitoliczbowej

2.3.1. Zagadnienie cięcia (3/4)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) =$$

$$0,9x_1 + 0,1x_3 + 0,2x_4 + 0,3x_5 + 0,7x_6 + 1,1x_7 + 1,4x_8 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

$$\text{kłody długie: } 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 150$$

$$\text{kłody średnie: } 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 = 150$$

$$\text{kłody krótkie: } x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 = 150$$

$$\text{warunki nieujemności: } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 72, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 48, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 0, \quad x_8 = 0$$

Minimalna wartość funkcji celu = 42

2.3. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej całkowitoliczbowej

2.3.1. Zagadnienie cięcia (4/4)

Rozwiązania alternatywne

Zmienna	Numer rozwiązania optymalnego														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_1	13	12	14	15	15	14	15	14	14	14	13	13	14	14	14
x_2	73	72	74	72	73	74	75	72	73	74	72	73	73	72	73
x_3	4	6	0	0	0	2	0	1	2	1	4	3	1	0	0
x_4	47	48	48	48	47	46	45	49	47	47	48	48	48	50	49
x_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	1
x_6	0	0	0	3	2	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
x_7	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
x_8	1	0	0	0	1	2	3	0	1	1	0	0	0	0	0

W każdym z tych rozwiązań wymagane jest pocięcie 138 kłód. Wykorzystywane są wszystkie sposoby cięcia

2.3. Przykłady wykorzystania optymalizacji liniowej całkowitoliczbowej

2.3.2. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (1/5)

Przykład 2.5

Czas pracy	Produkty			Maksymalny czas pracy
	1	2	3	
Maszyna 1	1	3	2	30
Maszyna 2	2	2	6	20
Zysk jednostkowy	1	2	3	

Maszyna	Wariant	Zwiększenie czasu pracy	Koszt
1	1	7	45
	2	16	70
2	1	10	28
	2	30	80

Łączny koszt modernizacji nie może przekroczyć 125.

Należy dokonać takiej modernizacji maszyn, by zmaksymalizować zysk przy zwiększonych możliwościach produkcyjnych.

2.3.2. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (2/5)

Model matematyczny

Cel

Celem jest dokonanie takiej modernizacji maszyn, by zmaksymalizować zysk otrzymany z wytworzenia produktów P_1 , P_2 , P_3 .

Zmienne decyzyjne

x_1 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_1 ,

x_2 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_2 ,

x_3 – planowany rozmiar produkcji wyrobu P_3 ,

2.3.2. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (3/5)

Model matematyczny (c.d.)

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli czas pracy maszyny 1 zostanie zwiększony o 7 jednostek} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_5 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli czas pracy maszyny 1 zostanie zwiększony o 16 jednostek} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_6 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli czas pracy maszyny 2 zostanie zwiększony o 10 jednostek} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$x_7 = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli czas pracy maszyny 2 zostanie zwiększony o 30 jednostek} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

2.3.2. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (4/5)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

ograniczenie związane z czasem pracy maszyny 1:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 + 7x_4 + 16x_5$$

ograniczenie związane z czasem pracy maszyny 2:

$$2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 20 + 10x_6 + 30x_7$$

warunek budżetowy:

$$45x_4 + 70x_5 + 28x_6 + 80x_7 \leq 125$$

2.3.2. Zagadnienie produkcyjno-modernizacyjne (5/5)

Model matematyczny i rozwiązanie optymalne

Warunki określające możliwość jednoczesnej realizacji wariantów:

dla maszyny 1:

$$x_4 + x_5 \leq 1$$

dla maszyny 2:

$$x_6 + x_7 \leq 1$$

warunki nieujemności:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

warunki dodatkowe:

$$x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 8,7, \quad x_3 = 5,43, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_7 = 1$$

Wartość funkcji celu jest równa 33,71

2.3.3. Optymalizacja planu wydawniczego (1/5)

Przykład 2.6

Przedmiot	Rodzaj skryptu	Prognoza sprzedaży
Zarządzanie	nowe wydanie	2500
Matematyka	wznowienie	3000
Statystyka	nowe wydanie	2000
Statystyka matematyczna	nowe wydanie	1500
Statystyka opisowa	wznowienie	1500
Finanse	nowe wydanie	1800
Rachunkowość	nowe wydanie	3000
Rachunkowość II	wznowienie	3500
Angielski	nowe wydanie	5000
Francuski	nowe wydanie	3500

Nad skryptami mogą pracować redaktorzy:

Jerzy 480 godzin,

Krystyna 320 godzin,

Maria 350 godzin.

2.3.3 Optymalizacja planu wydawniczego (2/5)

Przykład 2.6 (c.d.)

Skrypt	Jerzy	Krystyna	Maria
Zarządzanie	220	300	-
Matematyka	130	190	-
Statystyka	190	150	210
Statystyka matematyczna	160	-	190
Statystyka opisowa	90	-	120
Finanse	-	220	100
Rachunkowość	-	-	200
Rachunkowość II	-	-	180
Angielski	300	-	240
Francuski	-	400	310

Wydane zostaną:

- co najwyżej dwa skrypty ze statystyki,
- co najwyżej jeden skrypt z rachunkowości,
- matematyka albo zarządzanie.

Należy określić najlepszy plan wydawniczy.

2.3.3. Optymalizacja planu wydawniczego (3/5)

Model matematyczny

Cel

Ustalenie planu wydawniczego, który maksymalizuje łączną, planowaną wielkość sprzedaży

Zmienne decyzyjne

Zmienna	Opis zmiennej		Wartość
x_1	wydanie skryptu:	Zarządzanie	{0, 1}
x_2		Matematyka	{0, 1}
x_3		Statystyka	{0, 1}
x_4		Statystyka matematyczna	{0, 1}
x_5		Statystyka opisowa	{0, 1}
x_6		Finanse	{0, 1}
x_7		Rachunkowość	{0, 1}
x_8		Rachunkowość II	{0, 1}
x_9		Angielski	{0, 1}
x_{10}		Francuski	{0, 1}

2.3.3. Optymalizacja planu wydawniczego (4/5)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$25x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 15x_5 + 18x_6 + 30x_7 + 35x_8 + 50x_9 + 35x_{10} \rightarrow \max$$

(jako jednostkę przyjęto 100 sztuk)

Warunki ograniczające

Jerzy - co najwyżej 480 godzin:

$$220x_1 + 130x_2 + 190x_3 + 160x_4 + 90x_5 + 300x_9 \leq 480$$

Krystyna - co najwyżej 320 godzin:

$$300x_1 + 190x_2 + 150x_3 + 220x_6 + 400x_{10} \leq 320$$

Maria - co najwyżej 350 godzin:

$$210x_3 + 190x_4 + 120x_5 + 100x_6 + 200x_7 + 180x_8 + 240x_9 + 310x_{10} \leq 350$$

Nie więcej niż dwa skrypty ze statystyki:

$$x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$$

2.3.3. Optymalizacja planu wydawniczego (5/5)

*Model matematyczny i rozwiązanie optymalne***Warunki ograniczające (c.d.)**

W planie nie może się znaleźć więcej niż jeden skrypt z rachunkowości:

$$x_7 + x_8 \leq 1$$

W planie musi się znaleźć albo skrypt z zarządzania albo matematyki:

$$x_1 + x_2 = 1$$

Dodatkowe warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

Rozwiązanie 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Rozwiązanie 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 8000.

2.3.4. Relokalizacja komisariatów policji (1/4)

Przykład 2.7

Proponowana lokalizacja	Rejony
A	1, 5, 7
B	1, 2, 5, 7
C	1, 3, 5
D	2, 4, 5
E	3, 4, 6
F	4, 5, 6
G	1, 5, 6, 7

Należy znaleźć najmniejszą liczbę zrelokalizowanych komisariatów pokrywających swym zasięgiem wszystkie siedem rejonów.

2.3.4. Relokalizacja komisariatów policji (2/4)

Model matematyczny

Cel

Określenie najmniejszej liczby relokalizowanych komisariatów, aby każdy rejon był pod opieką przynajmniej jednego komisariatu.

Zmienne decyzyjne

Zmienna	Opis zmiennej		Wartość
x_1	Proponowana lokalizacja komisariatu:	A	{0, 1}
x_2		B	{0, 1}
x_3		C	{0, 1}
x_4		D	{0, 1}
x_5		E	{0, 1}
x_6		F	{0, 1}
x_7		G	{0, 1}

2.3.4. Relokalizacja komisariatów policji (3/4)

Model matematyczny (c.d.)

Funkcja celu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \min$$

Warunki ograniczające

Rejon 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \geq 1$$

Rejon 2:

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

Rejon 3:

$$x_3 + x_5 \geq 1$$

Rejon 4:

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

2.3.4. Relokalizacja komisariatów policji (4/4)

Model matematyczny i rozwiązanie optymalne

Rejon 5:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1$$

Rejon 6:

$$x_5 + x_6 + x_7 \geq 1$$

Rejon 7

$$x_1 + x_2 + x_7 \geq 1$$

Dodatkowe warunki na zmienne decyzyjne:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\}$$

Rozwiązanie optymalne

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	1	0	0	1	0	0

Optymalna wartość funkcji celu wynosi 2.

Pora na relaks

